数理解析研究所講究録
1136 巻 2000 年 124-132

実連続関数に値をとる微分可能な写像の Hyers-Ulam stability について

新潟大学大学院　三浦　毅 (Takeshi Miura)
山形大学工学部　髙橋 眞映 (Sin-Ei Takahasi)
大阪教育大学　長田　尚 (Hisashi Choda)

以下では I は $\mathbb{R}$ の開区間を表わす．このとき I は $\mathbb{R}$ に一致してもよいとする．つまり，

$$I=(a,b)\quad -\infty\le a<b\le\infty$$

とする．また特に断らない限り $\varepsilon\ge 0$，$\lambda>0$ とし，$J=\{e^{-\lambda t}:t\in I\}$ とおく．以下の命題1から命題3は，$\lambda=1$ の場合を Alsina-Ger [1] が示したが，一般の $\lambda\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ に対してもまったく同様にして示される．以下では $\lambda>0$ の場合についてのみ考察するが，$\lambda<0$ の場合についても，$\lambda>0$ に対応してほぼ同様の結果が成り立つ．

命題 1 $f\colon I\to\mathbb{R}$ を微分可能とし，f' を f の導関数とする．このとき次が成り立つ．
(i) $f'\le\lambda f\Leftrightarrow g'\le 0$ をみたすある $g\colon I\to\mathbb{R}$ に対して $f(t)=e^{\lambda t}g(t)\quad(t\in I)$.
(ii) $f'\ge\lambda f\Leftrightarrow g'\ge 0$ をみたすある $g\colon I\to\mathbb{R}$ に対して $f(t)=e^{\lambda t}g(t)\quad(t\in I)$.

命題 2 $f\colon I\to\mathbb{R}$ を微分可能とし，f' を f の導関数とする．このとき以下は同値である．
(i) $|f'(t)-\lambda f(t)|\le\varepsilon\quad(t\in I)$.
(ii) 微分可能な関数 $\theta\colon J\to\mathbb{R}$ が存在して次をみたす．

$$0\le-\lambda\theta'(u)\le 2\varepsilon\quad(u\in J),$$

$$f(t)=\frac{\varepsilon}{\lambda}+\theta(e^{-\lambda t})e^{\lambda t}\quad(t\in I).$$

ここに θ' は θ の導関数である．

注意 1 θ は $\dfrac{2\varepsilon}{\lambda}$-lipschitz である．実際 $u,v\in J:u\ne v$ とすると，平均値の定理により，ある $w\in\Big(\min(u,v),\max(u,v)\Big)$ に対して

$$\theta(u)-\theta(v)=\theta'(w)(u-v)$$

となる．ここで $0\le-\lambda\theta'(w)\le 2\varepsilon$ より

$$|\theta(u)-\theta(v)|\le\frac{2\varepsilon}{\lambda}|u-v|$$

となる．

注意 2 命題2におけるJ上の関数θに対して，$\lim_{u\searrow \inf J}\theta(u)$が存在する．実際$\varepsilon=0$のときは$\theta'=0$となり，$\theta$は定数値関数である．よって$\lim_{u\searrow \inf J}\theta(u)$が存在する．そこで$\varepsilon>0$のときを考える．まず$\sup_{v\in J}\theta(v)<\infty$となることを示す．もしも$\sup_{v\in J}\theta(v)=\infty$ならば，ある$v_1\in J$に対して$\theta(v_1)>1$となる．次にある$v_2\in J$に対して$\theta(v_2)>\theta(v_1)+1$とできる．このとき$v_2<v_1$である．実際$v_2\geq v_1$とすると，$0\leq -\lambda\theta'(u)\leq 2\varepsilon$より$\lambda>0$に注意すれば，$\theta'\leq 0$である．よって$\theta(v_2)\leq\theta(v_1)$でなければならない．これは$\theta(v_2)>\theta(v_1)+1$に反する．つまり$v_2<v_1$である．帰納的に$\theta(v_{n+1})>\theta(v_n)+1$をみたす$v_n\in J: v_{n+1}<v_n\quad(n\in\mathbb{N})$が存在する．ところで，ある$m\in\mathbb{N}$に対して$(0<)\, v_m-v_{m+1}<\dfrac{\lambda}{2\varepsilon}$となる．もしも任意の$n\in\mathbb{N}$に対して$v_n-v_{n+1}\geq\dfrac{\lambda}{2\varepsilon}$とすると$\dfrac{\lambda}{2\varepsilon}, v_1>0$より$\dfrac{\lambda}{2\varepsilon}k>v_1$となる$k\in\mathbb{N}$が存在するが，仮定より

$$\begin{aligned} v_1 &= v_{k+1}+\sum_{l=1}^{k}(v_l-v_{l+1}) \\ &> \sum_{l=1}^{k}\frac{\lambda}{2\varepsilon}=\frac{\lambda}{2\varepsilon}k. \end{aligned}$$

これはkのとりかたに反する．よって$(0<)\, v_m-v_{m+1}<\dfrac{\lambda}{2\varepsilon}$となる$m\in\mathbb{N}$が存在することが示された．このとき

$$\frac{\theta(v_{m+1})-\theta(v_m)}{v_{m+1}-v_m}<-\frac{2\varepsilon}{\lambda}$$

となる．平均値の定理より

$$\theta'(v_0)=\frac{\theta(v_{m+1})-\theta(v_m)}{v_{m+1}-v_m}$$

をみたす$v_0\in(v_{m+1},v_m)$が存在する．よって

$$\theta'(v_0)<-\frac{2\varepsilon}{\lambda}.$$

ところが$v_0\in J$なので，これは$-\lambda\theta'(u)\leq 2\varepsilon\quad(u\in J)$に反する．ゆえに$\sup_{v\in J}\theta(v)<\infty$が示された．

最後に$\lim_{u\searrow \inf J}\theta(u)=\sup_{v\in J}\theta(v)$を示す．$\eta>0$を任意に与えると，$\sup_{v\in J}\theta(v)-\eta<\theta(u_0)$なる$u_0\in J$が存在する．$\theta'\leq 0$なので，$u\leq u_0$ならば$\theta(u)\geq\theta(u_0)$となる．ゆえに

$$|\theta(u)-\sup_{v\in J}\theta(v)|<\eta\quad(u\in J: u<u_0).$$

すなわち，$\lim_{u\searrow \inf J}\theta(u)=\sup_{v\in J}\theta(v)$が示された．

命題 3 $f\colon I\to\mathbb{R}$を微分可能とし，f'をfの導関数とする．このとき

$$|f'(t)-\lambda f(t)|\leq\varepsilon\quad(t\in I)$$

ならば，$c = \lim_{u \searrow \inf J} \theta(u)$ に対して

$$|f(t) - ce^{\lambda t}| \leq \frac{3\varepsilon}{\lambda} \quad (t \in I)$$

となる．

[1] では微分方程式の摂動 $|f'(t) - \lambda f(t)| \leq \varepsilon$ の解の，命題 3 の意味での安定性を Hyers-Ulam stability と呼んでいる．

定義 1 A を Banach 空間，$f\colon I \to A$ とする．f が微分可能であるとは，任意の $t \in I$ に対して $f'(t) \in A$ が存在して，

$$\lim_{s \to 0} \left\| f'(t) - \frac{f(t+s) - f(t)}{s} \right\|_A = 0$$

をみたすことをいう．ここに $\|\cdot\|_A$ は A のノルムとする．

注意 3 定義 1 の意味での微分可能性は，各点で Fréchet 微分可能であることと同値である．

以後特に断らない限り，$f'(t)$ は $\lim_{s \to 0} \frac{f(t+s) - f(t)}{s}$ を表わすことにする．次の命題はよくしられた結果であると思うが，完全を期すため証明を述べる．

命題 4 A を Banach 空間，$f\colon I \to A$ は微分可能とする．$\lambda \in \mathbb{C} \setminus 0$ とすると次は同値である．
(i) $f'(t) = \lambda f(t) \quad (t \in I)$
(ii) ある $g \in A$ に対して $f(t) = e^{\lambda t} g$.

証明 (ii) $\Rightarrow$ (i) 微分の定義より明らか.
(i) $\Rightarrow$ (ii) $g(t) = e^{-\lambda t} f(t) \quad (t \in I)$ とおく．このとき

$$g'(t) = \{-\lambda f(t) + f'(t)\} e^{-\lambda t} = 0 \quad (t \in I).$$

いま $g(t)$ は $t \in I$ に依存しないことを示す．実際 $t_0 \in I$ を任意にとり固定し，

$$h(t) = g(t) - g(t_0) \quad (t \in I)$$

とおく．A の双対空間 A^* の任意の元 Λ に対して，Λ の連続性により

$$\frac{d}{dt}\{\Lambda(h(t))\} = \Lambda((h'(t)) = \Lambda(0) = 0 \quad (t \in I)$$

となる．ここで $h'(t) = 0$ であることを用いた．よって任意の $\Lambda \in A^*$ に対して $c_\Lambda \in \mathbb{C}$ が存在して $\Lambda(h(t)) = c_\Lambda \quad (t \in I)$ となる．$h(t_0) = 0$ より $c_\Lambda = \Lambda(h(t_0)) = \Lambda(0) = 0$ なので，Hahn-Banach の定理より $h(t) = 0 \quad (t \in I)$. よってある $g \in A$ に対して $g(t) = g \quad (t \in I)$ となる．すなわち $f(t) = e^{\lambda t} g$. ■

以下では $C_0(X,\mathbb{R})$ を局所コンパクト Hausdorff 空間 X 上の実数値連続関数で，無限遠点で 0 になるもの全体からなる実 Banach 空間とする．$f\colon I\to C_0(X,\mathbb{R})$ は微分可能で

$$\|f'(t)-\lambda f(t)\|_\infty\le\varepsilon\quad(t\in I)$$

となるならば，次をみたす $k\in\mathbb{R}$ と $g\in C_0(X,\mathbb{R})$ が存在するか？

$$\|f(t)-e^{\lambda t}g\|_\infty\le k\varepsilon\quad(t\in I).$$

ここに $\|\cdot\|_\infty$ は X 上の sup-ノルムである．

以下でこの問題について考察する．まず各 $t\in I$, $x\in X$ に対して

$$f'(t)(x)=\frac{d}{dt}\{f(t)(x)\}$$

に注意すると

$$\left|\frac{d}{dt}\{f(t)(x)\}-\lambda f(t)(x)\right|\le\varepsilon\quad(t\in I,x\in X)$$

となる．このとき命題 2 により各 $x\in X$ に対して

$$f(t)(x)=\frac{\varepsilon}{\lambda}+\theta_x(e^{-\lambda t})e^{\lambda t}\quad(t\in I)$$

とかける．ここに θ_x は J 上の微分可能な実数値関数で，次をみたす．

$$0\le-\lambda\theta_x{}'(u)\le2\varepsilon\quad(u\in J)$$

注意 2 により

$$g(x)=\lim_{u\searrow\inf J}\theta_x(u)$$

は well-defined である．このとき g の定義及び命題 3 により

$$\|f(t)-e^{\lambda t}g\|_\infty\le\frac{3\varepsilon}{\lambda}\quad(t\in I)$$

となることに注意する．以下で g は，ここで得られた X 上の関数を表わすことにする．

注意 4 $f\colon I\to C_0(X,\mathbb{R})$ は微分可能で

$$\|f'(t)-\lambda f(t)\|_\infty\le\varepsilon\quad(t\in I)$$

とする．特にこの不等式が $\varepsilon=0$ に対して成立するならば，命題 4 により $f(t)=e^{\lambda t}h$ となる $h\in C_0(X,\mathbb{R})$ が存在する．また命題 2 により各 $t\in I,x\in X$ に対して $f(t)(x)=\theta_x(e^{-\lambda t})e^{\lambda t}$ と表わせるので

$$h(x)=\theta_x(e^{-\lambda t})\quad(x\in X,t\in I).$$

g の定義により，各 $x\in X$ に対し

$$g(x)=\lim_{u\searrow\inf J}\theta_x(u)=h(x)$$

である．すなわち $g\in C_0(X,\mathbb{R})$ である．

定理 1 $f\colon I \to C_0(X,\mathbb{R})$ は微分可能で

$$\|f'(t) - \lambda f(t)\|_\infty \leq \varepsilon \quad (t \in I)$$

をみたすとする．このとき g は X 上で連続である．

証明 注意 4 により $\varepsilon > 0$ の場合を考えれば十分である．このとき背理法により示す．そこで，g はある $x_0 \in X$ で連続でないと仮定し矛盾を導く．つまり $\eta_0 > 0$ が存在して，x_0 の任意の開近傍 V に対して $z \in V$ が存在し，

$$|g(x_0) - g(z)| \geq \eta_0$$

をみたすとする．このとき $g(x_0) = \lim_{u \searrow \inf J} \theta_{x_0}(u)$ より

$$|g(x_0) - \theta_{x_0}(u)| < \frac{\eta_0}{4} \quad (u \in J : u < u_0)$$

をみたす $u_0 \in J$ が存在する．いま $\alpha = \inf J$ とおき，$u_1 < \min\left\{u_0, \alpha + \dfrac{\lambda\eta_0}{8\varepsilon}\right\}$ なる $u_1 \in J$ を考える．このとき

(1) $$|g(x_0) - \theta_{x_0}(u_1)| < \frac{\eta_0}{4}$$

$$u_1 < \alpha + \frac{\lambda\eta_0}{8\varepsilon}$$

である．さて，$x \mapsto \theta_x(u_1)$ は X 上の連続関数なので，

(2) $$|\theta_{x_0}(u_1) - \theta_y(u_1)| < \frac{\eta_0}{4} \quad (y \in W_0)$$

をみたす x_0 の開近傍 W_0 が存在する．このとき背理法の仮定より

(3) $$|g(x_0) - g(z)| \geq \eta_0$$

となる $z \in W_0$ が存在する．また，上と同様にして

(4) $$|g(z) - \theta_z(u_2)| < \frac{\eta_0}{4}$$

をみたす $u_2 \in J : u_2 < u_1$ が存在する．ゆえに (1), (2), (3), (4) より

$$\begin{aligned}
&|\theta_z(u_2) - \theta_z(u_1)| \\
\geq\ & |g(z) - g(x_0)| - |\theta_z(u_2) - g(z)| \\
&\qquad - |g(x_0) - \theta_{x_0}(u_1)| - |\theta_{x_0}(u_1) - \theta_z(u_1)| \\
\geq\ & \eta_0 - \frac{\eta_0}{4} - \frac{\eta_0}{4} - \frac{\eta_0}{4} \\
=\ & \frac{\eta_0}{4},
\end{aligned}$$

すなわち

$$|\theta_z(u_2) - \theta_z(u_1)| \geq \frac{\eta_0}{4} \tag{5}$$

である．ところで平均値の定理より

$$\theta_z{}'(v) = \frac{\theta_z(u_2) - \theta_z(u_1)}{u_2 - u_1}$$

となる $v \in (u_2, u_1)$ が存在するが，不等式 (5) より

$$\theta_z{}'(v) \leq \frac{\eta_0}{4(u_2 - u_1)} < \frac{\eta_0}{4(\alpha - u_1)}$$

でなければならない．u_1 の定め方より

$$\frac{\eta_0}{4(\alpha - u_1)} < -\frac{2\varepsilon}{\lambda}$$

であるから

$$\theta_z{}'(v) < -\frac{2\varepsilon}{\lambda}$$

となるが，これは $-\dfrac{2\varepsilon}{\lambda} \leq \theta_z{}'(v) \leq 0$ に反する．ゆえに背理法により g は X 上連続であることが示された． ■

系 2 $C(X,\mathbb{R})$ をコンパクト Hausdorff 空間 X 上の実数値連続関数全体からなる実 Banach 空間とする．$f\colon I \to C(X,\mathbb{R})$ が微分可能で，

$$\|f'(t) - \lambda f(t)\|_\infty \leq \varepsilon \quad (t \in I)$$

とする．このとき $g \in C(X,\mathbb{R})$ であり

$$\|f(t) - e^{\lambda t} g\|_\infty \leq \frac{3\varepsilon}{\lambda} \quad (t \in I)$$

をみたす．

定理 3 $f\colon I \to C_0(X,\mathbb{R})$ は微分可能で，

$$\|f'(t) - \lambda f(t)\|_\infty \leq \varepsilon \quad (t \in I)$$

をみたせば $g_0 = g + \dfrac{\alpha\varepsilon}{\lambda}$ は無限遠点で 0 になる．ここに $\alpha = \inf J$ である．

証明 注意 4 により $\varepsilon > 0$ のときを考えればよい．このとき背理法により上の命題を示す．すなわち g_0 は無限遠点で 0 にならないと仮定し，矛盾を導く．つまり次をみたす $\delta_0 > 0$ が存在すると仮定する：

X の任意のコンパクト部分集合 K に対して $y \in X \setminus K$ が存在して $|g_0(y)| \geq \delta_0$ となる．

まず$\alpha = \inf J$より

$$u_0 < \alpha + \frac{\lambda\delta_0}{8\varepsilon} \tag{6}$$

をみたす$u_0 \in J$が存在する．このとき$t_0 \in I : u_0 = e^{-\lambda t_0}$なる$t_0$に対して，$f(t_0) \in C_0(X, \mathbb{R})$なので

$$|f(t_0)(x)| < \frac{\delta_0}{4} e^{\lambda t_0} \quad (x \in X \setminus K_0)$$

をみたすXのコンパクト部分集合K_0が存在する．すなわち

$$|\theta_x(u_0) + \frac{\varepsilon}{\lambda} u_0| < \frac{\delta_0}{4} \quad (x \in X \setminus K_0). \tag{7}$$

ここで背理法の仮定より

$$|g_0(y_0)| \geq \delta_0$$

となる$y_0 \in X \setminus K_0$が存在する．つまり

$$|g(y_0) + \frac{\alpha\varepsilon}{\lambda}| \geq \delta_0 \tag{8}$$

である．またgの定義より

$$|g(y_0) - \theta_{y_0}(v_0)| < \frac{\delta_0}{4} \tag{9}$$

となる$v_0 \in J : v_0 < u_0$が存在する．このとき (6), (7), (8), (9) より

$$\begin{aligned} |\theta_{y_0}(v_0) - \theta_{y_0}(u_0)| &\geq |g(y_0) + \frac{\alpha\varepsilon}{\lambda}| - |\theta_{y_0}(v_0) - g(y_0)| \\ &\qquad - |\theta_{y_0}(u_0) + \frac{\varepsilon}{\lambda} u_0| - \frac{\varepsilon}{\lambda}|u_0 - \alpha| \\ &\geq \delta_0 - \frac{\delta_0}{4} - \frac{\delta_0}{4} - \frac{\varepsilon}{\lambda}\frac{\lambda\delta_0}{8\varepsilon} \\ &> \frac{\delta_0}{4} \end{aligned}$$

が成り立つ．さて平均値の定理より

$$\theta_{y_0}{}'(w) = \frac{\theta_{y_0}(v_0) - \theta_{y_0}(u_0)}{v_0 - u_0}$$

となる$w \in (v_0, u_0)$が存在するが，$\theta_{y_0}{}'(u) \leq 0 \quad (u \in J)$に注意すれば，

$$\theta_{y_0}{}'(w) < \frac{\delta_0}{4(v_0 - u_0)} < \frac{\delta_0}{4(\alpha - u_0)}$$

である．ところが$u_0 < \alpha + \frac{\lambda\delta_0}{8\varepsilon}$より

$$\theta_{y_0}{}'(w) < -\frac{2\varepsilon}{\lambda}$$

でなければならない．これは$-\frac{2\varepsilon}{\lambda} \leq \theta_{y_0}{}'(w) \leq 0$に反する．よって背理法により$g_0 = g + \frac{\alpha\varepsilon}{\lambda}$は無限遠点で0になることが示された． ■

定理 4 $f\colon I \to C_0(X,\mathbb{R})$ は微分可能で

$$\|f'(t) - \lambda f(t)\|_\infty \leq \varepsilon \quad (t \in I)$$

をみたすとする．このとき $g_0 = g + \dfrac{\alpha\varepsilon}{\lambda} \in C_0(X,\mathbb{R})$ であり，

$$\|f(t) - e^{\lambda t} g_0\|_\infty \leq \frac{4\varepsilon}{\lambda} \quad (t \in I)$$

が成り立つ．

証明 定理 1 及び定理 3 により $g_0 \in C_0(X,\mathbb{R})$ である．また

$$\begin{aligned} \|f(t) - e^{\lambda t} g_0\|_\infty &\leq \|f(t) - e^{\lambda t} g\|_\infty + \frac{\varepsilon}{\lambda}\alpha e^{\lambda t} \\ &\leq \frac{\varepsilon}{\lambda}\left(3 + \alpha e^{\lambda t}\right) \end{aligned}$$

であるが，

$$\alpha = \inf J \leq e^{-\lambda t} \quad (t \in I)$$

に注意すると

$$\|f(t) - e^{\lambda t} g_0\|_\infty \leq \frac{4\varepsilon}{\lambda} \quad (t \in I)$$

である． ■

系 5 $I = (a, \infty) \quad (-\infty \leq a < \infty)$ とする．$f\colon I \to C_0(X,\mathbb{R})$ は微分可能で，

$$\|f'(t) - \lambda f(t)\|_\infty \leq \varepsilon \quad (t \in I)$$

とする．このとき，$\displaystyle\lim_{t\to\infty} k(t)\, e^{-\lambda t} = 0$ となるある関数 $k\colon I \to \mathbb{R}_+$ に対して，

$$\|f(t) - e^{\lambda t} h\|_\infty \leq \varepsilon k(t) \quad (t \in I)$$

をみたす $h \in C_0(X,\mathbb{R})$ が存在すれば，$g = h$ である．ただし $\mathbb{R}_+ = \{r \in \mathbb{R} : r \geq 0\}$ である．

証明 いま $\inf J = 0$ なので，定理 1, 定理 3 により $g \in C_0(X,\mathbb{R})$ で，

$$\|f(t) - e^{\lambda t} g\|_\infty \leq \frac{3\varepsilon}{\lambda} \quad (t \in I)$$

をみたす．そこで，$h \in C_0(X,\mathbb{R})$ が

$$\|f(t) - e^{\lambda t} h\|_\infty \leq \varepsilon k(t) \quad (t \in I)$$

をみたせば, $g = h$ であることを示す．実際

$$\begin{aligned} \|g - h\|_\infty &\leq \|g - e^{-\lambda t} f(t)\|_\infty + \|e^{-\lambda t} f(t) - h(t)\|_\infty \\ &\leq \left\{\frac{3}{\lambda} + k(t)\right\} \varepsilon\, e^{-\lambda t} \to 0 \quad (t \to \infty) \end{aligned}$$

なので，$g = h$ でなければならない． ■

参考文献

[1] C. Alsina, R. Ger, *On some inequalities and stability results related to the exponential function*, J. of Inequal. & Appl., **2** (1998), 373-380.