数理解析研究所講究録
1136巻 2000年 110-123

Banach 空間における最良近似度に関する逆問題

琉球大・理　西白保敏彦 (Toshihiko Nishishiraho)

1. 序

$C_{2\pi}$ は実軸 $\mathbb{R}$ 上で定義された周期 2π を持つ連続関数全体のなす Banach 空間を表す. 各 $f\in C_{2\pi}$ のノルムは

$$\|f\|_{\infty}=\max\{|f(t)|:|t|\leq\pi\}$$

である. $\mathbb{N}$ を正の整数全体の集合とし, $\mathbb{N}_0=\mathbb{N}\cup\{0\}$ とおく. 各 $n\in\mathbb{N}_0$ に対して, $\mathfrak{T}_n$ は n 次以下の三角多項式全体の集合を表し, $f\in C_{2\pi}$ と $\mathfrak{T}_n$ の間の距離を

$$E_n(C_{2\pi};f)=\inf\{\|f-g\|_{\infty}:g\in\mathfrak{T}_n\}$$

と書き, これを $\mathfrak{T}_n$ に関する f の n 次最良近似度という. $\mathfrak{T}_n$ は Haar の条件を満たす $2n+1$ 次元の線形部分空間であるから, 任意の $f\in C_{2\pi}$ は唯一の最良近似 g_n を持つ. すなわち,

$$E_n(C_{2\pi};f)=\|f-g_n\|_{\infty}$$

となる $g_n\in\mathfrak{T}_n$ が一意に存在する (例えば, [18; 第6章, 定理 6.1.8] 参照).

古典的な Weierstrass の三角多項式近似定理は任意の $f\in C_{2\pi}$ に対して, $\{E_n(C_{2\pi};f):n\in\mathbb{N}_0\}$ が 0 に収束することを意味するが, その収束する速度と被近似関数 f の滑らかさの性質とは関係が深い. 一般に, f が滑らかであればある程 $E_n(C_{2\pi};f)$ は速く 0 に収束する. このような結果はしばしば Jackson 型の順定理といわれる. 逆に, $E_n(C_{2\pi};f)$ が十分速く 0 に収束すれば, f はある種の滑らかさの性質 (例えば, その連続率, Lipschitz 条件, 微分可能性等) を持つ. このような結果は Jackson 型の順定理に対して, Bernstein 型の逆定理と呼ばれる.

より正確に jackson 型の順定理の一つを述べると次の通りである: $r\in\mathbb{N}_0$, $0<\alpha\leq 1$ とする. f の r 次導関数 $f^{(r)}$ が指数 α の Lipschitz 条件を満たす, すなわち,

$$\|f^{(r)}(\cdot-t)-f^{(r)}(\cdot)\|_{\infty}=O(|t|^{\alpha})\qquad(t\in\mathbb{R}),\tag{1}$$

ならば,

$$E_n(C_{2\pi};f)=O\left(\frac{1}{n^{\alpha+r}}\right)\qquad(n\to\infty).\tag{2}$$

逆に, Bernstein 型の逆定理は, $0<\alpha<1$ のとき, (2) ならば (1) が成立し, そして $\alpha=1$ のとき, (2) ならば

$$\|f^{(r)}(\cdot-t)-f^{(r)}(\cdot)\|_{\infty}=O(|t\log|t||)\qquad(|t|\to+0)$$

が成立することを主張している. 更に, $\alpha = 1$ のとき, (2) は

$$\|f^{(r)}(\cdot + t) + f^{(r)}(\cdot - t) - 2f^{(r)}(\cdot)\|_\infty = O(|t|) \qquad (t \in \mathbb{R})$$

と同値である. これは Zygmund の結果である (cf. [23]). 関連する他の結果については [2], [5], [8], [9] 及び [18] を参照. 同様な結果が $L^p_{2\pi}$ 空間においても成り立つ. ここで, この空間は $\mathbb{R}$ 上で周期 2π を持ち, 且つ $(-\pi, \pi)$ で p 乗絶対 Lebesgue 可積分関数 f 全体のなす Banach 空間を表し, f のノルムは

$$\|f\|_p = \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^p \, dt\right)^{1/p} \qquad (1 \le p < \infty)$$

で与えられる (cf. [2], [19], [21], [23]). また, "O" を "o" で置き換えても同様な事が成り立つ (cf. [9], [23]).

これらの結果はこれまでに多くの研究者によって一般化されている. その一つに de la Vallée Poussin の結果があるが, これは更に高次の連続率を用いて Butzer-Nessel [3] によって拡張されている (cf. [6], [19]). [13] (cf. [12]) において, 我々はこの結果を一般の Banach 空間において Fourier 展開理論 (cf. [4], [10], [11], [22]) の観点から考察し, 一般化した. 本講演の目的は, 我々の [16] の設定の下でこれらの手法を発展させ, いくつかの改良を行うことである. 詳細な取り扱いについては, [17] を参照.

2. 一般設定と結果

$(X, \|\cdot\|_X)$ を Banach 空間とし, $B[X]$ は X からそれ自身への有界線形作用素全体のなす通常の作用素ノルム $\|\cdot\|_{B[X]}$ をもつ Banach 環を表す. $\{M_n : n \in \mathbb{N}_0\}$ は X の閉線形部分空間の列で次の条件を満たすとする:

(M-1) $M_0 \subseteq M_1 \subseteq M_2 \subseteq \cdots \subseteq M_n \subseteq M_{n+1} \subseteq \cdots$.

(M-2) $\cup_{n=0}^{\infty} M_n$ は X で稠密である.

$\{G_k : k \in \mathbb{N}_0\}$ は定義域 $D(G_k)$ を持つ閉線形作用素の列で次の条件を満たすとする:

(G-1) $M_n \subseteq D(G_k), \quad G_k(M_n) \subseteq M_n \qquad (\forall n, k \in \mathbb{N}_0)$.

(G-2) $\|G_k(f)\|_X \le A_k n^k \|f\|_X \qquad (\forall k \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}_0, f \in M_n)$.

ここで A_k は n と f に依存しない正の定数である.

任意の $f \in X$ に対して,

$$E_n(X; f) = \inf\{\|f - g\|_X : g \in M_n\}$$

と定義し, これを M_n に関する f の n 次最良近似度という. 条件 (M-1) のよって,

$$E_n(X; f) \ge E_{n+1}(X; f) \ge 0 \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

が成立し, 条件 (M-2) は

$$\lim_{n\to\infty} E_n(X;f) = 0 \qquad (\forall f \in X)$$

を意味する.

本講演において, 我々は与えられた速度で $E_n(X;f)$ が 0 に収束することから f のある種の滑らかさの性質を導く逆問題を考察する. そのために, $X \times [0,\infty)$ 上で定義された非負関数列 $\{\omega_k : k \in \mathbb{N}_0\}$ で, 次の条件を満たすものを考える:

$(\omega - 1)$　各 $k \in \mathbb{N}_0$に対して, ある正の定数 B_kが存在して

$$\omega_k(f,\delta) \le B_k \|f\|_X \qquad (\forall f \in X, \delta \ge 0).$$

$(\omega - 2)$　$\lim_{\delta\to+0} \omega_k(f,\delta) = 0 \qquad (\forall f \in X, k \in \mathbb{N}).$

$(\omega - 3)$　各 $k \in \mathbb{N}_0$に対して, ある正の定数 C_kが存在して

$$\omega_k(f,\delta) \le C_k \delta^k \|G_k(f)\|_X \qquad (\forall f \in D(G_k), \delta \ge 0).$$

$(\omega - 4)$　各 $k \in \mathbb{N}_0, \delta \ge 0$ に対して, $\omega_k(\cdot,\delta)$ は X上のセミノルムである.

今後, 各 $f \in X$に対して M_nに関する fの最良近似 g_n が存在すると仮定する, すなわち,

$$\exists\, g_n \in M_n : E_n(X;f) = \|f - g_n\|_X \qquad (\forall n \in \mathbb{N}_0).$$

ここで, g_nの一意性は必ずしも必要でない. ノルム空間における最良近似理論の解説については, [18] を参照.

$a \in \mathbb{N}, a \ge 2, \varphi : [a,\infty) \to [0,\infty)$ を有界な関数とし,

$$\varphi^*(x) = \sup\{\varphi(t) : x \le t\} \qquad (x \ge a)$$

と定義する. このとき, $\varphi^* : [a,\infty) \to [0,\infty)$ は有界な単調減少関数で

$$\varphi(x) \le \varphi^*(x) \qquad (\forall x \ge a)$$

が成り立つ. 特に, φ が単調減少関数ならば, $\varphi = \varphi^*$である. また,

$$\lim_{x\to\infty} \varphi(x) = 0 \iff \lim_{x\to\infty} \varphi^*(x) = 0.$$

$\Omega : [a,\infty) \to [0,\infty)$ は単調減少関数で

$$\lim_{x\to\infty} \Omega(x) = 0, \qquad \int_a^\infty \frac{\Omega(x)}{x}\,dx < \infty$$

を満たすとする. このとき, 次の結果が成立する:

定理 1 ([16; Theorem 1]) $f \in X, r \in \mathbb{N}_0, a < \min\{b, c\}, b \le \sqrt{c}, \delta > 0$ とし,

$$E_n(X;f) \le \frac{\varphi(n)\Omega(n)}{n^r} \qquad (\forall n \ge a)$$

と仮定する．このとき，fは$D(G_r)$に属し，すべての$k\in\mathbb{N}$に対して，

$$\omega_k(G_r(f),\delta)\le C\Big\{\delta^k\int_a^{ab}x^{k-1}\Omega(x)\,dx$$
$$+\varphi^*(ab)\Big(\delta^k\int_a^{ac}x^{k-1}\Omega(x)\,dx+\int_c^\infty\frac{\Omega(x)}{x}\,dx\Big)\Big\}.$$

ここで，Cはb,c,δに依存しない正の定数である．

さて，以下本節では，$r\in\mathbb{N}_0$とし$f\in X$は

$$E_n(X;f)\le\frac{\varphi(n)\Omega(n)}{n^r}\qquad(\forall n\ge a)$$

を満たすと仮定する．従って，定理1によって，fは常に$D(G_r)$に属する．

定理 2 $a<b,\delta>0$とする．このとき，

$$\omega_k(G_r(f),\delta)\le C\Big\{\delta^k\int_a^{ab}x^{k-1}\Omega(x)dx$$
$$+\varphi^*(ab)\Big(\delta^k\int_a^{ab^2}x^{k-1}\Omega(x)dx+\int_{b^2}^\infty\frac{\Omega(x)}{x}dx\Big)\Big\}$$
$$\le C\Big\{\big(1+\varphi^*(ab)\big)\delta^k\int_a^{ab^2}x^{k-1}\Omega(x)dx+\varphi^*(ab)\int_{b^2}^\infty\frac{\Omega(x)}{x}dx\Big\}.$$

ここで，Cはbとδに依存しない正の定数である．

証明 定理1において，$c=b^2$とおく．

系 1 ξは$(0,\infty)$上の正の関数で，$\mu>0$とする．$\xi(\delta)<a^{-\mu}$，$\delta>0$のとき，

$$\omega_k(G_r(f),\delta)\le C\Big\{\delta^k\int_a^{a/\xi(\delta)^{1/\mu}}x^{k-1}\Omega(x)dx$$
$$+\varphi^*(a/\xi(\delta)^{1/\mu})\Big(\delta^k\int_a^{a/\xi(\delta)^{2/\mu}}x^{k-1}\Omega(x)\,dx\ +\ \int_{1/\xi(\delta)^{2/\mu}}^\infty\frac{\Omega(x)}{x}\,dx\Big)\Big\}$$
$$\le C\Big\{\big(1+\varphi^*(a/\xi(\delta)^{1/\mu})\big)\delta^k\int_a^{a/\xi(\delta)^{2/\mu}}x^{k-1}\Omega(x)\,dx$$
$$+\varphi^*(a/\xi(\delta)^{1/\mu})\int_{1/\xi(\delta)^{2/\mu}}^\infty\frac{\Omega(x)}{x}\,dx\Big\}.$$

ここで，Cは ξ,μ,δに依存しない正の定数である．特に，$\lambda,\mu>0, 0<\delta^\lambda<a^{-\mu}$ならば，

$$\omega_k(G_r(f),\delta)\le C\Big\{\delta^k\int_a^{a/\delta^{\lambda/\mu}}x^{k-1}\Omega(x)dx$$
$$+\varphi^*(a/\delta^{\lambda/\mu})\Big(\delta^k\int_a^{a/\delta^{2\lambda/\mu}}x^{k-1}\Omega(x)dx\ +\ \int_{\delta^{-2\lambda/\mu}}^\infty\frac{\Omega(x)}{x}dx\Big)\Big\}$$

$$\leq C\Big\{\big(1+\varphi^*(a/\delta^{\lambda/\mu})\big)\delta^k\int_a^{a/\delta^{2\lambda/\mu}}x^{k-1}\Omega(x)\,dx$$
$$+\varphi^*(a/\delta^{\lambda/\mu})\int_{\delta^{-2\lambda/\mu}}^{\infty}\frac{\Omega(x)}{x}\,dx\Big\}.$$

ここで, Cは λ, μ, δに依存しない正の定数である.

定理 3 (**[16; Theorem 2]**) ξとγは$(0,\infty)$ 上の正の関数で,

$$\lim_{\delta\to+0}\xi(\delta)=+\infty,\quad \lim_{\delta\to+0}\gamma(\delta)=0,\quad \lim_{\delta\to+0}\sqrt{\gamma(\delta)}\xi(\delta)=0 \tag{3}$$

を満たすとする. このとき,

$$\omega_k(G_r(f),\delta)\leq O\Big\{\delta^k\int_a^{a\xi(\delta)}x^{k-1}\Omega(x)\,dx$$
$$+\varphi^*(a\xi(\delta))\Big(\delta^k\int_a^{a/\gamma(\delta)}x^{k-1}\Omega(x)dx+\int_{1/\gamma(\delta)}^{\infty}\frac{\Omega(x)}{x}dx\Big)\Big\}$$
$$(\delta\to+0).$$

特に, $\lambda, \mu > 0$ ならば,

$$\omega_k(G_r(f),\delta)\leq O\Big\{\delta^k\int_a^{a\mu|\log\delta|}x^{k-1}\Omega(x)\,dx$$
$$+\varphi^*(a\mu|\log\delta|)\Big(\delta^k\int_a^{a/\delta^{\lambda}}x^{k-1}\Omega(x)dx+\int_{1/\delta^{\lambda}}^{\infty}\frac{\Omega(x)}{x}dx\Big)\Big\}$$
$$(\delta\to+0).$$

実際, 十分小さな$\delta > 0$ に対して, $b=\xi(\delta), c=1/\gamma(\delta)$ とし, 定理 1 を用いる.

3. Bernstein と Zygmund 型の結果

この節では, 特別な関数

$$\Omega(x)=\frac{1}{x^{\alpha}},\qquad (\alpha>0) \tag{4}$$

を考える. $f\in X, r\in\mathbb{N}_0, k\in\mathbb{N}$ とし,

$$E_n(X;f)\leq\frac{\varphi(n)}{n^{\alpha+r}}\qquad(\forall n\geq a)$$

と仮定する. 従って, 定理 1 によって, fは常に $D(G_r)$ に属する.

定理 4 $a<\min\{b,c\}, b\le\sqrt{c}, \delta>0$ とする. このとき,

$$\omega_k(G_r(f),\delta)\le C\Big\{\frac{a^{k-\alpha}}{k-\alpha}\big(b^{k-\alpha}-1+\varphi^*(ab)(c^{k-\alpha}-1)\big)\delta^k+\frac{\varphi^*(ab)}{\alpha c^\alpha}\Big\}$$

$$(k\ne\alpha);$$

$$\omega_k(G_r(f),\delta)\le C\Big\{\big(\log b+\varphi^*(ab)\log c\big)\delta^k+\frac{\varphi^*(ab)}{kc^k}\Big\}$$

$$(k=\alpha).$$

ここで, Cはb,c,δに依存しない正の定数である.

証明 $\Omega(x)$ を (4) の通りとする. $a<d$ ならば,

$$\int_a^{ad}x^{k-1}\Omega(x)\,dx=\begin{cases}\frac{a^{k-\alpha}}{k-\alpha}(d^{k-\alpha}-1) & (k\ne\alpha)\\ \log d & (k=\alpha),\end{cases}$$

そして

$$\int_c^\infty\frac{\Omega(x)}{x}\,dx=\frac{1}{\alpha c^\alpha}.$$

従って, 定理 1 から所望の結果を得る.

系 2 (**[16; Theorem 3]**) γ は $\lim_{\delta\to+0}\gamma(\delta)=0$ を満たす $(0,\infty)$ 上の正の関数とする. このとき,

$$\omega_k(G_r(f),\delta)\le C\Big\{\frac{a^{k-\alpha}}{k-\alpha}\Big(\frac{\delta}{\gamma^2(\delta)}\Big)^k\big(1+\varphi^*(a/\gamma(\delta))\big)+\frac{\varphi^*(a/\gamma(\delta))}{\alpha}\Big\}\gamma^{2\alpha}(\delta)$$

$$\big(\alpha<k,\gamma(\delta)<a^{-1}\big);$$

$$\omega_k(G_r(f),\delta)\le C\Big\{\big(1+2\varphi^*(a/\gamma(\delta))\big)\Big(\frac{\delta}{\gamma(\delta)}\Big)^k$$

$$+\frac{\varphi^*(a/\gamma(\delta))}{k}\gamma^k(\delta)\Big\}\gamma^k(\delta)|\log\gamma(\delta)|$$

$$\big(\alpha=k,\gamma(\delta)<\min\{a^{-1},e^{-1}\}\big);$$

$$\omega_k(G_r(f),\delta)\le C\Big\{\frac{a^{k-\alpha}}{\alpha-k}\Big(\frac{\delta}{\gamma(\delta)}\Big)^k\big(1+\varphi^*(a/\gamma(\delta))\big)$$

$$+\frac{\varphi^*(a/\gamma(\delta))}{\alpha}\gamma^{2\alpha-k}(\delta)\Big\}\gamma^k(\delta)$$

$$\big(\alpha>k,\gamma(\delta)<a^{-1}\big).$$

ここで, Cは δ,γに依存しない正の定数である. 特に, $\lambda>0$ ならば

$$\omega_k(G_r(f),\delta)\le C\Big\{\frac{a^{k-\alpha}}{k-\alpha}\big(1+\varphi^*(a/\delta^\lambda)\big)\delta^{(1-2\lambda)k}+\frac{\varphi^*(a/\delta^\lambda)}{\alpha}\Big\}\delta^{2\alpha\lambda}$$

$$\left(\alpha < k, \delta < a^{-1/\lambda}\right);$$

$$\omega_k(G_r(f),\delta) \le C\Big\{\big((1+2\varphi^*(a/\delta^\lambda)\big) + \frac{\varphi^*(a/\delta^\lambda)}{k}\,\delta^{(2\lambda-1)k}\Big\}\delta^k|\log\delta^\lambda|$$

$$\left(\alpha = k, \delta < \min\{a^{-1/\lambda},\, e^{-1/\lambda}\}\right);$$

$$\omega_k(G_r(f),\delta) \le C\Big\{\frac{a^{k-\alpha}}{\alpha-k}\big(1+\varphi^*(a/\delta^\lambda)\big) + \frac{\varphi^*(a/\delta^\lambda)}{\alpha}\,\delta^{2\alpha\lambda-k}\Big\}\delta^k$$

$$\left(\alpha > k, \delta < a^{-1/\lambda}\right).$$

ここで, Cは δ, λに依存しない正の定数である.

系 3 ([16; Corollary 2]) $\alpha > 0, f \in X, r \in \mathbb{N}_0$とする.

$$E_n(X;f) = O\Big(\frac{1}{n^{\alpha+r}}\Big) \qquad (n \to \infty)$$

ならば, fは$D(G_r)$に属し, すべての$k \in \mathbb{N}$に対して,

$$\omega_k(G_r(f),\delta) = \begin{cases} O(\delta^\alpha) & (\alpha < k) \\ O(\delta^k|\log\delta|) & (\alpha = k) \\ O(\delta^k) & (\alpha > k) \end{cases}$$

$$(\delta \to +0).$$

系 4 $r \in \mathbb{N}_0, r < \alpha$とし, $f \in X$が

$$E_n(X;f) = O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right) \quad (n \to \infty)$$

を満たすならば, $f \in D(G_r)$ で, すべての$k \in \mathbb{N}$に対して,

$$\omega_k(G_r(f),\delta) = \begin{cases} O(\delta^{\alpha-r}) & (\alpha - r < k) \\ O(\delta^k|\log\delta|) & (\alpha - r = k) \\ O(\delta^k) & (\alpha - r > k) \end{cases}$$

$$(\delta \to +0).$$

特に,

$$\omega_k(G_0(f),\delta) = \begin{cases} O(\delta^\alpha) & (\alpha < k) \\ O(\delta^k|\log\delta|) & (\alpha = k) \\ O(\delta^k) & (\alpha > k) \end{cases}$$

$$(\delta \to +0).$$

定理 5 $k \in \mathbb{N}$, ξとγは$(0,\infty)$ 上の正の関数とする. $\alpha < k$ならば,

$$\omega_k(G_r(f),\delta) \le C\Big\{\frac{a^{k-\alpha}}{k-\alpha}\frac{\delta^k}{\gamma(\delta)}\xi^{k-\alpha}(\delta)$$

$$+\varphi^*(a\xi(\delta))\Big(\frac{a^{k-\alpha}}{k-\alpha}\frac{\delta^k}{\gamma(\delta)}\xi^{2(k-\alpha)}(\delta)+\frac{1}{\alpha}\frac{1}{\xi^{2\alpha}(\delta)\gamma(\delta)}\Big)\Big\}\gamma(\delta) \tag{5}$$

$$(a<\xi(\delta)).$$

ここで, Cは δ,ξ,γに依存しない正の定数である. (3) が成立し, $\alpha=k$ならば,

$$\omega_k(G_r(f),\delta)=O\Big[\Big\{\Big(\frac{\delta}{\gamma(\delta)}\Big)^k\frac{\log\xi(\delta)}{|\log\gamma(\delta)|}$$

$$+\varphi^*(a\xi(\delta))\Big(\Big(\frac{\delta}{\gamma(\delta)}\Big)^k+\frac{1}{k}\Big)\Big\}\gamma^k(\delta)|\log\gamma(\delta)|\Big] \qquad (\delta\to+0). \tag{6}$$

特に, $\beta,\lambda>0$ で, $\alpha<k$ならば,

$$\omega_k(G_r(f),\delta)\le C\Big\{\frac{a^{k-\alpha}}{k-\alpha}\delta^{\nu}+\Big(\frac{a^{k-\alpha}}{k-\alpha}\delta^{\rho}+\frac{1}{\alpha}\delta^{2\alpha\lambda-\beta}\Big)\varphi^*(a/\delta^{\lambda})\Big\}\delta^{\beta}$$

$$(0<\delta<a^{-1/\lambda}).$$

ここで,

$$\nu=(\alpha-k)\lambda+k-\beta,\quad \rho=2(\alpha-k)\lambda+k-\beta,$$

そして, Cはβ,δ,λに依存しない正の定数である. $\mu>0,\alpha=k$ならば,

$$\omega_k(G_r(f),\delta)=O\Big\{\Big(\frac{\log|\mu\log\delta|}{\lambda|\log\delta|}+\varphi^*(a\mu|\log\delta|)\Big(1+\frac{\delta^{(\lambda-1)k}}{k}\Big)\Big)\lambda\delta^k|\log\delta|\Big\}$$

$$(\delta\to+0).$$

証明 $\alpha<k$ならば, 定理 4 によって,

$$\omega_k(G_r(f),\delta)\le C\Big(\frac{a^{k-\alpha}}{k-\alpha}\big(b^{k-\alpha}+\varphi^*(ab)b^{2(k-\alpha)}\big)\,\delta^k+\frac{\varphi^*(ab)}{\alpha b^{2\alpha}}\Big)$$

$$(a<b,\ \delta>0).$$

従って, $b=\xi(\delta)$ とおくと (5) が得られる. $\alpha=k$ならば, 定理 4 により,

$$\omega_k(G_r(f),\delta)=O\Big\{\delta^k\log\xi(\delta)+\varphi^*(a\xi(\delta))\Big(\delta^k|\log\gamma(\delta)|+\frac{\gamma^k(\delta)}{k}\Big)\Big\}$$

$$(\delta\to+0).$$

これは (6) を意味する.

系 5 $\alpha>0, f\in X, r\in\mathbb{N}_0$ とする.

$$E_n(X;f)=o\Big(\frac{1}{n^{\alpha+r}}\Big)\quad(n\to\infty)$$

ならば, f は $D(G_r)$ に属し, すべての $k \in \mathbb{N}$ に対して,

$$\omega_k(G_r(f),\delta)=\begin{cases} o(\delta^\alpha) & (\alpha<k) \\ o(\delta^k|\log\delta|) & (\alpha=k) \end{cases}$$

$$(\delta \to +0).$$

系 6 $r \in \mathbb{N}_0, r<\alpha$ とし, $f \in X$ が

$$E_n(X;f)=o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right) \quad (n\to\infty)$$

を満たすならば, $f \in D(G_r)$ で, すべての $k \in \mathbb{N}$ に対して,

$$\omega_k(G_k(f),\delta)=\begin{cases} o(\delta^{\alpha-r}) & (\alpha-r<k) \\ o(\delta^k|\log\delta|) & (\alpha-r=k) \end{cases}$$

$$(\delta \to +0).$$

特に,

$$\omega_k(G_0(f),\delta)=\begin{cases} o(\delta^\alpha) & (\alpha<k) \\ o(\delta^k|\log\delta|) & (\alpha=k) \end{cases}$$

$$(\delta \to +0).$$

注意. [14] 及び [15] における結果と同様なことが次の付帯条件の下で成立する:

$(\omega-5)\quad G_k(g)=0 \qquad (\forall k\in\mathbb{N},\ g\in M_0).$

$(\omega-6)\quad \omega_k(f,\delta)=\omega_k(f+g,\delta) \qquad (\forall k\in\mathbb{N},\delta\ge 0, f\in X, g\in M_0).$

これらについて, 詳細は省略する.

4. 応用

$\mathbb{Z}$ はすべての整数全体の集合を表し, $\{P_j : j\in\mathbb{Z}\}$ は $B[X]$ に属する射影作用素の列で次の条件を満たすとする:

(P-1) $\quad P_jP_n=\delta_{j,n}P_n \quad (\forall j,n\in\mathbb{Z})$. ここで, $\delta_{j,n}$ はKroneckerのデルタ関数を表す.

(P-2) $\cup_{j\in\mathbb{Z}}P_j(X)$ で生成される線形部分空間は X で稠密である.

(P-3) すべての $j\in\mathbb{Z}$ に対して, $P_j(f)=0$ ならば $f=0$ である.

任意 $f\in X$ に対して, その $\{P_j\}$ に関する (形式的な) Fourier 級数

$$f \sim \sum_{j=-\infty}^{\infty} P_j(f)$$

を考える. $T \in B[X]$ が X上のマルチプライヤー作用素であるとは, スカラー列 $\{\tau_j : j \in \mathbb{Z}\}$ が存在してすべての $f \in X$ に対して,

$$T(f) \quad \sim \quad \sum_{j=-\infty}^{\infty} \tau_j P_j(f)$$

が成り立つことである. そして, 次の表示法を用いる:

$$T \quad \sim \quad \sum_{j=-\infty}^{\infty} \tau_j P_j.$$

$M[X]$ は X上のすべてのマルチプライヤー作用素全体の集合を表す. これは $B[X]$ の恒等作用素 Iを含む可換な閉部分環である. $\{T_t : t \in \mathbb{R}\}$ は $M[X]$ に属する作用素の列で

$$A = \sup\{\|T_t\|_{B[X]} : t \in \mathbb{R}\} < \infty,$$

$$T_t \quad \sim \quad \sum_{j=-\infty}^{\infty} e^{-ijt} P_j \qquad (\forall t \in \mathbb{R})$$

とする. このとき, [10; Proposition 2] によって, 次のことが成り立つ:

命題 1 $\{T_t : t \in \mathbb{R}\}$ は線形作用素の強連続群に成り, その生成作用素 G の定義域を $D(G)$ とすれば

$$G(f) \quad \sim \quad \sum_{j=-\infty}^{\infty} (-ij) P_j(f) \qquad (\forall f \in D(G)).$$

$k = 0, 1, 2, \cdots$ に対して, 作用素 G^kは帰納的に次のように定義される:

$$G^0 = I, \quad G^1 = G,$$

$$D(G^k) = \{f : f \in D(G^{k-1}), G^{k-1}(f) \in D(G)\},$$

$$G^k(f) = G(G^{k-1}(f)) \qquad (\forall f \in D(G^k), k = 1, 2, 3, \ldots).$$

各 $k \in \mathbb{N}$ に対して, $D(G^k)$ は Xの稠密な線形部分空間である (cf. [1; Propositions 1.1.4 and 1.1.6]). 更に, kについての帰納法によって,

$$G^k(P_j(g)) = (-ij)^k P_j(g) \qquad (\forall g \in X, j \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{N}) \tag{7}$$

及び

$$G^k(f) \quad \sim \quad \sum_{j=-\infty}^{\infty} (-ij)^k P_j(f) \qquad (\forall f \in D(G^k), k \in \mathbb{N})$$

が成立する.

各 $k \in \mathbb{N}_0, t \in \mathbb{R}$ に対して,

$$\Delta_t^0 = I, \quad \Delta_t^k = (T_t - I)^k = \sum_{m=0}^{k} (-1)^{k-m} \binom{k}{m} T_{mt} \qquad (\forall k \geq 1)$$

とおく. このとき, Δ_t^kは$M[X]$ に属し,

$$\Delta_t^k \quad \sim \quad \sum_{j=-\infty}^{\infty} (e^{-ijt} - 1)^k P_j \tag{8}$$

そして

$$\|\Delta_t^k\|_{B[X]} \leq B_k, \quad B_k = \min\{(A+1)^k, 2^k A\}$$

である. 各 $k \in \mathbb{N}_0, f \in X, \delta \geq 0$ に対して,

$$\omega_k(X; f, \delta) = \sup\{\|\Delta_t^k(f)\|_X : |t| \leq \delta\}$$

と定義し, これを $\{T_t\}$ に関する fの k次連続率という. これは次の基本的な性質を持つ ([12; Lemma 1]):

命題 2 $k \in \mathbb{N}, f \in X$とする. このとき, 次のことが成り立つ:

(a) $\omega_k(X; f, \delta) \leq B_k \|f\|_X \qquad (\forall \delta \geq 0)$.

(b) $\omega_k(X; f, \cdot)$ は $[0, \infty)$ 上の単調増加関数で, $\omega_k(X; f, 0) = 0$.

(c) $\omega_{k+r}(X; f, \delta) \leq B_k \omega_r(X; f, \delta) \qquad (\forall r \in \mathbb{N}_0,\ \delta \geq 0)$.

特に,

$$\lim_{\delta \to +0} \omega_k(X; f, \delta) = 0.$$

(d) $\omega_k(X; f, \xi\delta) \leq A(1+\xi)^k \omega_k(X; f, \delta) \qquad (\forall \xi,\ \delta \geq 0)$.

(e) $0 < \delta \leq \xi$ならば,

$$\omega_k(X; f, \xi)/\xi^k \leq 2^k A \omega_k(X; f, \delta)/\delta^k.$$

(f) $f \in D(G^k)$ ならば,

$$\omega_{k+r}(X; f, \delta) \leq A\delta^k \omega_r(X; f, \delta) \qquad (\forall r \in \mathbb{N}_0,\ \delta \geq 0).$$

特に,

$$\omega_k(X; f, \delta) \leq A\delta^k \|G^k(f)\|_X \qquad (\forall \delta \geq 0).$$

(g) 各$\delta \geq 0$ に対して, $\omega_k(X; \cdot, \delta)$ は X上のセミノルムである.

任意の $n \in \mathbb{N}_0$に対して, M_nは $\{P_j(X) : |j| \leq n\}$ で生成される線形部分空間を表す. このとき, 次の結果は Bernstein 型の不等式である [13; Lemma 5]):

命題 3 $n \in \mathbb{N}_0, k \in \mathbb{N}$ とする. このとき,

$$\|G^k(f)\|_X \leq (2nB)^k \|f\|_X \qquad (\forall f \in M_n)$$

が成立する, ここで,

$$B = \sup\{\|T_t\|_{B[X]} : |t| \le \pi\}.$$

さて, Xの閉線形部分空間の列 $\{M_n : n \in \mathbb{N}\}$ は明らかに (M-1) を満たし, (P-2) は (M-2) を意味する.

$$G_k = G^k \quad (\forall k \in \mathbb{N}_0), \quad \omega_k(f,\delta) = \omega_k(X; f, \delta) \quad (\forall f \in X, k \in \mathbb{N}_0, \delta \ge 0)$$

とおく. このとき, (7) と命題 3 は, $A_k = (2B)^k$として, それぞれ (G-1) と (G-2) を意味する. 更に, 命題 2 によって, すべての条件 $(\omega - 1) \sim (\omega - 4)$ が満たされる. また, $(\omega - 5)$ と $(\omega - 6)$ がそれぞれ (7) と (8) によって成り立つ.

結局, 前節までに得られたすべての結果が上述の設定の下で成立する (cf. [12], [13]). 特に, Xが斉次 Banach 空間 (これは特別な場合として, $C_{2\pi}$や $L^p_{2\pi}$ $(1 \le p < \infty)$ を含む関数空間である (cf. [7], [10], [20])) の場合, 射影作用素の列 $\{P_j : j \in \mathbb{Z}\}$ は

$$P_j(f)(\cdot) = \hat{f}(j)e^{ij\cdot} \qquad (\forall f \in X)$$

によって定義される. ここで,

$$\hat{f}(j) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-ijt}\,dt \qquad (\forall j \in \mathbb{Z})$$

は fの第 j次 Fourier 係数である. また, $\{T_t : t \in \mathbb{R}\}$ は右移動作用素

$$T_t(f)(\cdot) = f(\cdot - t) \qquad (f \in X)$$

から成る強連続群である. 従って, すべての $n \in \mathbb{N}_0$ に対して, $M_n = \mathfrak{T}_n$であり,

$$\Delta_t^k(f)(\cdot) = \sum_{m=0}^{k}(-1)^{k-m}\binom{k}{m} f(\cdot - mt) \quad \sim \quad \sum_{j=-\infty}^{\infty}(e^{-ijt} - 1)^k \hat{f}(j)e^{ij\cdot}$$

$$(\forall f \in X, k \in \mathbb{N}_0, t \in \mathbb{R}).$$

参考文献

[1] P. L. Butzer and H. Berens, *Semi-Groups of Operators and Approximation*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1967.

[2] P. L. Butzer and R. J. Nessel, *Fourier Analysis and Approximation*, Vol. I, Academic Press, New York, 1971.

[3] P. L. Butzer and R. J. Nessel, *Über eine Verallgemeinerung eines Satzes von de la Vallée Poussin*, On Approximation Theory, ISNM, Vol. **5**, pp. 45-58, Birkhäuser Verlag, Basel Stuttgart, 1972.

[4] P. L. Butzer, R. J. Nessel and W. Trebels, *On summation processes of Fourier expansinos in Banach spaces. I. Comparison theorems*, Tôhoku Math. J., **24**(1972), 127-140; *II. Saturation theorems*, ibid., 551-569; *III. Jackson- and Zamansky-type inequalities for Abel-bounded expansions*, Tôhoku Math. J., **27**(1975), 213-223.

[5] E. W. Cheney, *Introduction to Approximation Theory*, McGraw-Hill, New York, 1966.

[6] S. Csibi, *Note on de la Vallée approximation theorem*, Acta Math. Acad. Sci. Hungar., **7**(1957), 435-439.

[7] Y. Katznelson, *Introduction to Harmonic Analysis*, John Wiley, New York, 1968.

[8] G. G. Lorentz, *Approximation of Functions*, 2nd. ed., Chelsea, New York, 1986.

[9] I. P. Natanson, *Constructive Function Theory, Vol. II: Uniform Approximation*, Frederick Ungar, New York, 1964.

[10] T. Nishishiraho, *Quantitative theorems on linear approximation processes of convolution operators in Banach spaces*, Tôhoku Math. J., **33**(1981), 109-126.

[11] T. Nishishiraho, *Saturation of multiplier operators in Banach spaces*, Tôhoku Math. J., **34** (1982), 23-42.

[12] T. Nishishiraho, *The degree of the best approximation in Banach spaces*, Tôhoku Math. J., **46** (1994), 13-26.

[13] T. Nishishiraho, *Inverse theorems for the best approximation in Banach spaces*, Math. Japon., **43**(1996), 525-544.

[14] T. Nishishiraho, *Converse results for the beat approximation in Banach spaces*, Ryukyu Math. J., **10**(1997), 75-88.

[15] T. Nishishiraho, *Estimates for the degree of best approximation in Banach spaces*, Ryukyu Math. J., **11**(1998), 75-86.

[16] T. Nishishiraho, *General inverse theorems for the best approximation in Banach spaces*, Proceedings of the International Conference on Nonlinear Analysis and Convex Analysis (W. Takahashi and T. Tanaka, eds), World Scientific, 1999, 281-288.

[17] T. Nishishiraho, *General inverse problems for the best approximation in Banach spaces*, to appear in Ryukyu. Math. J.

[18] 西白保敏彦, 最良近似理論と関数解析, 横浜図書, 2000.

[19] E. S. Quade, *Trigonometric approximation in the mean*, Duke Math. J., **3**(1937), 529-543.

[20] H. S. Shapiro, *Topics in Approximation Theory*, Lecture Notes in Math., **187**, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1971.

[21] A. F. Timan, *Theory of Approximation of Functions of a Real Variable*, Macmillan, New York, 1963.

[22] W. Trebels, *Multipliers for* (C, α)*-Bounded Fourier Expansions in Banach spaces*, Lecture Notes in Math., **329**, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1973.

[23] A. Zygmund, *Smooth functions*, Duke Math. J., **12**(1945), 47-76.