数理解析研究所講究録
1136巻 2000年 166-170

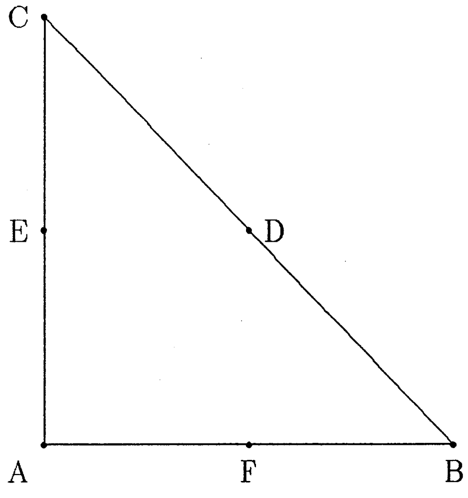
フラクタル図形作製法に対する不動点理論的定式化

新潟県新潟市五十嵐2の町8050

新潟大学理学部数学科　明石重男 (Shigeo Akashi)

1 フラクタル図形の作製例

近年，フラクタル幾何学という新しい数学が誕生し，大変複雑な図形を計算機を用いて描き出している本を見かける．しかし，フラクタル幾何学に登場する様々な図形を作製するプログラムが比較的簡単なものであること，更に図形作製に関して，不動点への収束定理が数学的基礎づけとなっていることは余り知られていない．そこで本節では，Sierpinski のガスケットと呼ばれるフラクタル図形を用いて，フラクタル図形作製原理と不動点定理との関係について説明する．以下の図の様な直角二等辺三角形 ABC を考え，辺 BC の中点を D，辺 CA の中点を E，辺 AB の中点を F とする．



更に，$\triangle ABC$ を定義域とし，$\triangle ABC$ の内部に図形を変換する写像 f_1, f_2, f_3 をそれぞれ，

$$f_1 : \triangle ABC \longmapsto \triangle EDC$$
$$f_2 : \triangle ABC \longmapsto \triangle AFE$$
$$f_3 : \triangle ABC \longmapsto \triangle FBD$$

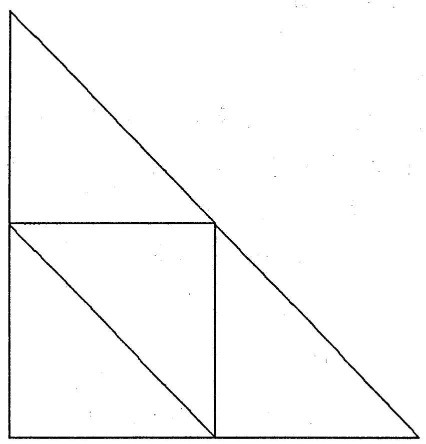
として定義し，上記３写像を用いて，$\triangle ABC$を定義域とし，$\triangle ABC$の内部に図形を変形する写像 fを

$$f : \triangle ABC \longmapsto f_1(\triangle ABC) \cup f_2(\triangle ABC) \cup f_3(\triangle ABC)$$

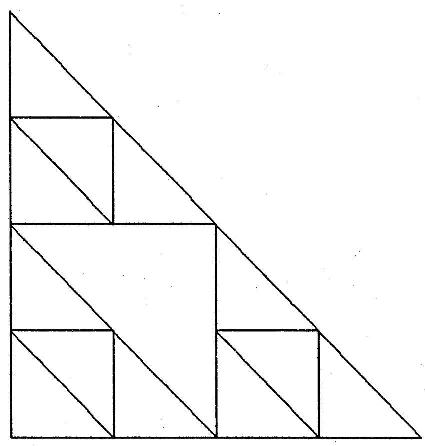
の様に定める．以上の設定のもとに任意の自然数 n に対して，

$$f^{(1)}(\triangle ABC) = f(\triangle ABC)$$
$$f^{(n+1)}(\triangle ABC) = f(f^{(n)}(\triangle ABC))$$

と定義される図形の列 $\{f^{(n)}(\triangle ABC)\}$ を考えたとき，$f^{(n)}(\triangle ABC)$ は n が十分大きくなるに連れて，どのような図形を描くであろうか．例えば $n=1$ の場合，$f^{(1)}(\triangle ABC)$ は，



という図形を与える．$n=2$ の場合は，



という図形を与える．このような反復操作により構成される極限図形は，Sierpinski のガスケットと呼ばれているもので，典型的なフラクタル図形の一例である．ところで，Sierpinski

のガスケットを Sで表したとき，

$$
\begin{aligned}
S &= f_1(S) \cup f_2(S) \cup f_3(S) \\
&= f(S)
\end{aligned}
$$

が成り立っていることが分かる．この式より，Sierpinski のガスケットは平面図形を平面図形に変換する写像の不動点として特徴づけられることが分かる．近年の不動点理論は,「不動点の存在条件」に関する結果に加えて,「不動点への収束状況」を調査した数多くの結果を備えている．これらの結果は，あるフラクタル図形を描く際，その図形がある種の写像の不動点として特徴付けられるならば，計算機を用いて作製することが可能であることを示唆している．

2　フラクタル図形への収束定理

本節では，前節の議論を一般化することにより，フラクタル図形を縮小写像の反復操作により構成される図形列の極限図形として特徴づけることを試みる．(X,d) を完備距離空間とし，$(\mathcal{B}(X),H)$ を X の有界閉部分集合の全体 $\mathcal{B}(X)$ と Hausdorff の距離 H とから構成される距離空間とする．更に f を $(\mathcal{B}(X),H)$ 上で定義され $(\mathcal{B}(X),H)$ に値をとる写像とする．今，n を任意の自然数，A を $\mathcal{B}(X)$ の要素としたとき，f の n 回の合成を次のように定義する：

$$
\begin{aligned}
f^{(1)}(A) &= f(A), \\
f^{(n+1)}(A) &= f^{(n)}(A), \quad n \geq 1
\end{aligned}
$$

上記設定のもとで，次の命題が成立する．

命題．r を 1 より小さい正数とし，f を縮小係数が r である縮小写像とする．このとき，$\{f^{(n)}(A)\}_{n=1}^{\infty}$ は，f に関して不動点となっているある有界閉集合に収束する．即ち，ある有界閉集合 S_A が存在して，次の 2 式が成立する：

$$
\begin{aligned}
H(f(S_A),S_A) &= 0, \\
\lim_{n\to\infty} H(f^{(n)}(A),S_A) &= 0.
\end{aligned}
$$

証明．n を任意の自然数としたとき，

$$
\bigcap_{k\geq n}^{\infty} f^{(k)}(A) \subset \bigcup_{k\geq n}^{\infty} f^{(k)}(A)
$$

が成立する．f が縮小写像であることから，

$$
\begin{aligned}
rH\left(\bigcap_{k\geq n}^{\infty} f^{(k)}(A), \bigcup_{k\geq n}^{\infty} f^{(k)}(A)\right) &\geq H\left(f\left(\bigcap_{k\geq n}^{\infty} f^{(k)}(A)\right), f\left(\bigcup_{k\geq n}^{\infty} f^{(k)}(A)\right)\right) \\
&\geq H\left(\bigcap_{k\geq n+1}^{\infty} f^{(k)}(A), \bigcup_{k\geq n+1}^{\infty} f^{(k)}(A)\right)
\end{aligned}
$$

が得られる．上式は，

$$\lim_{n\to\infty} H\left(\bigcap_{k\geq n}^{\infty} f^{(k)}(A), \bigcup_{k\geq n}^{\infty} f^{(k)}(A)\right) = 0$$

の成立を示している．一方，任意の自然数 n に対して，

$$\begin{aligned}\limsup_{k\to\infty} f^{(k)}(A) &\subset \bigcup_{k\geq n} f^{(k)}(A), \\ \liminf_{k\to\infty} f^{(k)}(A) &\supset \bigcap_{k\geq n} f^{(k)}(A)\end{aligned}$$

が成り立つから，

$$H\left(\liminf_{k\to\infty} f^{(k)}(A), \limsup_{k\to\infty} f^{(k)}(A)\right) = 0$$

が得られる．この式は，

$$\limsup_{k\to\infty} f^{(k)}(A) \subset \overline{\liminf_{k\to\infty} f^{(k)}(A)}$$

の成立を示している．そこで，

$$S_A = \overline{\limsup_{k\to\infty} f^{(k)}(A)}$$

とおくと，求める結果が得られる． □

註 1．一般的に，f が縮小写像であっても，上極限集合 $\limsup_{k\to\infty} f^{(k)}(A)$ と下極限集合 $\limsup_{k\to\infty} f^{(k)}(A)$ が一致するとは限らない．更にこれら両極限集合が，閉集合であるとは限らない．

註 2．$\{f^{(n)}(A)\}_{n=1}^{\infty}$ から任意に部分列 $\{f^{(n_k)}(A)\}_{k=1}^{\infty}$ を選び出したとき，この集合列の構成成分である各集合から 1 点を選び出して作られる点列 $\{x_{n_k}; x_{n_k} \in f^{(n_k)}(A)\}_{k=1}^{\infty}$ が Cauchy 列となっている場合，この収束先は S_A に含まれる．また S_A はこのような収束先の全体と一致する．

註 3．文献 [1] は，集合値解析の基本的教科書である．文献 [2] 及び文献 [3] は，フラクタル図形構成法を画像圧縮に応用した論文である．文献 [4] 及び文献 [5] の結果を利用すると，もとの距離空間に備わる正規構造を利用することにより，有界閉部分集合族から構成される距離空間上の非拡大写像に対する検討が可能となる．文献 [6] は，2 つの集合値写像の間にある種の順序関係を導入し，集合値写像族の分類理論を展開するのに有用である．

参考文献

[1] J.P.Aubin and H.Frankowska, Set-Valued Analysis, Birkhauser, Boston, 1990.

[2] M. F. Barnsley and A. D. Sloan, A better way to compress images, BYTE, January, 1988, 215-223.

[3] M. Frame and L. Erdman, Coloring schemes and the dynamical structure of iterated function systems, Computers in Physics, vol.4(1990), no.5, 500-505.

[4] W. A. Kirk, Fixed Point theorems for nonlinear nonexpansive and generalized contraction mappings, Pacific J. Math., vol.38(1971), 89-94.

[5] T. C. Lim, A fixed point theorem for multivalued nonexpansive mappings in a uniformly convex Banach space, Bull. Amer. Math. Soc., vol.80(1974), 1123-1126.

[6] W. Takahashi, Fixed point, minmax and Hahn-Banach theorems, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, American Mathematical Society, 45(1986), 419-427.