

Characterizations of Bloch space and Besov spaces by oscillations  
(振動による Bloch 空間と Besov 空間の特徴づけ)

北海道大学・理学研究科

米田 力生 (Rikio Yoneda)

複素平面上の開単位円板を  $D$  とし、 $D$  上の正規化された 2 次元 Lebesgue 測度を  $dA(z) = r dr d\theta / \pi$  とする。そして  $d\lambda(z) = \frac{dA(z)}{(1-|z|^2)^2}$  と表示する。また  $\beta(z, w) := \frac{1}{2} \log \frac{1+|\varphi_z(w)|}{1-|\varphi_z(w)|}$ ,  $\varphi_z(w) = \frac{z-w}{1-\bar{z}w}$  とする。このとき  $0 < r < \infty$  に対して、 $D(z, r) = \{w \in D; \beta(z, w) < r\}$  は Bergman disc と呼ばれ、 $|D(z, r)|$  は  $D(z, r)$  の正規化された面積を表示するものとする。ある  $D$  上の関数  $f$  に対して、 $\sup_{w \in D(z, r)} |f(z) - f(w)|$  を  $f$  の振動、 $\frac{1}{|D(z, r)|} \int_{D(z, r)} |f(z) - f(w)| dA(w)$  や  $\frac{1}{|D(z, r)|} \int_{D(z, r)} |\hat{f}_r(z) - f(w)| dA(w)$  を  $f$  の平均振動と呼ぶことにする。ここで  $\hat{f}_r(z) := \frac{1}{|D(z, r)|} \int_{D(z, r)} f(w) dA(w)$  とする。

$1 < p < +\infty$  に対して、Besov 空間  $B_p$  は  $\|f\|_{B_p} := \left( \int_D (1-|z|^2)^p |f'(z)|^p d\lambda(z) \right)^{\frac{1}{p}} < +\infty$  を満たす  $D$  上の解析関数全体からなる空間である。特に  $p = 2$  のときは  $B_2$  は Dirichlet 空間となっている。  $p = 1$  に対して、Besov 空間  $B_1$  は  $f(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \varphi_{\lambda_n}(z)$ ,  $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n| < +\infty$  ( $\lambda_n \in D$ ) を満たす  $D$  上の解析関数全体からなる空間であるとする。Bloch 空間は  $\|f\|_B := \sup_{z \in D} (1-|z|^2) |f'(z)| < +\infty$  を満たす  $D$  上の解析関数全体からなる空間であり、 $B$  と表示される。ここで表記法の都合上、 $B_\infty = B$  と書くことにする。

$D$  上の解析関数がいつ Bloch 空間、Besov 空間に属するのかを振動や平均振動という概念を用いて特徴づけることである。K. Zhu は次のような結果を証明した： $r \in (0, \infty)$  とする。そのとき  $1 < p \leq \infty$ 、 $D$  上の解析関数  $f(z)$  に対して次の (1) ~ (4) は同値である：

$$(1) f \in B_p; (2) \sup_{w \in D(z, r)} |f(z) - f(w)| \in L^p(D, d\lambda); (3) \frac{1}{|D(z, r)|} \int_{D(z, r)} |f(z) - f(w)| dA(w) \in L^p(D, d\lambda); (4) \frac{1}{|D(z, r)|} \int_{D(z, r)} |\hat{f}_r(z) - f(w)| dA(w) \in L^p(D, d\lambda).$$

しかし、この結果は  $p = 1$  の場合に対しては (2) ~ (4) を満たす  $D$  上の解析関数は定数しかないため適用出来ない。そこで、「 $D$  上の解析関数  $f$  に対して、 $n \geq 2$  のとき、すべての  $1 \leq p \leq \infty$  に関して、 $f(z)$  が空間  $B_p$  に属する必要十分条件は  $(1-|z|^2)^n f^{(n)}(z) \in L^p(D, d\lambda)$  である」(定理 A) という結果を利用して、我々は  $p = 1$  の場合にも適用出来る次のような定理を導き出した： $r \in (0, \infty)$  とし、 $n = \alpha + \beta$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$  となる整数  $n \geq 0$  を固定する。そのとき、 $D$  上の解析関数  $f(z)$  に対して次の (1) ~ (4) は同値である：

$$(1) f \in B_p; (2) \sup_{w \in D(z, r)} (1-|z|^2)^\alpha (1-|w|^2)^\beta |f^{(n)}(z) - f^{(n)}(w)| \in L^p(D, d\lambda); (3) \frac{1}{|D(z, r)|} \int_{D(z, r)} (1-|z|^2)^\alpha (1-|w|^2)^\beta |f^{(n)}(z) - f^{(n)}(w)| dA(w) \in L^p(D, d\lambda);$$

$$(4) \quad \frac{1}{|D(z, r)|} \int_{D(z, r)} (1 - |z|^2)^\alpha (1 - |w|^2)^\beta |\widehat{f^{(n)}}_r(z) - f^{(n)}(w)| dA(w) \in L^p(D, d\lambda).$$

この結果は  $n \geq 1$  のとき、 $p = 1$  の場合も含めたすべての  $1 \leq p \leq \infty$  に対して成立していると同時に、 $n = 0$  のときは K. Zhu の結果そのものであるという意味でこの完全な一般化となっている。また空間  $B$  の別の特徴づけとして、F. Holland and D. Walsh は次のような結果を示した： $D$  上の解析関数  $f$  に対して、 $f(z)$  が空間  $B$  に属する必要十分条件は

$$\sup\{(1 - |z|^2)^{\frac{1}{2}}(1 - |w|^2)^{\frac{1}{2}} \left| \frac{f(z) - f(w)}{z - w} \right|; z, w \in D, w \neq z\} < +\infty$$

である。そしてさらに空間  $B_p$ 、 $B_0$  のこのタイプの特徴づけとして、K. Stroethoff は次のような結果を示した： $2 < p < \infty$  のとき、 $D$  上の解析関数  $f$  に対して、 $f(z)$  が空間  $B_p$  に属する必要十分条件は

$$\int_D \int_D (1 - |z|^2)^{\frac{1}{2}p} (1 - |w|^2)^{\frac{1}{2}p} \left| \frac{f(z) - f(w)}{z - w} \right|^p d\lambda(w) d\lambda(z) < +\infty. \quad \dots (*)$$

であり、 $f(z)$  が空間  $B_0$  に属する必要十分条件は

$$\lim_{|z| \rightarrow 1^-} \sup\{(1 - |z|^2)^{\frac{1}{2}}(1 - |w|^2)^{\frac{1}{2}} \left| \frac{f(z) - f(w)}{z - w} \right|; w \in D, w \neq z\} = 0$$

である。しかし空間  $B_p$  についての結果は  $1 \leq p \leq 2$  の場合、条件 (\*) を満たす  $D$  上の解析関数は定数しかない。

そこで定理 A を考慮して次のような結果を得た。 $D$  上の解析関数  $f$  に対して、 $n = 1, 2$  のときに  $f \in B$  である必要十分条件は

$$\sup\{(1 - |z|^2)^{\frac{n}{2}}(1 - |w|^2)^{\frac{n}{2}} \left| \frac{f^{(n-1)}(z) - f^{(n-1)}(w)}{z - w} \right|; z, w \in D, z \neq w\} < +\infty \quad \dots (*).$$

であり、 $f \in B_0$  である必要十分条件は

$$\lim_{|z| \rightarrow 1^-} \sup\{(1 - |z|^2)^{\frac{n}{2}}(1 - |w|^2)^{\frac{n}{2}} \left| \frac{f^{(n-1)}(z) - f^{(n-1)}(w)}{z - w} \right|; w \in D, z \neq w\} = 0.$$

であることを証明した。 $n \geq 3$  のときは  $f(z) = \log(1 - z) \in B$  は条件 (\*) を満たさない。実際  $n \geq 3$  に対して、

$$\begin{aligned} & (1 - |z|^2)^{\frac{n}{2}}(1 - |w|^2)^{\frac{n}{2}} \left| \frac{f^{(n-1)}(z) - f^{(n-1)}(w)}{z - w} \right| \\ &= (1 - |z|^2)^{\frac{n}{2}}(1 - |w|^2)^{\frac{n}{2}}(n-1)! \frac{|\sum_{k=0}^{n-2} \binom{n-2}{k} (1-w)^{n-2-k} (1-z)^k|}{|1-z|^{n-1}|1-w|^{n-1}}. \end{aligned}$$

$|w| = s \in [0, 1)$  のような  $w$  を固定し、 $|z| = r \in [0, 1)$  とすると、

$$\begin{aligned} & \sup\{(1 - |z|^2)^{\frac{n}{2}}(1 - |w|^2)^{\frac{n}{2}} \left| \frac{f^{(n-1)}(z) - f^{(n-1)}(w)}{z - w} \right|; z, w \in D, z \neq w\} \\ & \geq (1 - r^2)^{\frac{n}{2}}(1 - s^2)^{\frac{n}{2}}(n-1)! \frac{\sum_{k=0}^{n-2} \binom{n-2}{k} (1-s)^{n-2-k} (1-r)^k}{(1-r)^{n-1}(1-s)^{n-1}} \rightarrow +\infty \quad (r \rightarrow 1^-). \end{aligned}$$

となる。ここで上の結果は  $n = 1$  の場合はそれぞれ F. Holland and D. Walsh, K. Stroethoff の結果そのものになっていて、必要性はすべての  $n \geq 1$  に対して成立している。空間  $B_p$  については、上のタイプの結果は必要性しか解っていない(すべての  $n \geq 1$  に対して)。そこで  $1 \leq p \leq 2$  のときにも適用出来るこのタイプの新たな  $f$  の振動、平均振動を導入した:  $r \in (0, \infty)$  とし、 $1 = \alpha + \beta$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  とする。そのとき、

$$\sup_{w \in D(z,r)} (1 - |z|^2)^\alpha (1 - |w|^2)^\beta \left| \frac{f(z) - f(w)}{z - w} \right| \dots (\textcircled{a}),$$

$$\frac{1}{|D(z,r)|} \int_{D(z,r)} (1 - |z|^2)^\alpha (1 - |w|^2)^\beta \left| \frac{f(z) - f(w)}{z - w} \right| dA(w).$$

これらの振動、平均振動をそのまま利用して空間  $B_p$  を特徴づけることも出来るが、それだけでは先程と同様に  $p = 1$  のときには適用出来ない。そこで再度、定理 A を考慮して、すべての  $1 \leq p \leq \infty$  に対して成立する次のような定理を導き出した:  $r \in (0, \infty)$  とし、 $n = \alpha + \beta$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  となる整数  $n \geq 1$  を固定する。そのとき、 $D$  上の解析関数  $f(z)$  に対して次の (1) ~ (3) は同値である:

$$(1) f \in B_p; \quad (2) \int_D \left( \sup_{w \in D(z,r)} (1 - |z|^2)^\alpha (1 - |w|^2)^\beta \left| \frac{f^{(n-1)}(z) - f^{(n-1)}(w)}{z - w} \right| \right)^p d\lambda(z) < \infty;$$

$$(3) \int_D \left( \frac{1}{|D(z,r)|} \int_{D(z,r)} (1 - |z|^2)^\alpha (1 - |w|^2)^\beta \left| \frac{f^{(n-1)}(z) - f^{(n-1)}(w)}{z - w} \right| dA(w) \right)^p d\lambda(z) < \infty.$$

この結果は  $n \geq 2$  のとき、すべての  $1 \leq p \leq \infty$  に対して成立している。本研究では他にも幾つかの振動、平均振動を定義し、それらを利用して空間を特徴付けている。例えばつぎのような結果も証明出来る。

**Remark.**  $\varphi(0) = 0$  を満たす  $R^1$  上の単調増加凸関数  $\varphi$  に対して、ある定数  $C, K > 0$  に対して、つぎは同値である:

$$(i) f \in B_p;$$

$$(ii) \varphi^{-1} \left( \frac{K}{|D(z,r)|} \int_{D(z,r)} \varphi \left( C(1 - |z|^2)^\alpha (1 - |w|^2)^\beta \left| f^{(n)}(z) - f^{(n)}(w) \right| \right) dA(w) \right) \in L_p(D, d\lambda);$$

$$(iii) \varphi^{-1} \left( \frac{K}{|D(z,r)|} \int_{D(z,r)} \varphi \left( C(1 - |z|^2)^\alpha (1 - |w|^2)^\beta \left| \widehat{f^{(n)}}_r(z) - f^{(n)}(w) \right| \right) dA(w) \right) \in L_p(D, d\lambda);$$

$$(v) \varphi^{-1} \left( \frac{K}{|D(z,r)|} \int_{D(z,r)} \varphi \left( C(1 - |z|^2)^\alpha (1 - |w|^2)^\beta \left| \frac{f^{(n-1)}(z) - f^{(n-1)}(w)}{z - w} \right| \right) dA(w) \right) \in L_p(D, d\lambda).$$

空間  $B, B_0$  については、それぞれつぎのような平均振動を用いて特徴付けられる:

$$\frac{1}{|D(z,r)|} \int_{D(z,r)} \log^+ \left( (1 - |z|^2)^\alpha (1 - |w|^2)^\beta \left| \frac{f^{(n-1)}(z) - f^{(n-1)}(w)}{z - w} \right| \right) dA(w),$$

$$\frac{1}{|D(z,r)|} \int_{D(z,r)} \log^+ \left( \frac{(1 - |z|^2)^\alpha (1 - |w|^2)^\beta \left| \frac{f^{(n-1)}(z) - f^{(n-1)}(w)}{z - w} \right|}{\rho} \right) dA(w) \quad \text{for all } \rho > 0.$$

さらに振動( $\otimes$ )を用いて、定義は省略するが、Harmonic Bloch 空間、Harmonic little Bloch 空間、Harmonic Besov 空間を特徴付けることも出来る。

### References

- [1] F.Colonna, The Bloch constant of bounded harmonic mappings, Indiana Univ.Math.J.38, No4(1989), 829-840.
- [2] P.L.Duren, Theory of  $H^p$  spaces (Academic Press, 1970).
- [3] F.Holland and D.Walsh, Criteria for membership of Bloch space and its subspace BMOA, Math.Ann. 273(1986), 317-335.
- [4] K.Stroethoff, The Bloch space and Besov spaces of analytic functions, Bull.Austral.Math.Soc.54(1996), 211-219.
- [5] R.Yoneda, Characterizations of Bloch space and Besov spaces by oscillations, to appear in Hokkaido Math.J.
- [6] K.Zhu, Operator Theory in Function Spaces, Marcel Dekker, New York 1990.
- [7] K.Zhu, Analytic Besov Spaces, J.Math.Anal.Appl.157(1991), 318-336.