

## Ring homomorphisms on commutative Banach algebras I

新潟大学大学院 自然科学研究科 羽鳥 理 (Osamu Hatori)

## 1 複素数体上の自己同型写像

Segre [6] は複素数体  $\mathbb{C}$  上の自己同型写像で自明でないものの存在を問題にした (cf. [3]). 自己同型写像  $\rho$  は 1 を保存するので有理数体  $\mathbb{Q}$  上線形であり,  $\rho(i) = i$  または  $\rho(i) = -i$  をみताす. しかし  $\rho$  が自明になる, 即ち  $\rho(z) = z$  か  $\rho(z) = \bar{z}$  が任意の複素数  $z$  に対して成り立つとは言えないことが現在ではよく知られている. Segre は, 複素 1 次元集合上の 4 点の複比とその  $\mathbb{C}^2$  から  $\mathbb{C}^2$  への共線写像による像の複比は一致するか互いに他の複素共役であるかを問題にした.  $\rho$  が  $\mathbb{C}$  上の自己同型写像なら  $T(z_1, z_2) = (\rho(z_1), \rho(z_2))$  と定めた  $T$  は共線写像で, 始めの 4 点の複比が  $c$  なら  $T$  で射したもののそれは  $\rho(c)$  となる. したがって, 自明でない自己同型写像  $\rho$  を考えたとき Segre の問題は否定的である. (cf. [3]) 実際 Lebesgue [4] は  $\mathbb{C}$  から  $\mathbb{C}$  への零でない準同型写像の存在を示した (上への写像であることには言及してない). その後, Steinitz [8] の結果を用いれば, 非自明な自己同型写像が存在することの証明ができることが知られるようになったし, Kestelman [3] は代数学の定理を用いないが Zorn の補題, 整列可能性定理, 超限帰納法等を用いた存在証明を与えた. 実際その方法から非自明なものはたくさんある事が分かる. 例えば  $\rho(a + b\sqrt{2}) = a - b\sqrt{2}$  なる  $\{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Q} + i\mathbb{Q}\}$  上の自己同型写像  $\rho$  等は,  $\mathbb{C}$  上の非自明な自己同型写像に拡張できることがわかる. 非自明な自己同型写像の振る舞いは大変複雑である. たとえば, 実数全体  $\mathbb{R}$  に対して  $\rho(\mathbb{R})$  は複素平面で稠密である. (cf. [3])

## 2 Banach 環上の環準同型写像

$\mathbb{C}$  を複素数体として見たときの自己同型写像は、 $\mathbb{C}$  を Banach 環としてみると、いわゆる環準同型写像である。1次元 Banach 環  $\mathbb{C}$  上の環準同型写像で線形でも反線形でもないものがたくさん存在するのに対して、無限次元 Banach 環上のそれは線形か反線形に限られる場合がある。そこで、Banach 環、特に可換 Banach 環上の環準同型写像について考察する。

**定義 2.1**  $A$  と  $B$  を Banach 環とする。写像  $\rho: A \rightarrow B$  が和と積を保存する、つまり

$$(i) \rho(f + g) = \rho(f) + \rho(g), \quad f, g \in A$$

$$(ii) \rho(fg) = \rho(f)\rho(g), \quad f, g \in A$$

を満たすとき、 $\rho$  を環準同型写像という。

体  $\mathbb{C}$  上の自己同型写像は Banach 環  $\mathbb{C}$  上の環準同型写像である。 $\mathbb{C}$  上線形な環準同型写像が通常の（多元環上の）準同型写像である。Lebesgue の結果は  $\mathbb{C}$  上には  $\rho(z) = z$  でもないし  $\rho(z) = \bar{z}$  でもない環準同型写像の存在を示しているので、有限次元可換 Banach 環上には環準同型写像で線形でも反線形 (anti-linear) でもないものが存在することがわかる。一方、無限次元の場合には様子が異なることが古くから知られていた。

**定理 2.1 ([1])**  $A$  と  $B$  をそれぞれある無限次元 Banach 空間上の有界線形作用素全体からなる Banach 環とする。このとき、 $A$  から  $B$  の上への 1対1の環準同型写像は  $\mathbb{C}$  上線形かまたは反線形である。

無限次元でのこのような現象の一因はスペクトルが大きな集合になる元の存在にある。Kaplansky [2] は、上の Arnold の定理を次のように一般化した。

定理 2.2 ([2])  $A$  と  $B$  を半単純な Banach 環とする.  $\rho$  を  $A$  から  $B$  の上への 1対1の環準同型写像とする.  $A$  は3つの閉イデアル  $A_d, A_1, A_{-1}$  の直和になり,  $A_d$  は有限次元,  $A_1$  上で  $\rho$  は線形,  $A_{-1}$  上で  $\rho$  は反線形になる.

$A, B$  が可換  $C^*$ 環であれば, 様子をもっとはつきりする.

定理 2.3  $X$  と  $Y$  をコンパクト Hausdorff 空間とする.  $\rho$  を  $C(X)$  から  $C(Y)$  の上への 1対1の環準同型写像とする. このとき,  $Y$  の互いに疎な閉集合  $Y_d = \{y_1, \dots, y_n\}$  (空集合または有限集合),  $Y_1, Y_{-1}$  で  $Y = Y_d \cup Y_1 \cup Y_{-1}$  なるものが存在し, さらに  $Y$  から  $X$  の上への同相写像  $\Phi$  と  $Y_d$  と同じ個数の  $\mathbb{C}$  から  $\mathbb{C}$  への非自明な環準同型写像  $\tau_1, \dots, \tau_n$  が存在して,

$$\rho(f)(y) = \begin{cases} \tau_j(f \circ \Phi(y)), & y = y_j \in Y_d \\ f \circ \Phi(y), & y \in Y_1 \\ \overline{f \circ \Phi(y)}, & y \in Y_{-1} \end{cases}$$

が任意の  $f \in C(X)$  に対して成立する.

証明. Kaplansky の定理を用いない, 直接的な証明を与える. 最初に  $\Phi$  を定める. 各  $y \in Y$  に対して

$$\rho_y : C(X) \rightarrow \mathbb{C}$$

を  $\rho_y(f) = \rho(f)(y)$  により定める.  $\rho_y$  は  $C(X)$  から  $\mathbb{C}$  への環準同型写像になるので  $\ker \rho_y$  は  $C(X)$  の多元環としてのイデアルになる.  $\rho_y$  は上への写像なので  $\ker \rho_y$  は極大イデアルになるが,  $C(X)$  の極大イデアル空間は  $X$  なので,  $X$  の一意な点に対応する. この対応を  $\Phi$  とする. 次に,  $\rho_y|_{\mathbb{C}}$  は  $\mathbb{C}$  上の環準同型写像を定めるので

$$Y_d = \{y \in Y : \rho_y|_{\mathbb{C}} \text{ は非自明} \},$$

$$Y_1 = \{y \in Y : \rho_y(z) = z \quad \forall z \in \mathbb{C}\},$$

$$Y_{-1} = \{y \in Y : \rho_y(z) = \bar{z} \quad \forall z \in \mathbb{C}\}$$

が定義できて  $Y = Y_d \cup Y_1 \cup Y_{-1}$  は互いに疎な合併集合である. 任意の  $f \in C(X)$  と任意の  $y \in Y$  に対して

$$f - f \circ \Phi(y) \in \ker \rho_y$$

なので

$$\rho(f)(y) = \rho_y(f) = \rho_y(f \circ \Phi(y))$$

となる. 一方  $Y_d, Y_1, Y_{-1}$  の定義より

$$\rho_y(f \circ \Phi(y)) = \begin{cases} \rho_y(f \circ \Phi(y)), & y \in Y_d \\ f \circ \Phi(y), & y \in Y_1 \\ \overline{f \circ \Phi(y)}, & y \in Y_{-1} \end{cases}$$

なので  $\rho(f)$  の表現が得られた.  $\rho$  が上への写像なので  $\Phi$  が 1対1 の写像であることが分かるが, このことから  $Y_d$  は有限集合であること, さらに,  $Y_d$  の各点が孤立点であることもわかる. また,

$$Y_1 = \{y \in Y : \rho_y(i) = i\} \setminus Y_d,$$

$$Y_{-1} = \{y \in Y : \rho_y(i) = -i\} \setminus Y_d$$

なので,  $Y_1$  と  $Y_{-1}$  がそれぞれ閉集合であることがわかる. このことより,  $\Phi$  は  $Y_1$  と  $Y_{-1}$  で連続, したがって  $Y$  で連続であることがわかり,  $\rho$  が 1対1 なので,  $X$  の上への写像であることも分かる.

**系 2.4**  $X$  と  $Y$  はコンパクト Hausdorff 空間とし, さらに  $Y$  が連結で 1点集合ではないとする. このとき  $C(X)$  から  $C(Y)$  の上への 1対1 の環準同型写像は線形か反線形のどちらかである.

環準同型写像が上への写像でないときはどのようになっているであろうか。可換 Banach 環上の準同型写像の場合は、よく知られているように、極大イデアル空間上の連続写像が引き起こされてその合成作用素として表現される。このことから可換 Banach 環上の (1 対 1 や上への写像であるとは限らない) 環準同型写像でも Theorem 2.3 に類似した表現定理が得られることも期待できる。しかし, Šemrl [7] の例のように, あるコンパクト Hausdorff 空間  $X$  上の  $C(X)$  から  $\mathbb{C}$  への環準同型写像でその kernel が極大イデアルではないものがあり, この報告集の [5] の補題 4 からこのような環準同型写像は, 合成作用素と  $\mathbb{C}$  上の環準同型写像の合成で表せないことになる。このようではあるが, 期待されたような表現定理が成り立つこともまれではないことが [5] で示されている。次の定理はさらなる一般化の可能性を示唆している。

**定理 2.5**  $A$  を単位的可換 Banach 環とし,  $P(D)$  を円板環とする。  $\rho: A \rightarrow P(D)$  を環準同型写像とし, その値域は非定数関数を含むとする。このとき  $\rho$  は線形かまたは反線形である。したがって, 単位閉円板  $D$  から  $A$  の極大イデアル空間への連続写像  $\Phi$  が存在し,  $\rho$  が線形なら  $\rho(f) = f \circ \Phi$  が,  $\rho$  が反線形なら  $\rho(f) = \overline{f \circ \Phi}$  が任意の  $f \in A$  に対して成立する。

**証明.** 前半が証明できれば後半は Theorem 2.3 の証明と同様にできるので前半を証明する。

単純な計算より  $\rho(i) = i$  または  $\rho(i) = -i$  であるが,  $\rho(i) = i$  の場合は  $\rho$  は  $\mathbb{C}$  上線形であることを示す。  $\rho(i) = -i$  の場合は, 反線形になることが同様に示される。まず,  $\rho(\mathbb{C}) \subset \mathbb{C}$  を示す。そこで, そうでないと仮定する:  $\rho(c)$  が非定数関数である  $c \in \mathbb{C}$  が存在すると仮定する。  $\mathbb{C}$  上の環準同型写像は有理数を固定するので, この  $c$  は実部または虚部が無理数で

ある.  $\rho(c)$  は  $D$  の内部で正則なので

$$G \subset \rho(c)(D)$$

なる空でない開集合  $G$  が存在する. そこで  $G$  に含まれ実部虚部ともに有理数であるような複素数  $r$  を一つとると,

$$r - \rho(c) \notin P(D)^{-1}$$

なので

$$r - c \notin A^{-1}$$

となる.  $r, c$  ともに定数なので  $r = c$  となるが, これは  $c$  の実部または虚部が無理数であるから矛盾を示している. 以上より,  $\rho(\mathbb{C}) \subset \mathbb{C}$  がわかった. 次に  $\rho$  が  $C$  上で連続であることを示せばよい. 特に,  $\rho(z+w) = \rho(z) + \rho(w)$  が任意の複素数  $z$  と  $w$  に対して成り立つことから,  $0$  で連続であることを言えば十分である.  $\rho$  が  $0$  で連続ではないと仮定する. す

ると,

$$w_n \rightarrow 0 \text{ かつ } \rho(w_n) \not\rightarrow 0$$

なる数列  $\{w_n\}$  が取れるが,  $|w_n| < 1/n^2$  かつ  $|\rho(w_n)| > 1$  としてよいので  $nw_n$  をあらためて  $w_n$  とすれば, (自然数  $n$  について  $\rho(nw) = \rho(n)\rho(w) = n\rho(w)$  だから)

$$w_n \rightarrow 0 \text{ かつ } |\rho(w_n)| \rightarrow \infty$$

としてよい. Theorem の仮定より,  $\rho(f)$  が定数関数ではない  $f \in A$  が存在する. したがって,  $\rho(f)(D)$  は空でない開集合  $G$  を含む. その中から実部虚部ともに有理数であるような

複素数  $r$  を一つとり,

$$z_n = r + \frac{1}{\rho(w_n)}$$

とおくと, 十分大きなすべての  $n$  に対して  $z_n \in G$  となる. よって,

$$z_n - \rho(f) \notin P(D)^{-1}$$

となるので

$$\rho^{-1}(z_n) - f \notin A^{-1}$$

となる. つまり, 十分大きな  $n$  に対する  $\rho^{-1}(z_n)$  はすべて  $f$  のスペクトルに含まれる. 一方

$$\rho^{-1}(z_n) = r + \frac{1}{w_n}$$

となるので

$$|\rho^{-1}(z_n)| \rightarrow \infty$$

となる. これはスペクトルがコンパクトであることに矛盾する. 以上より  $\rho$  の  $\mathbb{C}$  での連続性が分かった.  $\rho$  は有理数を固定し  $\rho(i) = i$  であったので,  $\rho(z) = z$  がすべての複素数に対して成立する. よって  $\rho$  は  $A$  上の写像として  $\mathbb{C}$  上線形になる.

値域が  $\mathbb{C}$  であるような環準同型写像についてはよく分からないことが多い. その kernel が極大イデアルである場合はこの報告集の [5] の補題 4 のように構造が分かる. kernel が極大イデアルでないような環準同型写像については, その存在は知られてはいる [7] が, よく分かっているとは言えない状況である.

## 参考文献

- [1] Bradford H. Arnold, *Rings of operators on vector spaces*, Ann. of Math., **45**(1944), 24-49
- [2] Irving Kaplansky, *Ring isomorphisms of Banach algebras*, Canadian J. Math., **6**(1954), 374-381
- [3] H. Kestelman, *Automorphisms of the field of complex numbers*, Proc London Math. Soc., **53**(1951), 1-12
- [4] M. Henri Lebesgue, *Sur les transformations ponctuelles, transformant les plans en plans, qu'on peut définir par des procédés analytiques*, Atti della R. Acc. delle Scienze di Torino, **42**(1907), 532-539
- [5] 三浦 毅, *Ring homomorphisms on commutative Banach Algebra II*, 数理解析研究所講究録 (これが出ているものと同じ)
- [6] Saggio di Corrado Segre *Un nuovo campo di ricerche geometriche* Atti della R. Acc. delle Scienze di Torino, **25**(1889), 276-301
- [7] P. Šemrl, *Non linear perturbations of homomorphisms on  $C(X)$* , Quart. Journal Math. Oxford Ser. (2) **50**(1999), 87-109
- [8] E. Steinitz, *Algebraische Theorie der Körper*, Journal für Math., **137**(1910)