

非線形時系列解析によるカオス性検定

宮野 尚哉 / Takaya MIYANO

弘前大学 理工学部 知能機械システム工学科

〒 039-8561 青森県弘前市文京町 3 番地

E-mail: miyano@cc.hirosaki-u.ac.jp

1 はじめに

実在系で観測される動的挙動には、たいていの場合、不規則に変動する複雑な変動が含まれている。そのような複雑な変動が有限自由度（少数自由度）の決定論的な時間発展方程式によって生み出されることがある。これを（決定論的）カオスという。カオスの挙動を特徴付ける概念は次元とリアプノフ指数である。次元は系の自由度を反映する量であるが、奇妙なことに非整数値を取り得る。リアプノフ指数は、同じダイナミクスに支配され限りなく近いがまったく同一ではない初期状態にある二つの系が、時間の経過に伴ってどの程度異なる状態に発展するかを計る量である。カオス系ではリアプノフ指数は正值をとる。系のダイナミクスを記述する方程式が不明、あるいは、方程式の解の性質が不明であるが、複雑な挙動を示す系が、カオスかどうか判定したいような状況には、現実にはしばしば遭遇する。数値解としての動的挙動、実際の観測値としての動的挙動のいずれも、有限個のデータ値がある一定の時間間隔で並んだ時系列データとして表される。次元とリアプノフ指数を有限長の時系列データから推定する手法が必要となる。

1980 年頃より、観測された時系列データから次元やリアプノフ指数を推定するためのアルゴリズムがいくつか開発されてきた。それらのうち、特に有名で現在では標準的なカオス性検定アルゴリズムとして受け入れられているものは、Grassberger と Procaccia による相関次元推定法 [1]、および、Sano と Sawada によるリアプノフ指数推定法である [2]。これらの手法は、多くの実データに適用され、成果を挙げてきたのであるが、1980 年代末頃より誤った判定結果を導く例が報告されてきた。一つの典型例は有色ノイズと呼ばれる時間相関をもった確率過程的変動である [3]。もう一つは観測ノイズに汚染された変動である [4]。1990 年以降、この問題を解決するための時系列解析手法がいくつか提案されている。特に研究者の注目を集めている手法は、非線形予測を利用した Sugihara と May の方法 [5]、位相空間に埋め込まれた軌道の滑らかさに着目した Kaplan と Glass の方法 [6]、これを改良した Wayland らの方法 [7]、そして、統計検定法を巧みに利用した Theiler らの方法である [8]。本報告は 1990 年以降提案された非線形解析手法の実データへの適用に関する筆者らの研究を述べたものである。

2 時系列解析と統計検定

時系列解析において最も重要な概念は埋め込み定理である [9]-[11]。Q 個の変数で記述される系の挙動を、ある 1 変数に関する時系列データ $\{x(\tau\Delta t)\}_{\tau=1}^N$ (Δt はサンプリング

時間, N はデータ点数)として観測したとする。 D 個の一連の観測値を用いて、以下のよ
うに埋め込みベクトルを構成する。

$$\mathbf{x}(t) = \{x(t), x(t + \Delta t), \dots, x(t + (D - 1)\Delta t)\} \quad (1)$$

系のダイナミックスの性質が埋め込みによって保存されるための十分条件、即ち、元の Q
次元の位相空間における軌道を1変数 D 次元の位相空間における軌道に写す写像が微分
同相となるための十分条件は $D \geq 2Q + 1$ であることが証明されている。

Sugihara-Mayの検定方法の基本的な考え方は以下の通り。ある時刻 t における系の状
態を埋め込みベクトルで表す。この系が時刻 $t + T\Delta t$ において取る値 $x(t + T\Delta t)$ は近似
関数 F により次のように表される。

$$\mathbf{x}(t + T\Delta t) = F[\mathbf{x}(t)] + \epsilon(T\Delta t) \quad (2)$$

$\epsilon(T\Delta t)$ は予測誤差を表す確率変数である。時系列の定常性が保証されているならば、通
常、観測された時系列データを二分し、どちらか一方のデータセットについて F を決定す
る。残りのデータセットについて予測を実行する。適当な尺度で予測誤差を予測時間 $T\Delta t$
の関数として測定する。これを $E(T\Delta t)$ とする。時系列データがカオスを表すならば、

$$E(T\Delta t) = E(\Delta t) \exp[\lambda(T - 1)\Delta t] \quad (3)$$

即ち、

$$\log \frac{E(T\Delta t)}{E(\Delta t)} = \lambda(T - 1)\Delta t \quad (4)$$

が成立する。 λ は最大リアプノフ指数である。時系列データがカオス的なならば、予測誤差
は予測時間の増大に伴い指数関数的に増加する。最大リアプノフ指数は $E(T\Delta t)/E(\Delta t)$
の片対数プロットから推定される。この方法は、利用可能なデータ点数が少ない場合に
も、統計的に信頼性の高い推定結果が得られるのでよく利用される。近似関数 F の構成
方法は、局所近似と大域近似に大別される。よく利用される局所近似手法は、局所線形
回帰と Sugihara-May 近似 [5, 4] である。大域近似には、代数多項式近似、多層パーセプ
トロンや (一般化) 動径基底関数ネットワーク [12, 13] がよく利用されている。これらの
うち、Sugihara-May 近似はモデルパラメータを最適化する必要がないので便利である。
Sugihara-May の検定アルゴリズムは時系列予測を利用するので、その活用には時系列予
測に関する“技術的熟練”がある程度必要となる。次に紹介する Wayland らの検定アルゴ
リズムは、その適用にあたって“技術的熟練”を必要としないので、一層便利である。

Kaplan-Glass の検定方法の改良版である Wayland らの検定アルゴリズムの概要は以下
の通り。ある時刻 t_0 におけるベクトル $\mathbf{x}(t_0)$ について K 個の最近接ベクトルを見つける。
ベクトル間の距離はユークリッド距離で測る。これらのベクトルを $\mathbf{x}(t_i)$ ($i = 0, 1, \dots, K$)
と書く。 $\mathbf{x}(t_i)$ の各々について $T\Delta t$ だけ時間が経過した後のベクトルは $\mathbf{x}(t_i + T\Delta t)$ であ
る。時間の経過に伴う各軌道の変化は

$$\mathbf{v}(t_i) = \mathbf{x}(t_i + T\Delta t) - \mathbf{x}(t_i) \quad (5)$$

により近似される。システムの挙動を $T\Delta t$ の時間スケールで観測した時に時間発展の様子が決定論的に見えると言うことは、軌道群の近接した部分が $T\Delta t$ 後に近接した部分に移されることを意味する。したがって、 $\mathbf{v}(t_i)$ の方向の分散を計算すれば、観測された時間発展がどの程度決定論的に見えるか定量的に評価することができる。方向の分散は次式で与えられる。

$$E_{trans} = \frac{1}{K+1} \sum_{i=0}^K \frac{\|\mathbf{v}(t_i) - \hat{\mathbf{v}}\|}{\|\hat{\mathbf{v}}\|} \quad (6)$$

$$\hat{\mathbf{v}} = \frac{1}{K+1} \sum_{i=0}^K \mathbf{v}(t_i) \quad (7)$$

$\mathbf{x}(t_0)$ の選択に依存する統計誤差を抑えるために、無作為に選択した M 個の $\mathbf{x}(t_0)$ に関する E_{trans} の中間値 (メディアン) を求める操作を Q 回繰り返す、 Q 個の中間値の平均値で E_{trans} を表すことにする。数値時系列に対する数値実験によると [4]、こうして求めた E_{trans} 値は、時系列が白色ノイズ (時間相関のない確率過程) ならば埋め込み次元に依存せず $E_{trans} \sim 1$ 、有色ノイズ (時間相関のある確率過程) のような自己相関をもつノイズの場合には埋め込み次元が増加するにつれて減少するが 0.1 以下になることはない。低次元カオスのような決定論の時系列では、決定論的側面が見えるにつれて $E_{trans} \rightarrow 0$ となる。Wayland らの検定アルゴリズムに限らず言えることであるが、時系列データのある実現値を選択したことによって発生する統計誤差は、上に述べたような操作で評価することは難しい。この問題はサロゲート法により回避できる。

観測された時系列データは時間発展のダイナミクスによる一つの実現結果である。ダイナミクスの性質に関して真偽を確かめたい仮説を設定する。例えば、「不規則な変動は線形自己回帰過程を駆動するランダムノイズに相当し、決定論的カオスとは関係ない」という仮説 (仮説 H とする) を立てる。これを帰無仮説という。仮説 H のような帰無仮説は時系列のカオス性を調べる場合によく採用される。次に、観測された時系列データ (オリジナル時系列) から、帰無仮説のダイナミクスによる別の実現結果としての時系列データを合成する。合成されたデータをサロゲート (surrogate) 時系列と呼ぶ。これは帰無仮説のダイナミクスのもとで再測定されたデータであると考えればよい。ただし、オリジナル時系列とサロゲート時系列は帰無仮説を反映する統計的性質を共有していなければならない。仮説 H の場合、以下のような操作でサロゲート時系列を合成することができる。最初にオリジナル時系列をフーリエ変換する。

$$\tilde{x}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \exp(-i\omega t) dt \quad (8)$$

$|\tilde{x}(\omega)|^2$ はオリジナル時系列のパワースペクトル密度を表す。次に、独立一様乱数 $\delta_\omega \in [0, 2\pi]$ を用意して $\exp(i\delta_\omega)$ を $\tilde{x}(\omega)$ に掛ける。最後に、 $\tilde{x}(\omega) \exp(i\delta_\omega)$ を逆フーリエ変換すると時系列 $\{x'(t)\}$ に戻る。

$$x'(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{x}(\omega) \exp(i\omega t + i\delta_\omega) d\omega \quad (9)$$

オリジナル時系列 $\{x(t)\}$ とサロゲート時系列 $\{x'(t)\}$ とは同じパワースペクトルをもつ。パワースペクトルは自己相関関数をフーリエ変換して得られるから、サロゲート時系列はオリジナル時系列の自己相関を保存するとも言える。ところが、サロゲート時系列を合成する際に独立一様乱数を掛けているので、オリジナル時系列の不規則変動成分における決定論的側面は完全に破壊されている。パワースペクトルのみならず分布関数も保存するサロゲート時系列を合成したければ、次のような操作を実行すればよい。最初にパワースペクトルを保存するサロゲート時系列 $\{x'(t)\}$ を合成する。 $x'(t)$ を最大値から最小値に至るまで順位を付け、順位からなる時系列を $\{R(t)\}$ ($R(t) \in \mathbf{N}$) とする。最後に $\{R(t)\}$ を再現するようにオリジナル時系列 $\{x(t)\}$ の各 x 値を時間軸上で並べ替え、新しいサロゲート時系列 $\{x''(t)\}$ とする。 $\{x''(t)\}$ はオリジナル時系列のパワースペクトルとヒストグラムの両方を保存する。独立一様乱数を十分にたくさん用意すれば、サロゲート時系列を多数合成することができる。S本のサロゲート時系列を合成したとしよう。オリジナル時系列とサロゲート時系列について、予測誤差や E_{trans} 値のような統計量を推定する。オリジナル時系列の統計量を E_o 、サロゲート時系列の統計量を E_s とする。 E_o が E_s からどのくらいかけ離れているかを t 検定と呼ばれる方法に基づき次のように評価する。

$$\xi = \frac{|E_o - \hat{E}_s|}{\sigma_s} \quad (10)$$

\hat{E}_s は E_s の平均値、 σ_s は E_s の標準偏差である。 $\xi > 2$ ならば、正規分布の裾の方にあるという意味で、95%の信頼性においてオリジナル時系列の統計量は仮説 H のもとでは実現しそうにないと解釈できる。推定した統計量が正規分布する確信がなければ次のような検定を実行すればよい。サロゲート時系列を 40 本合成する。 E_o と E_s を小さいものから順に並べる。もし E_o が上位 2 番目以内か、あるいは、下位 2 番目以内であれば、95%の信頼性でオリジナル時系列の統計量は仮説 H のもとでは実現しそうにないと解釈できる。こうして帰無仮説を棄却すべきかどうか判定する。もし棄却できなければ、仮説 H を受容せざるを得ないから、オリジナル時系列のカオス性を主張することは留保しなければならない。サロゲート法は手間のかかる統計検定法であるが、1 本の時系列からダイナミックスのカオス性を検定するための強力な手法である。

3 解析事例

前節で述べた時系列解析手法の適用例として、日本語母音データ [14]–[21] と東証一部平均株価データ [22] に関する解析事例を紹介する。これらの事例では、Sugihara–May の検定アルゴリズムと Wayland らの検定アルゴリズムを始め、その他の興味ある解析手法も利用されているが、本報告では Wayland らの検定アルゴリズムとサロゲート法を用いた解析に焦点を絞って記述する。

3.1 日本語母音

標準的な（母音）音声合成モデルでは、発声システムを調音フィルタ（声道）と音源（声門）の各ユニットに分離し、空気乱流に含まれる特定の周期成分が声道で共振する現象

を、ランダム信号が全極フィルタを駆動するプロセスとして再現する。音源が供給するランダム信号には決定論的側面は認められないという暗黙の前提がある。この前提を帰無仮説として周波数パワースペクトルを保存するサロゲートデータ [23] を 40 本合成し、Wayland らの検定アルゴリズムを適用する [14]-[16]。検定の目的は、母音に含まれている不規則変動成分が決定論的カオスである可能性をどの程度信用することができるか調べることである。

解析対象とする音声データは、ATR 標準データベースに登録されている日本人男性 3 名（データ識別符合：mau, mms, mmy）および日本人女性 2 名（データ識別符合：fsu, fyn）の各母音時系列 /a/, /i/, /u/, /e/, /o/ である。これらの音声データは、無響室内においてサンプリング周波数 = $20kHz$ で録音されているので、非常に音質が良い。データ点数は 2048 点で、変動は定常と見做すことができる。

$\Delta = 10steps$ のもとで、オリジナルデータとサロゲートデータの E_{trans} (メディアン) を $D = 2 - 15$ の範囲で推定した。例として、mau /a/ (男性) および fsu /a/ (女性) に関する計算結果をそれぞれ図 1 および図 2 に示す。 E_{trans} が最小、即ち、時系列の決定論的側面が最もよく見える D において t 検定を行なう。検定結果を表 1 に示す。どの母音時系列についても、帰無仮説は 95% 以上の信頼性で棄却できる。我々が日常耳にする日本語母音には、決定論的カオス変動が含まれている可能性があると言える。

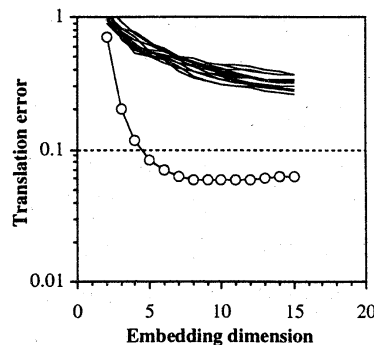


図 1 mau /a/ (男性母音「あ」) に関する Wayland テスト
オリジナル時系列 (o), サロゲート時系列 (—)
 $Q = 20, M = 301, K = 4, T = 5$

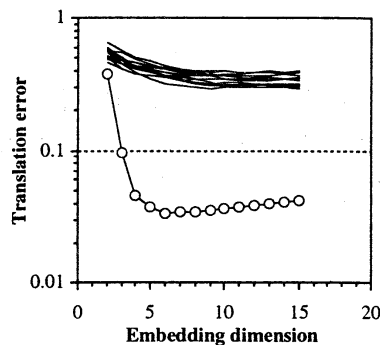


図 2 fsu /a/ (女性母音「あ」) に関する Wayland テスト
オリジナル時系列 (o), サロゲート時系列 (—)
 $Q = 20, M = 301, K = 4, T = 5$

表1 日本語母音の Wayland テストに関する t 検定結果 (ξ 値)

被験者識別符合	/a/	/i/	/u/	/e/	/o/
mau	8.24	9.90	5.79	7.39	8.51
mms	8.28	10.04	8.05	10.91	7.00
mmy	5.84	11.38	7.98	12.02	6.16
fsu	14.08	10.30	3.81	7.56	8.91
fyn	9.22	5.54	7.76	6.45	8.02

3.2 東証一部平均株価

株式市況欄の株価終値をプロットすると不規則な変動が観察される。図3は1996年5月14日から1998年6月16日の期間における東証一部平均株価終値の時系列データである。株価が偶然に決まっているとは思えない。しかし、株式の取り引きには非常に多数の人間の意志が関与しているし、企業の業績にも非常に多くの要因が影響している。計算可能な範囲の自由度における挙動の解析からは株価変動の決定論的側面を捉えることは不可能かも知れない。しかしながら、ある種の相互作用を通じて見かけ上自由度が縮退し、強く相互作用する少数自由度だけが重要な要因として生き残った結果、株価の挙動が少数自由度のカオスとして記述されるという可能性も考えられなくはない。株価変動のカオス性に関する研究例は、例えば、文献[24]にまとめられている。これまでの研究では、カオス性を裏付ける決定的な事実は見られていない。

$\Delta t = 5days$ のもとで平均株価データ ($N = 512$) に時系列解析を適用する。 Δt は平均

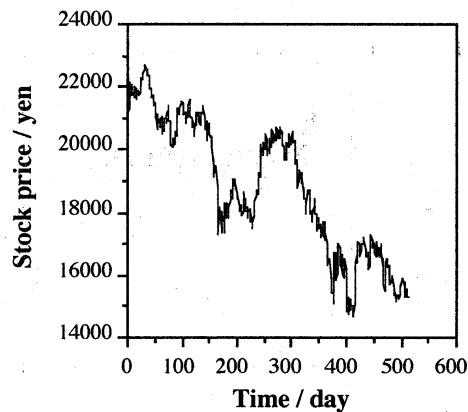


図3 東証一部平均株価時系列
(1996年5月14日-1998年6月16日)

相互情報量の時差に対する依存性から決した[22]。5日という時差は株式市場の取り引き間隔としては1週間に相当する。前節で述べた仮説Hを帰無仮説として採用し、サロゲー

ト時系列を合成する。オリジナル時系列のパワースペクトルを保存するサロゲート時系列 15 本 [23] を作成した。図 4 はサロゲート時系列の一例である。Wayland テスト結果を図 5 に示す。 $D = 10$ における E_{trans} 値に関する t 検定結果は、 $\xi = 0.868$ であった。15 本のサロゲート時系列に対する順位検定でオリジナル時系列の E_{trans} 値は上位および下位から 2 番目以内にはないから、順位検定結果からも t 検定結果からも帰無仮説を棄却できない。平均株価変動の低次元カオス性を主張すべき根拠は、この解析からは発見できないと言わざるを得ない。

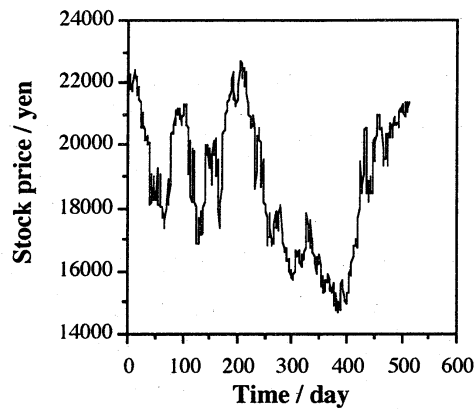


図 4 サロゲート時系列の一例

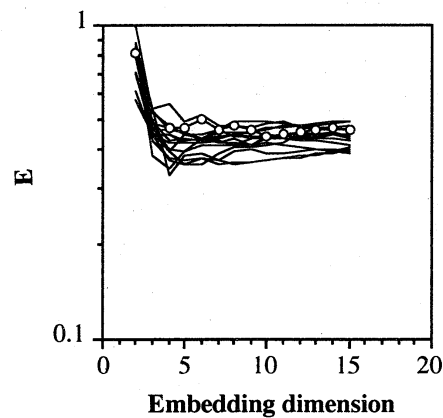


図 5 平均株価に関する Wayland テスト結果
 オリジナル時系列 (o), サロゲート時系列 (—)
 $T = 5, K = 4, M = 51, Q = 20$

謝辞

日本語母音に関する解析は、東京大学大学院工学研究科計数工学専攻 合原一幸教授、室蘭工業大学工学部情報工学科 徳田功助手、東京理科大学基礎工学部電子工学科 池口徹助手、および、住友金属工業株式会社エレクトロニクス技術研究所 永見旭主任研究員との共同研究である。また、平均株価に関する研究においては、室蘭工業大学工学部情報工学科 徳田功助手より technical support をいただき、京都大学経済研究所 西村和雄教授および広島大学経済学部 鈴木喜久講師からは、経済学には不案内である筆者にとってたいへん貴重な御助言をいただいた。ここに述べさせていただいた方々に心より感謝の意を表する。

参考文献

- [1] P. Grassberger and I. Procaccia, "Measuring the strangeness of strange attractor", *Phys. Rev. Lett.*, **50**, pp.346-349 (1983).
- [2] M. Sano and Y. Sawada, "Measurement of the Lyapunov spectrum from a chaotic time series", *Phys. Rev. Lett.*, **55**, pp.1082-1085 (1985).
- [3] A. R. Osborne and A. Provenzale, "Finite correlation dimension for stochastic systems with power-law spectra", *Physica D*, **35**, pp.357-381 (1989).
- [4] T. Miyano, "Time series analysis of complex dynamical behavior contaminated with observational noise", *International Journal Bifurcation and Chaos*, **6**, pp.2031-2045 (1996).
- [5] G. Sugihara and R. M. May, "Nonlinear forecasting as a way of distinguishing chaos from measurement error in time series", *Nature*, **344**, pp.734-741 (1990).
- [6] D. T. Kaplan and L. Glass, "Coarse-grained embeddings of time series: random walks, Gaussian random processes, and deterministic chaos", *Physica D*, **64**, pp.431-454 (1993).
- [7] R. Wayland, D. Bromley, D. Pickett, and A. Passamante, "Recognizing determinism in a time series", *Phys. Rev. Lett.*, **70**, pp.580-582 (1993).
- [8] J. Theiler, S. Eubank, A. Longtin, B. Galdrikian, and J. D. Farmer, "Testing for nonlinearity in time series: the method of surrogate data", *Physica D*, **58**, 77 (1992).
- [9] F. Takens, "Detecting strange attractors in turbulence", *Lect. Notes in Mathematics*, **898**, pp.366-381 (Springer-Verlag, 1981).
- [10] T. Sauer, J. A. Yorke, and M. Casdagli, "Embedology", *J. Stat. Phys.*, **65**, pp.579-616 (1991).
- [11] 池口 徹, 合原一幸, "力学系の埋め込み定理と時系列データからのアトラクタ再構成", *応用数理*, **7**, pp.6-16 (1997).
- [12] F. Girosi, M. Jones, and T. Poggio, "Regularization theory and neural networks architectures", *Neural Computation*, **7**, pp.219-269 (1995).
- [13] M. Casdagli, "Nonlinear prediction of chaotic time series", *Physica D* **35**, pp.335-356 (1989).

- [14] T. Miyano, A. Nagami, I. Tokuda, and K. Aihara, "Detecting nonlinear determinism in voiced sounds of Japanese vowel /a/", *International Journal of Bifurcation and Chaos*, in print.
- [15] A. Nagami, T. Miyano, I. Tokuda, and K. Aihara, "Detecting nonlinear determinism in voiced sounds of Japanese vowels by time series prediction", *Proceedings of 1998 International Symposium on Nonlinear Theory and its Applications*, **2**, pp.575–578, (1998).
- [16] T. Miyano, A. Nagami, I. Tokuda, and K. Aihara, "Nonlinear dynamical analysis of Japanese vowels", *Proceedings of the Third International Symposium on Artificial Life and Robotics*, **1**, pp.350–353. (1998).
- [17] I. Tokuda, T. Miyano, and K. Aihara, "Spike-and-wave surrogate analysis of Japanese vowels", *Proceedings of the International Symposium on Nonlinear Theory and its Applications*, **2**, pp.719–722, (1998).
- [18] I. Tokuda, T. Miyano, and K. Aihara, "Are normal vowels really chaotic?", *Proceedings of The International Symposium on Nonlinear Theory and its Applications*, **2**, pp.1173–1176, (1997).
- [19] T. Miyano, "Are Japanese vowels chaotic?", *Proceedings of the Fourth International Conference on Soft Computing*, **2**, pp.634–637, (1996).
- [20] I. Tokuda, R. Tokunaga, and K. Aihara, "A simple geometrical structure underlying speech signals of the Japanese vowel /a/", *International Journal of Bifurcation and Chaos*, **6**, pp.149–160, (1996).
- [21] 徳田功, "音声とカオス", 数理科学 (1995年3月号), pp.53–59 (1995).
- [22] 宮野尚哉, "株価の予測は可能か", 数理科学 (1999年8月号), pp.66–75 (1999).
- [23] T. Schreiber and A. Schmitz, "Improved surrogate data for nonlinearity," *Phys. Rev. Lett.*, **77**, pp.635–638 (1996).
- [24] 高木康順, 秋山裕, 田中辰雄 (蓑谷千鳳彦, 廣松毅 監修): 「応用計量経済学 I」 第5章 "カオス理論の計量分析への応用", 多賀出版 (1997).