数理解析研究所講究録
1136 巻 2000 年 76-81

鞍点型条件のもとでの発展方程式に対する周期解の存在について

平野載倫 (NORIMICHI HIRANO・横浜国大工)　　塩路直樹 (NAOKI SHIOJI・横浜国大工)

1. 序

我々は発展方程式

$$u'(t)+Au(t)\ni f(t,u(t))+h(t), \quad 0\leq t\leq T \tag{1.1}$$

の T-周期解の存在について議論する. ここで, H は Hilbert 空間で, A は $H\times H$ におけ極大単調作用素, V は H の適当な部分集合である, $f:[0,T]\times V\to H$, $h\in L^{1}(0,T;H)$ である. 周期解の存在について議論するときは, 通常 $A-f$ に対してコアシブ条件を仮定したり, $A-f$ に変分構造を仮定している. ここでは, これらの条件を仮定せずに鞍点型の条件を仮定して周期解の存在を得ることを目標とする. 楕円型の問題に対しては, 同様の仮定のもとで平野 [4] が解の存在を得ている.

結果を述べる際に用いる仮定を列挙する.

(H1) $(V,\|\cdot\|)$ は回帰的な実 Banach 空間で, それは実 Hilbert 空間 $(H,|\cdot|)$ に稠密かつコンパクトに埋め込まれている. $\langle\cdot,\cdot\rangle$ は H の内積を表し, $\|\cdot\|_{*}$ は V の双対空間 V^{*} のノルムを表す.

(H2) $\omega>0$, $c>0$ とする. $L\subset H\times H$ は対称な線形作用素で, $D(L)$ は V の稠密な部分集合であり,

$$\langle Lx,x\rangle\geq\omega\|x\|^{2} \quad かつ \quad \|Lx\|_{*}\leq c\|x\| \qquad \forall x\in D(L) \tag{1.2}$$

を満たす.

(H3) A は $H\times H$ における極大単調作用素で, $D(A)$ は V の稠密な部分集合, $D(A)\cap D(L)\neq\emptyset$,

$$\langle y-q,x-p\rangle\geq\omega\|x-p\|^{2} \quad \forall(x,y),\forall(p,q)\in A, \tag{1.3}$$

$$\|y\|_{*}\leq c(\|x\|+1) \quad \forall(x,y)\in A \tag{1.4}$$

を満たす.

(H4) $T>0$ とする. $f:[0,T]\times V\to H$ は, 写像 $u(\cdot)\mapsto f(\cdot,u(\cdot)):L^{2}(0,T;V)\to L^{1}(0,T;H)$ が連続で $L^{2}(0,T;V)$ における有界集合を $L^{1}(0,T;H)$ における一様可積分集合に写す性質を持つ.

それでは, 我々の結果を述べる.

定理 1. (H1)-(H4) を仮定する. さらに,

$$H_{1}\subset D(L), \qquad LH_{1}\subset H_{1}, \tag{1.5}$$

$$\langle y-f(t,x),x-2Px\rangle\geq\omega\|x\|^{2}-b(t) \quad a.e.\ t\in(0,T),\ \forall(x,y)\in A \tag{1.6}$$

を満たす H の有限次元部分空間 H_{1} 及び $b\in L^{1}(0,T;\mathbb{R}_{+})$ が存在すると仮定する. ただし, P は H から H_{1} への直交射影作用素である. このとき, 任意の $g\in L^{2}(0,T;H)$ に対し, $\int_{0}^{T}|h(t)-g(t)|\,dt\leq\delta$ ならば(1.1) は少なくとも *1* つの T-周期 *integral solution* を持つような正数 δ が存在する.

ここで, Benilan [1] による integral solution の定義を思い出しておく. $g \in L^1(0,T;H)$, $x \in \overline{D(A)}$ とする. $u:[0,T] \to H$ が連続で, $u(0)=x$, $[0,T]$ 上 $u(t) \in \overline{D(A)}$,

$$|u(t)-y|^2 \le |u(s)-y|^2 + 2\int_s^t \langle f(\tau)-z, u(\tau)-y\rangle\, d\tau \quad 0 \le \forall s \le \forall t \le T,\ \forall (y,z) \in A$$

が成り立つならば, u は

$$u(0)=x, \quad u'(t)+Au(t) \ni g(t), \quad 0 \le t \le T$$

の integral solution であるという.
次の結果も得られる.

定理 2. (H1)-(H4) を仮定し, $(0,0) \in A$ かつ $f(\cdot,0) \equiv 0$ を仮定する. さらに,

$$H_2 \subset D(L), \qquad LH_2 \subset H_2,$$

$$\langle y-f(t,x), x-2Qx\rangle \ge \omega\|x\|^2 \quad a.e.\ t \in (0,T),\ \forall (x,y) \in A \ \mathit{with}\ |x| \le \varepsilon$$

を満たす H の有限次元部分空間 H_2 及び正数 ε が存在すると仮定する. ただし, Q は H から H_2 への直交射影作用素である. このとき, $\int_0^T |h(t)|\,dt \le \delta$ ならば(1.1) は少なくとも *1* つの T-周期 *integral solution* を持つような正数 δ が存在する.

定理 1 の帰結として, 楕円型の問題について次の結果を得る.

系. (H1)-(H3) を仮定する. $f:V \to H$ は連続で, 適当な定数 $a \ge 0$, $0<\rho<2$ に対して

$$|f(x)| \le a(\|x\|^{2-\rho}+1) \quad \forall x \in V$$

を満たすとする. さらに, (1.5) かつ

$$\langle y-f(x), x-2Px\rangle \ge \omega\|x\|^2 - b \quad \forall (x,y) \in A$$

を満たす H の有限次元部分空間 H_1 及び正数 b が存在すると仮定する. ただし, P は H から H_1 への直交射影作用素である. このとき, すべての $y \in H$ に対し, $Ax \ni f(x)+y$ は解 $x \in D(A)$ を持つ.

2. 証明の概略

この節では定理 1 に対する証明の概略を与える. 詳しくは [5] を参照のこと.
A は強単調作用素であるから, 各 $g \in L^1(0,T;H)$ に対して

$$\begin{cases} u'(t)+Au(t) \ni g(t), & 0 \le t \le T, \\ u(0)=u(T) \end{cases}$$

を満たす integral solution $u \in C(0,T;H) \cap L^2(0,T;V)$ が一意に存在するので, $Gg=u$ と写像 G を定義する. $h \in L^1(0,T;H)$ とする. u が $u=G(f(\cdot,u)+h)$ を満たすことと (1.1) を満たす周期解であることは同値であることがすぐ分かる. よって, (1.1) の周期解が存在するかという問題は写像 $u \mapsto G(f(\cdot,u)+h)$ の不動点が存在するかという問題になるわけである. ところでこの問題に Schauder の不動点定理を適用しようとするとこの写像に対して不変な有界閉凸集合を見つけなければならないが, それは困難であるので, 写像度の理論を用いる. すなわち, ホモトピー同値な変形により

$$\begin{cases} u'(t)+Au(t) \ni f(t,u(t))+h(t), & 0 \le t \le T, \\ u(0)=u(T) \end{cases}$$

を扱いやすい線形方程式

$$\text{(2.1)} \qquad \begin{cases} u'(t) + Lu(t) = 2LPu(t), & 0 \le t \le T, \\ u(0) = u(T) \end{cases}$$

に変形する. ここで L は (H2) に現れる作用素である. 変形のホモトピーとしては

$$\text{(2.2)} \qquad \begin{cases} u'(t) + \alpha Au(t) + (1-\alpha)Lu(t) \ni \alpha f(t,u(t)) + (1-\alpha)2LPu(t) + \alpha h(t), & 0 \le t \le T, \\ u(0) = u(T) \end{cases}$$

を用いる. ここで一言注意しておく. 上のホモトピーでは $\alpha A + (1-\alpha)L$ を用いているが, これは一般には $H \times H$ において極大単調作用素ではない. この困難を克服するために, (H2), (H3) において $D(L)$, $D(A)$ は V の稠密な部分集合であることを仮定している. その上で $\alpha A + (1-\alpha)L$ と若干異なる作用素を用いる必要があるが, ここでは簡単のためにすべての $0 \le \alpha \le 1$ に対して $\alpha A + (1-\alpha)L$ は極大単調であるとする. 一般の場合にどのように議論するかについては [5] を参照のこと.

さて, $\alpha A + (1-\alpha)L$ も強単調作用素であるから, 各 $(g,\alpha) \in L^1(0,T;H) \times [0,1]$ に対して

$$\begin{cases} u'(t) + \alpha Au(t) + (1-\alpha)Lu(t) \ni g(t), & 0 \le t \le T, \\ u(0) = u(T) \end{cases}$$

の integral solution $u \in C(0,T;H) \cap L^2(0,T;V)$ が一意に定まるので, $G(g,\alpha) = u$ と写像 G を定義する. $h \in L^1(0,T;H)$ に対して $\mathcal{H}_h : L^2(0,T;V) \times [0,1] \to L^2(0,T;V)$ を

$$\mathcal{H}_h(u,\alpha)(t) = G(\alpha f(\cdot,u) + (1-\alpha)2LPu + \alpha h, \alpha)(t), \quad (u,\alpha) \in L^2(0,T;V) \times [0,1]$$

と定める. $u = \mathcal{H}_h(u,\alpha)$ は (2.2) と同値であることを注意しておく.

以下, $L^2(0,T;V)$ における原点が中心で半径 R の開球を B_R で表し, $\deg(\cdot,\cdot,\cdot)$ は Leray-Schauder の写像度を表すとする. Leray-Scahuder の写像度については [2] を参照のこと.

定理 1 は次の命題の直接の帰結である.

命題 1. 定理 *1* の条件を仮定する. このとき, 各 $g \in L^2(0,T;H)$ に対して正数 R_0 が存在し, 各 $R \ge R_0$ に対し $\int_0^T |h(t) - g(t)|\,dt \le \delta$ ならば

$$\deg(I - \mathcal{H}_h(\cdot,1), B_R, 0) = (-1)^{\dim H_1}$$

を満たす正数 δ が存在する.

証明の概略. $\deg(I - \mathcal{H}_h(\cdot,1), B_R, 0) = \deg(I - \mathcal{H}_h(\cdot,0), B_R, 0) = (-1)^{\dim H_1}$ を示せばよい.

(1) $\deg(I - \mathcal{H}_h(\cdot,1), B_R, 0) = \deg(I - \mathcal{H}_h(\cdot,0), B_R, 0)$ について.

$(u,\alpha) \in \partial B_R \times [0,1]$ ならば $\mathcal{H}_h(u,\alpha) \ne u$ を示せばよい. このことを否定する. すなわち, (2.2) を満たす $(u,\alpha) \in \partial B_R \times [0,1]$ が存在すると仮定する. $u_2 = (I-P)u$, $u_1 = Pu$ とおく. これから u についての評価を行うが, u は (2.2) の integral solution でしかないことや A は多価作用素であることから u を強解で近似するなどの手続きを踏まねばならないが, 面倒なので形式計算で済ませることにす

る. また, $|\cdot| \le \|\cdot\|$ が成り立つとしておく. u は (2.2) を満たすので,

$$\begin{aligned}
0 &= \int_0^T \langle u' + \alpha(Au - f(t,u)) + (1-\alpha)(Lu - 2LPu) - \alpha h, u_2 - u_1 \rangle \, dt \\
&= \frac{1}{2}(|u_2(T)|^2 - |u_2(0)|^2) - \frac{1}{2}(|u_1(T)|^2 - |u_1(0)|^2) \\
&\quad + \alpha \int_0^T \langle Au - f(t,u), u_2 - u_1 \rangle \, dt + (1-\alpha) \int_0^T \langle L(u_2 - u_1), u_2 - u_1 \rangle \, dt \\
&\quad - \alpha \int_0^T \langle h - g, u_2 - u_1 \rangle \, dt - \alpha \int_0^T \langle g, u_2 - u_1 \rangle \, dt \\
&\ge \alpha \int_0^T (\omega \|u\|^2 - b(t)) \, dt + (1-\alpha) \int_0^T \frac{\omega}{2} \|u\|^2 \, dt \\
&\quad - M \int_0^T |h - g| \, dt - \frac{1}{\omega} \int_0^T |g|^2 \, dt - \frac{\omega}{4} \int_0^T |u|^2 \, dt \\
&\ge \frac{\omega}{4} R^2 - \int_0^T |b(t)| \, dt - M\delta - \frac{1}{\omega} \int_0^T |g|^2 \, dt > 0
\end{aligned}$$

となるように R_0 及び $R \ge R_0$ に対して δ をうまく選んでおくことができる. ただし,

$$M = \sup |G(\beta f(\cdot, v) + (1-\beta) 2LPv + \beta k, \beta)|$$

で, この上限は $\int_0^T |k(t) - g(t)| \, dt \le \delta$ を満たす $(v, \beta, k) \in B_R \times [0,1] \times L^1(0,T;H)$ におけるものである. よって矛盾を得るから, (1) は示された.

(2) $\deg(I - \mathcal{H}_h(\cdot,0), B_R, 0) = (-1)^{\dim H_1}$ について.

$\mathcal{H}_h(\cdot,0)$ はコンパクトな線形作用素であることを注意しておく. まず, $\mathcal{H}_h(\cdot,0)$ は 1 を固有値としないことを示す. $\mathcal{H}_h(u,0) = u$ とする. u は (2.1) の解であることに注意する. 仮定から L は H_1 不変で対称な線形作用素であるから, (2.1) は H_1 の部分と H_1 の直交補空間 $H_1^\perp$ の部分に分けて考えることができる. $u_2 = (I-P)u$, $u_1 = Pu$ とおく. $H_1^\perp$ の部分では (2.1) は

$$\begin{cases} u_2'(t) + Lu_2(t) = 0, & 0 \le t \le T, \\ u_2(0) = u_2(T) \end{cases}$$

となるから, $u_2 \equiv 0$ である. $n = \dim H_1$ とすると, 適当な基底及び正数 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ を用いて, H_1 の部分では (2.1) は

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} u_1^1 \\ \vdots \\ u_1^n \end{pmatrix}' + \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1^1 \\ \vdots \\ u_1^n \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1^1 \\ \vdots \\ u_1^n \end{pmatrix}, \quad 0 \le t \le T, \\ u_1(0) = u_1(T) \end{cases}$$

と表せる. よって $u_1 \equiv 0$ が得られ, $u \equiv 0$ がわかるから, $\mathcal{H}_h(\cdot,0)$ は 1 を固有値としないことが示された. 同様にして, 1 より大きい固有値は 2 しかないこと及び

$$\begin{aligned}
&\{u \in L^2(0,T;V) : (2 - \mathcal{H}_h(\cdot,0))^2 u = 0\} \\
&= \{u \in L^2(0,T;V) : (2 - \mathcal{H}_h(\cdot,0)) u = 0\} \\
&= \{u \in L^2(0,T;V) : u(t) \in H_1, u \text{ は定数関数 }\}
\end{aligned}$$

がわかる. よって, 固有値 2 に対する一般固有空間の次元は $\dim H_1$ であるから, 写像度の理論により, $\deg(I - \mathcal{H}_h(\cdot,0), B_R, 0) = (-1)^{\dim H_1}$ が示された. □

同様にして次の命題を得る. 定理 2 はこの命題の直接の帰結である.

命題 2. 定理 *2* の条件を仮定する. 正数 r_0 が存在し, 各 $r \in (0, r_0]$ に対し $\int_0^T |h(t)|\,dt \le \rho$ ならば

$$\deg(I - \mathcal{K}_h(\cdot, 1), B_r, 0) = (-1)^{\dim H_2}$$

を満たす正数 ρ が存在する. ただし, $\mathcal{K}_h : L^2(0,T;V) \times [0,1] \to L^2(0,T;V)$ は

$$\mathcal{K}_h(u,\alpha)(t) = G(\alpha f(\cdot,u) + (1-\alpha)2LQu + \alpha h, \alpha)(t), \quad (u,\alpha) \in L^2(0,T;V) \times [0,1]$$

と定義される.

3. 応用

Ω を滑らかな境界 $\partial\Omega$ を持つ $\mathbb{R}^N$ における有界領域とする. 我々は次の微分方程式を考える.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \displaystyle\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i} a_i\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) + g(t,x,u,\nabla u) + h(t,x) & \text{in } [0,T] \times \Omega, \\ u(t,x) = 0 & \text{on } [0,T] \times \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.1}$$

ただし, $a_i \in C^1(\mathbb{R})$ は $a_i(0) = 0$ 及び $0 < \inf_s a_i'(s) \le \sup_s a_i'(s) < \infty$ を満たし, $h : [0,T] \times \Omega \to \mathbb{R}$ は $\int_0^T (\int_\Omega |h(t,x)|^2\,dx)^{1/2}\,dt < \infty$ を満たす可測関数で, $g : [0,T] \times \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ はほとんどすべての $(t,x) \in [0,T] \times \Omega$ に対して $g(t,x,\cdot,\cdot)$ が連続ですべての $(u,v) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$ に対して $g(\cdot,\cdot,u,v)$ は可測であるとする.

Dirichlet 境界条件のもとでの $-\Delta$ の固有値を $\lambda_1 < \lambda_2 \le \lambda_3 \le \cdots$ とする.

このとき, 次の結果を得る.

定理 3. ε を正数とし, 次を仮定する.

$$\begin{aligned} &1 - \varepsilon < a_i'(s) < 1 + \varepsilon, \quad s \in \mathbb{R}, i = 1, \ldots, N, \\ &g(\cdot,\cdot,0,\cdot) \equiv 0, \\ &\sup\left\{ \left| \frac{g(t,x,u,v)}{u} \right| : (t,x,u,v) \in [0,T] \times \Omega \times (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}^N \right\} < \infty. \end{aligned}$$

さらに, 次を満たし $k - l$ が奇数である自然数 k, l が存在すると仮定する.

$$\lambda_k < \lim_{|u|\to\infty} \frac{g(t,x,u,v)}{u} < (1-2\varepsilon)\lambda_{k+1}, \quad (t,x,v) \in [0,T] \times \Omega \times \mathbb{R}^N \text{ について一様},$$

$$\lambda_l < \lim_{|u|\to 0} \frac{g(t,x,u,v)}{u} < (1-2\varepsilon)\lambda_{l+1}, \quad (t,x,v) \in [0,T] \times \Omega \times \mathbb{R}^N \text{ について一様}.$$

このとき, もし $\int_0^T (\int_\Omega |h(x,t)|^2\,dx)^{1/2}\,dt$ が十分小さければ, (3.1) に対して少なくとも 2 つの T-周期解が存在する.

証明. $(L^2(\Omega), |\cdot|)$ の作用素 A, L および $f : [0,T] \times H_0^1(\Omega) \to L^2(\Omega)$ を次のように定める.

$$\begin{cases} Au = -\displaystyle\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i} a_i\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right), & u \in D(A) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega); \\ Lu = -\Delta u, & u \in D(L) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega); \\ f(t,u)(x) = g(t,x,u(x),\nabla u(x)), & (t,u) \in [0,T] \times H_0^1(\Omega). \end{cases}$$

$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \cdots$ に対応する L の固有ベクトルをそれぞれ $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \cdots$ とする. $H_1 = \mathrm{span}\{\varphi_1, \ldots, \varphi_k\}$ とし, P を $L^2(\Omega)$ から H_1 への直交射影とする. $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ とし, $u_2 = u - Pu$, $u_1 = Pu$ とすると,

$$\begin{aligned}\langle Au, u_2 - u_1 \rangle &\geq (1-\varepsilon)|\nabla u_2|^2 - (1+\varepsilon)|\nabla u_1|^2 \\ &= \varepsilon|\nabla u|^2 + (1-2\varepsilon)|\nabla u_2|^2 - |\nabla u_1|^2 \\ &\geq \varepsilon|\nabla u|^2 + (1-2\varepsilon)\lambda_{k+1}|u_2|^2 - \lambda_k|u_1|^2\end{aligned}$$

及び

$$-\int_\Omega g(t,x,u,\nabla u)(u_2 - u_1)\,dx \geq \lambda_k|u_1|^2 - (1-2\varepsilon)\lambda_{k+1}|u_2|^2 - C$$

を得る. ただし, C は u に依存しない定数である. よって,

$$\langle Au - f(t,u), u_2 - u_1 \rangle \geq \varepsilon|\nabla u|^2 - C$$

となる. $H_2 = \mathrm{span}\{\varphi_1, \ldots, \varphi_l\}$ とし, Q を $L^2(\Omega)$ から H_2 への直交射影とする. $v \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ とし, $v_2 = v - Qv$, $v_1 = Qv$ とすると,

$$\langle Av, v_2 - v_1 \rangle \geq \varepsilon|\nabla v|^2 + (1-2\varepsilon)\lambda_{l+1}|v_2|^2 - \lambda_l|v_1|^2$$

を得る. さらに, もし $|v|$ が十分に小さいなら [3, Lemma 4] の証明と同様にして

$$\langle -f(t,v), v_2 - v_1 \rangle \geq \varepsilon|\nabla v|^2 + \lambda_l|v_1|^2 - (1-2\varepsilon)\lambda_l|v_2|^2$$

を得る. よって, 命題 1, 2 から結論を得る. □

参考文献

[1] P. Benilan, *Solutions integrales d'équations d'évolution dan un espace de Banach,* C. R. Acad. Sci. Paris, **274** (1972), 47–50.

[2] K. Deimling, *Nonlinear functional analysis,* Springer-Verlag, Berlin, 1985.

[3] N. Hirano, *Existence of nontrivial solutions of semilinear elliptic equations,* Nonlinear Anal., **13** (1989), 695–705.

[4] N. Hirano, *On surjectivity of perturbed nonlinear m-accretive operators,* in Theory and applications of nonlinear operators of accretive and monotone type, A. G. Kartsatos, ed., Marcel Dekker, New York, 1996, 131–140.

[5] N. Hirano and N. Shioji, *Existence of periodic solutions under saddle point type conditions,* preprint.

(Norimichi Hirano) Department of Mathematics, Faculty of Engineering, Yokohama National University, Tokiwadai, Hodogaya-ku, Yokohama 240-8501, Japan

E-mail address: `hirano@math.sci.ynu.ac.jp`

(Naoki Shioji) Department of Mathematics, Faculty of Engineering, Yokohama National University, Tokiwadai, Hodogaya-ku, Yokohama 240-8501, Japan

E-mail address: `shioji@math.sci.ynu.ac.jp`