

Some representations of Nevanlinna-type spaces by weighted Hardy spaces

東北大学情報科学研究科 飯田 安保 (Yasuo IIDA)

0. 序

Nevanlinna-type 空間をある重みつき Hardy 空間の和集合で構成する方法については、1990, 1991 年に Helson, McCarthy が N_* を、1993 年には Eoff が N^p を、どちらも重みつき H^2 -空間の和集合で構成出来ることを示している。ここでは上記の結果の拡張について述べるとともに、その構成から得られる N_* , N^p 上の inductive limit topology と距離位相が同値であることについても報告する。

1. 準備

まず、代表的な空間である Nevanlinna class, Smirnov class, Hardy spaces の定義を与える。

定義 1-1

$U = \{z \in \mathbf{C} \mid |z| < 1\}$, $T = \{z \in \mathbf{C} \mid |z| = 1\}$ とする。 U 上の正則関数 f が

$$1. \quad \lim_{r \rightarrow 1^-} \int_0^{2\pi} \log^+ |f(re^{i\theta})| d\theta < +\infty \text{ を満たすとき、 } f \in N \text{ とする。}$$

$f \in N$ のとき、 $f^*(e^{i\theta}) := \lim_{r \rightarrow 1^-} f(re^{i\theta})$ が a.e. $e^{i\theta} \in T$ で存在することが知られている。

$$2. \quad f \in N \text{ で、 } \lim_{r \rightarrow 1^-} \int_0^{2\pi} \log^+ |f(re^{i\theta})| d\theta = \int_0^{2\pi} \log^+ |f^*(e^{i\theta})| d\theta \text{ を満たすとき、 } f \in N_* \text{ とする。}$$

$$3. \quad 0 < p < \infty \text{ に対し } \lim_{r \rightarrow 1^-} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p d\theta < +\infty \text{ を満たすとき、 } f \in H^p \text{ とする。}$$

また、 U 上の有界正則関数全体を H^∞ で表す。

N を Nevanlinna class, N_* を Smirnov class, H^p ($0 < p \leq \infty$) を Hardy spaces と呼ぶ。これらの空間のあいだには、以下のような包含関係が成り立つ：

$$H^\infty \subset H^q \subset H^p \subset N_* \subset N \quad (0 < p < q < \infty)$$

このような包含関係は昔からよく知られていたが、1977 年に M. Stoll は N_* と H^p の間に位置する空間 N^p を以下のように導入した [S]：

定義 1-2

$p > 1$ とする。 U 上の正則関数 f が

$$\lim_{r \rightarrow 1^-} \int_0^{2\pi} [\log^+ |f(re^{i\theta})|]^p d\theta < +\infty$$

を満たすとき、 $f \in N^p$ とする。

この N^p には、以下の特徴がある：

$$N^p \subset N^q \quad (1 < q < p), \quad \bigcup_{q>0} H^q \subset \bigcap_{p>1} N^p, \quad \bigcup_{p>1} N^p \subset N_*$$

N とその部分空間 N_* , N^p , H^p を総称して Nevanlinna-type 空間と呼ぶ ([CK])。

2. N , N_* , N^p のある構成について

次の定理は昔から良く知られている結果である。

定理 2-1 (F. and R. Nevanlinna)

$$f \in N, f \neq 0 \iff f = \frac{g}{h} \quad (g, h \in H^\infty, h(z) \neq 0 \quad (z \in U))$$

$$f \in N_* \iff f = \frac{g}{h} \quad (g, h \in H^\infty, h : \text{outer function for } N)$$

ここで、 $h(z) = a \exp \left(\int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} \log \psi(e^{i\theta}) d\theta \right)$ ($a \in T, \psi \geq 0, \log \psi \in L^1(T)$) の形の関数を N に対する外関数 (outer function for N) と呼ぶ。

同様の構成を N^p でも考えることにする。その前に、 N^p に対する外関数を以下のように定義する。

定義 2-2

$p > 1$ とする。

$$h(z) = a \exp \left(\int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} \log \psi(e^{i\theta}) d\theta \right) \quad (a \in T, \psi \geq 0, \log \psi \in L^1(T), \log^+ \psi \in L^p(T))$$

の形の関数を N^p に対する外関数 (outer function for N^p) と呼ぶ。

このとき、 N_* の場合と同様に考えると、 $N^p \subset \left\{ f = \frac{g}{h} \quad (g, h \in H^\infty, h : \text{outer function for } N^p) \right\}$ は成立するが、逆の包含関係は成り立たない。

しかし、 N^p の可逆な元を考えることにより、定理 2-1 と同じような構成が得られる。

以下が Eoff の結果である ([E])。

定理 2-3 (Eoff, 1993)

$p > 1$ とし、 N^p の可逆な元全体を $(N^p)^{-1}$ で表す。このとき以下が成り立つ。

$$f \in N^p \iff f = \frac{g}{h} \quad (g, h \in H^\infty, h \in (N^p)^{-1})$$

次の系は容易に示される。

系 2-4

$p > 1, 0 < q \leq \infty$ とする。このとき以下が成り立つ。

$$f \in N^p \iff f = \frac{g}{h} \quad (g, h \in H^q, h \in (N^p)^{-1})$$

3. 重みつき Hardy 空間の和集合による N_* , N^p の構成

まず最初に、Helson, McCarthy, Eoff らによる N_* , N^p についての結果について述べる。

① N_* の場合

定理 2-1 は、 H^2 の場合でも成り立つので、

$$f \in N_* \iff f = \frac{g}{h} \quad (g, h \in H^2, h: \text{outer function for } N)$$

ともできる。よって、 $f \in N_*$ に対し、 $g = fh \in H^2$ (h : outer function for N) となる。 p を多項式とすると、

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f^*(e^{i\theta})h^*(e^{i\theta}) - p^*(e^{i\theta})h^*(e^{i\theta})|^2 d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f^*(e^{i\theta}) - p^*(e^{i\theta})|^2 |h^*(e^{i\theta})|^2 d\theta$$

から、Beurling の定理を用いて

$$h: \text{outer function for } N \iff f \text{ は多項式全体の } L^2(|h^*(e^{i\theta})|^2 d\theta)\text{-閉包に属する}$$

ということがいえる。この閉包を $H^2(|h|^2)$ で表すことにする。以上より $N_* \subset \bigcup_h H^2(|h|^2)$ が分かる。

逆に $f \in H^2(|h|^2)$ とすると、 $fh = g \in H^2$ となり、これより $f = g/h$ ($g, h \in H^2, h: \text{outer function for } N$) となるので $f \in N_*$ が分かる。

以上より $N_* = \bigcup_h H^2(|h|^2)$ が示される。

一方 $p \geq 1$ に対し、 $W_p = \{w: \text{weight} \mid \log w \in L^p(T)\}$ とすると、 $h \in H^2$ が outer function for N のとき $|h^*(e^{i\theta})|^2 \in W_1$ がいえる。したがって下記の定理が得られる。

この定理は最初 [H1] によって得られたが、その後 [M1, M2] において詳しい説明がなされている。

定理 3-1 (Helson, 1990)

$$N_* = \bigcup_{h \in H^2, h: \text{outer}} H^2(|h|^2) = \bigcup_{w \in W_1} H^2(w).$$

② N^p の場合

上記の方法と同様にして、 N^p の場合は以下の定理が得られる ([E])。

定理 3-2 (Eoff, 1993)

$p > 1$ に対し、以下が成り立つ。

$$N^p = \bigcup_{h \in H^2 \cap (N^p)^{-1}} H^2(|h|^2) = \bigcup_{w \in W_p} H^2(w)$$

③ Helson, McCarthy, Eoff の結果の拡張

以上の結果は重みつき H^2 -空間を用いて構成されているが、実は同様の結果が重みつき H^q -空間 ($0 < q < \infty$) によって示される。

定理 3-3

$p > 1, 0 < q < \infty$ とし、 $H^q(|h|^q)$ を多項式全体の $L^q(|h^*(e^{i\theta})|^q d\theta)$ -閉包とする。このとき以下が成り立つ。

$$(1) \quad N_* = \bigcup_{h \in H^q, h: \text{outer}} H^q(|h|^q) = \bigcup_{w \in W_1} H^q(w)$$

$$(2) \quad N^p = \bigcup_{h \in H^q \cap (N^p)^{-1}} H^q(|h|^q) = \bigcup_{w \in W_p} H^q(w)$$

4. N_*, N^p 上の同値な位相について

N_* における距離は

$$\rho(f, g) = \lim_{r \rightarrow 1^-} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log(1 + |f(re^{i\theta}) - g(re^{i\theta})|) d\theta \quad (f, g \in N_*)$$

で表される。一方、 N^p ($p > 1$) における距離は

$$\rho_p(f, g) = \lim_{r \rightarrow 1^-} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[\log(1 + |f(re^{i\theta}) - g(re^{i\theta})|) \right]^p d\theta \right\}^{\frac{1}{p}} \quad (f, g \in N^p)$$

で表される。これらの距離に関する距離位相をそれぞれ τ, τ_p で表そう。

ところで定理 3-3 から、以下のような N_* (N^p) 上の別の位相 (inductive limit topology) を考えることが出来る (記号で I_q ($I_{p,q}$) と表す):

「 V_λ を、任意の $w \in W_1$ (W_p) に対し、 $V_\lambda \cap H^q(w)$ が $H^q(w)$ における 0-近傍であるような集合とする。このとき、 $(V_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ を I_q ($I_{p,q}$) の 0-近傍系とする。」

このとき、 τ (τ_p) とこの I_q ($I_{p,q}$) が同値であることが分かる。

定理 4-1

$p > 1, 0 < q < \infty$ に対し、 τ (τ_p) と I_q ($I_{p,q}$) は N_* (N^p) 上、同値な位相である。

証明は [E] の方法と同様にして出来る。

参考文献

- [CK] J. S. Choa and H. O. Kim, *Composition operators between Nevanlinna-type spaces*, preprint.
- [E] C. M. Eoff, *A representation of N_{α}^{+} as a union of weighted Hardy spaces*, *Complex Variables* **23** (1993), 189-199.
- [H1] H. Helson, *Large analytic functions*, *Operator Theory: Advanced and Applications*, Birkhäuser, **43** (1990), 209-216.
- [H2] H. Helson, *Large analytic functions, II*, in "Analysis and partial differential equations", (Cora Sadosky, ed.), Marcel Dekker, Basel, 1990, 217-220.
- [I] Y. Iida, *Some representations of Nevanlinna-type spaces by weighted Hardy spaces*, in preparation.
- [M1] J. E. McCarthy, *Common ranges of co-analytic Toeplitz operators*, *J. Amer. Math. Soc.* **3**, 4 (1990), 793-799.
- [M2] J. E. McCarthy, *Topologies on the Smirnov class*, *J. Funct. Anal.* **104** (1992), 229-241.
- [S] M. Stoll, *Mean growth and Taylor coefficients of some topological algebras of analytic functions*, *Ann. Polon. Math.* **35** (1977), 139-158.

Yasuo IIDA
Graduate School of Information Sciences,
Tohoku University,
Katahira, Aoba-ku, Sendai 980-8577,
Japan
e-mail : iida@ims.is.tohoku.ac.jp