

ホロノミックシステムの多項式解と有理解を求める アルゴリズム

神戸大学理学部 高山 信毅(Nobuki Takayama) *

ここで紹介する仕事の大部分は、大阿久氏 (Toshinori Oaku) および Tsai 氏 (Harrison Tsai) との共同研究 [8] です。技術的詳細は、[8] を御覧下さい。

私が考えたい問題は次の問題です。

問題 A: 超幾何系や Garnier 系などの解空間が有限次元性をもつ微分方程式系の有理解、多項式解をすべて見つけるアルゴリズムをつくり実装せよ。

この小文では、この問題の部分的な解を紹介したいと思います。有理解、多項式解を調べるための、いろいろと面白い数学の理論があるのに、なぜわざわざこのような問題を計算機の問題として考えるのか？私は、同じ問題に、計算の立場からとりくむと、問題のまた別の側面がみえてくるものと期待しています。また波及効果で、他のアルゴリズムやシステムの研究も進展させる原動力となりえると思っています。

D. Knuth も、“The Art of Computer Programming” (1967) の序文で、次のように言明しています。“数学を機械化(プログラム化)する仕事は、数学および計算機両方に影響のある将来性のある分野であろう”。そういった意味では、このように数学を片っ端からプログラム化して、自然な副産物を待つというのは、健全な方針ではないかと思っています。

私のささやかな経験では、ガウスの超幾何関数 $F(a, b, c; x)$ の近接関係式 (contiguity relation), たとえば,

$$(x\partial_x + a)F(a, b, c; x) = aF(a + 1, b, c; x)$$

などの関係式を、(W. Miller, Jr. の仕事に現われたように,) $sl(4)$ 対称性と思って数学的な性質を探求するか、それとも、近接関係式を求めるアルゴリズムを探す立場で研究するかでは、その先の展開は大きくかわっていきます。対称性の立場での数学は現在大きな広がりをもっており、私にはとても解説できる能力がありませんが、近接関係式を求めるアルゴリズムとして研究されたもう一つの世界の一端については、是非 [10] の 4.4 やその参考文献を御覧下さい。また、“From Gauss To Painlevé” (Iwasaki, Kimura, Shimomura, Yoshida 著) の Chapter 2 には、近接関係式と計算機のアルゴリズムに関して、研究の出発のころの

*takayama@math.kobe-u.ac.jp

雰囲気をつたえるやさしい解説があるので、これもあわせて是非御覧ください。では、本題にはいたいと思います。

1 有理解とは?

たとえば次のような微分方程式を考えましょう。

$$[\theta_x(\theta_x + \theta_y + c - 1) - x(\theta_x + \theta_y + a)(\theta_x + b)] \bullet f = 0$$

$$[\theta_y(\theta_x + \theta_y + c - 1) - y(\theta_x + \theta_y + a)(\theta_y + b')] \bullet f = 0$$

$$[(x - y)\partial_x\partial_y - x'\partial_x + b\partial_y] \bullet f = 0.$$

ここで、 a, b, b', c は複素数、 $\theta_x = x\partial_x$ 、 $\theta_y = y\partial_y$ はオイラーの作用素、 f は未知関数です。• で、微分作用素の関数への作用をあらわします。作用は、

$$\partial_x \bullet f = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad x \bullet f = xf$$

と定義します。このように作用を定義すると、たとえば $\theta_x(\theta_x + b) \bullet f$ は

$$x \frac{\partial}{\partial x} \left(x \frac{\partial f}{\partial x} + bf \right) = x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + x \frac{\partial f}{\partial x} + bx \frac{\partial f}{\partial x}$$

に等しくなります。

さてこの微分方程式は Appell の F_1 の微分方程式とよばれており、 c が負の整数でないなら、次のような級数解を持ちます。

$$F_1(a, b, b', c; x, y) = \sum_{m, n=0}^{\infty} \frac{(a)_{m+n} (b)_m (b')_n}{(c)_{m+n} (1)_m (1)_n} x^m y^n$$

ここで、 $(p)_n = p(p+1)\cdots(p+n-1)$ 。この級数が Appell の F_1 の微分方程式を満たすという事実は、 $\theta_x \bullet x^n = nx^n$ なる関係式をつかうと容易に証明できます。試してみてください。

有理解 (rational solution) というのは、 $\frac{\text{多項式}}{\text{多項式}}$ と書ける解のことです。たとえば、 $a = 1, b = -1, b' = 1, c = 1$ のときは、

$$f = \frac{1-x}{1-y} \quad (1)$$

が有理解となっています。 $a = 3, b = -1, b' = 1, c = 1$ のときは、

$$f = \frac{(-y^2 + 3y - 3)x + 1}{(y-1)^3} \quad (2)$$

が有理解となっています。

ちなみに g をパラメータ a, b, b', c ($a \neq 0$) を持つ, Appell の F_1 の微分方程式の解とするとき,

$$\frac{1}{a}(x\partial_x + y\partial_y + a) \bullet g$$

はパラメータ $a+1, b, b', c$ を持つ, Appell の F_1 の微分方程式の解となります (これも容易に証明できますので, ためしてみてください). 解 (2) は, 解 (1) よりこの変換を用いて構成したものです.

さて Appell の F_1 の微分方程式のような線形連立微分方程式はどのように理解するのがよい理解の仕方なのでしょう. 20 世紀後半の多くの数学者は, “線形連立微分方程式は, 微分作用素環の左イデアルである” という見方をとっています. このような見方は, 近年のグレブナ基底を中心としたいわゆる計算環論の発展をみるに, 計算の立場からも極めて有効であろうと予想されます. グレブナ基底についてはここでは解説しませんが, 入門書としては, Cox, O’Shea, Little の *Ideals, Varieties, and Algorithms* という本が Springer より出版されているので, そちらを御覧ください (日本語訳もまもなく発売される予定).

さて, “線形連立微分方程式は, 微分作用素環の左イデアルである” とはどういったことか説明しましょう.

$$D = \mathbf{C}\langle x_1, \dots, x_n, \partial_1, \dots, \partial_n \rangle$$

を微分作用素環 (Weyl algebra と呼ばれる) としましょう. もっときちんと定義すると, D は x_i, ∂_j 達で生成される associative algebra で, 生成元はほとんど可換といえる次の関係式をみたします:

$$x_i x_j = x_j x_i, \partial_i \partial_j = \partial_j \partial_i, \partial_i x_j = x_j \partial_i \quad (i \neq j),$$

$$\partial_i x_i = x_i \partial_i + 1.$$

D は関数の空間に作用します. どのような関数の範囲をとるかはいろいろ必要に応じてきちんときめないといけませんが, それは本題ではないので作用の仕方だけ説明しておきましょう. f を x_1, \dots, x_n の関数とするとき,

$$\partial_i \bullet f = \frac{\partial f}{\partial x_i}, \quad x_i \bullet f = x_i f$$

で作用を定義します.

I を D の左イデアルとするとき任意の $p \in I$ に対して $p \bullet f = 0$ となる関数 f を I の解といいます. (この状況を, 略して $I \bullet f = 0$ と書くことにします.) D の任意の左イデアルは有限生成ですので,

$$I = \sum_{i=1}^m D \cdot l_i = D \cdot \{l_1, \dots, l_m\}$$

となる, $\ell_1, \dots, \ell_m \in D$ が存在します. 左イデアルの定義より, $I \bullet f = 0$ と,

$$\ell_1 \bullet f = \dots = \ell_m \bullet f = 0$$

は同値となりますが, イデアルの生成元のとりかたはいろいろと任意性がありますので, 微分方程式系は左イデアルと理解した方が考えやすいことが多いわけです. 計算の立場からは, I のグレブナ基底をうまい順序で計算して, うまいイデアルの生成元を見つけ, 計算したい量を取りだします. アルゴリズムの設計では, 計算したい量に応じて, 必要なうまい順序をさがさないといけません.

例 1 $I = D \cdot \{\partial_1^2 + \partial_2^2 - 4, \partial_1 \partial_2 - 1\}$ ($\partial_1^2 + \partial_2^2 - 4, \partial_1 \partial_2 - 1$ で生成される左イデアル) とするとき, その正則解は $f = e^{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2}$ と書けます. ここで, (λ_1, λ_2) は次の代数方程式系

$$\lambda_1^2 + \lambda_2^2 - 4 = 0, \lambda_1 \lambda_2 - 1 = 0$$

の根です. この代数方程式系の解の個数は 4 ですので, 結局 I の正則解の空間は 4 次元の \mathbf{C} ベクトル空間となります. ちなみに, I は次のような生成元ももちます:

$$I = D \cdot \{\partial_2^4 - 4\partial_2^2 + 1, \partial_1 + \partial_2^3 - 4\partial_2\}.$$

一番目の生成元が常微分作用素であることに注意してください. (グレブナ基底を求めるプログラムで, Lexicographic order のグレブナ基底を求めるとこれができます.)

計算代数で一番基本的な概念である, イニシャルイデアル (initial ideal) の概念を説明しておきましょう. これは, principal symbol のつくるイデアルの概念の拡張です. 偏微分方程式論で principal symbol で解のいろいろな性質を議論しているように, 計算代数では, イニシャルイデアルからのある種の摂動計算で, 具体的な構成をします. さて, D の任意の元 p は次のような表現をもちます (the normally ordered expression):

$$p = \sum_{(\alpha, \beta) \in E} c_{\alpha\beta} x^\alpha \partial^\beta.$$

ここで, x^α は $x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$ を意味します. ベクトル α の第 i 成分を α_i と書いています. E は, \mathbf{N}^{2n} の有限集合です ($\mathbf{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$).

$(u, v) \in \mathbf{R}^{2n}$, $u_i + v_i \geq 0$ (weight vector) に対して,

$$\text{ord}_{(u,v)}(p) = \max_{(\alpha, \beta) \in E} (\alpha \cdot u + \beta \cdot v) \quad (3)$$

と定義します. この量を p の (u, v) -weight と呼びます.

与えられた, (u, v) , $(u_i + v_i > 0)$ と $p \in D$ に対して最大の (u, v) -weight をもつ p の項を集めて, ∂_i を可換な変数 ξ_i に変えたものを, $\text{in}_{(u,v)}(p)$ と書きます. $\text{in}_{(u,v)}(p)$ は, $2n$ 変数多項式環 $\mathbf{C}[x_1, \dots, x_n, \xi_1, \dots, \xi_n]$ の元となります.

例 2 $\text{in}_{(0,0,1,1)}(x_1^2 \partial_1^2 + \partial_2^2 - 1)$ は, $x_1^2 \xi_1^2 + \xi_2^2$ に等しくなります.

I を左イデアルとすると, $\text{in}_{(u,v)}(p)$, $p \in I$ で生成されるイデアルを, $\text{in}_{(u,v)}(I)$ と書き, $\text{weight}(u,v)$ に対する I のイニシャルイデアル (initial ideal) と呼びます.

例 3 イニシャルイデアルはグレブナ基底を用いると計算できます. 計算法については, [10] の定理 1.1.6 を御覧ください. 計算機上では, (OpenXM 対応の) asir を用いると以下のよう簡単にイニシャルイデアルが計算できます (<http://www.math.kobe-u.ac.jp/KAN>).

```
[269] sm1_gb([[dx^2+dy^2-4,dx*dy-1],[x,y],[[dx,1,dy,1]]]);
[[dx^2+dy^2-4,dy*dx-1,dx+dy^3-4*dy],[dx^2+dy^2,dy*dx,dy^3]]
```

ここで dx は ∂_x を表します. $[[dx,1,dy,1]]$ で, weight vector を指定しています. これは, $(u,v) = (0,0,1,1)$ という意味です. sm1_gb の戻り値の第 1 番目がグレブナ基底, 2 番目の $[dx^2+dy^2, dy*dx, dy^3]$ がイニシャルイデアルの生成元 $\xi_1^2 + \xi_2^2, \xi_2 \xi_1, \xi_2^3$ を表します.

I の, $\text{weight}(\mathbf{0}, \mathbf{1})$, $u = \mathbf{0} = (0, \dots, 0)$, $v = \mathbf{1} = (1, \dots, 1)$ に対するイニシャルイデアルの次元が n のとき, I をホロノミック (holonomic) と呼びます. 上の例では, $\langle \xi_1^2 + \xi_2^2, \xi_2 \xi_1, \xi_2^3 \rangle$ は, $\mathbf{C}[x_1, x_2, \xi_1, \xi_2]$ での 2 次元のイデアルになりますので, ホロノミックです.

ホロノミックシステムの局所的な正則関数解は有限次元ベクトル空間になることが知られています.

以上で, 基礎概念の説明が終わりました. 多項式解, 有理解の議論にもどりましょう. [8] では以下の問題の解を与えています.

問題 B:

1. I が, holonomic のとき多項式解を見つけるアルゴリズムを与えよ.
2. I が, holonomic のとき有理解を見つけるアルゴリズムを与えよ.

以下, これらのアルゴリズムの概略を例を用いて説明したいと思います.

まず, 有理解の pole の位置については Sato-Kashiwara-Kawai により 1970 年代に証明された一般的な定理より次の事実がわかります.

定理 4 f を

$$(\text{in}_{(\mathbf{0}, \mathbf{1})}(I) : \langle \xi_1, \dots, \xi_n \rangle^\infty) \cap \mathbf{C}[x_1, \dots, x_n, \xi_1, \dots, \xi_n]$$

に属する 0 でない多項式とすると, 有理解は, $V(f)$ に pole をもつ.

f の計算法については, [10] の p.36 を御覧ください.

例 5 Appell F_1 の微分方程式の場合は, $f = xy(x-y)(x-1)(y-1)$ ととれます.

さて私達は, グレブナ基底をもとずいた計算環論的方法で多項式解, 有理解をさがしたいわけですが, それには, 多項式解, 有理解を, 代数の言葉で言い直しておく必要があります. D -加群の代数的な formalism では, 次のように多項式, 有理解の問題を理解します.

1. I が, ホロノミックのとき

$$\text{Hom}_D(D/I, \mathbf{C}[x])$$

を求めるアルゴリズムを与えよ.

2. I が, ホロノミックのとき

$$\text{Hom}_D\left(D/I, \mathbf{C}\left[x, \frac{1}{f}\right]\right)$$

を求めるアルゴリズムを与えよ.

これはいったいどういうことかということ, たとえば, φ を $\text{Hom}_D(D/I, \mathbf{C}[x])$ の元としましょう. $1 \in D/I$ なので, $\varphi(1)$ は $\mathbf{C}[x]$ の元, つまり多項式です. これに I の元 p を作用させると, $p \bullet \varphi(1) = \varphi(p1) = \varphi(0) = 0$ となります (φ は左 D homomorphism なので, p が φ の中へはいれます). すなわち, $\varphi(1)$ は I の多項式解となります. 逆に, I の多項式解 h があれば, 1 の像を h とすることで, 左 D -homomorphism をつくることができます. このように, 多項式解と Hom の元を同一視できます.

2 多項式解, 有理解の次元

問題 B の我々の解は以下のとおり.

定理 6 ([8]) I が holonomic でかつ生成元が, \mathbf{Q} 係数の Weyl algebra の元であるとき,

$$\dim_{\mathbf{C}} \text{Hom}_D(D/I, \mathbf{C}[x, 1/f])$$

および

$$\dim_{\mathbf{C}} \text{Hom}_D(D/I, \mathbf{C}[x])$$

の \mathbf{C} ベクトル空間としての次元が “計算可能”.

“計算可能” というのは, メモリにいとめをつけなければ, 計算機を用いて有限時間で計算できるということです. もちろん “有限時間” といっても, 宇宙の年齢より長い時間かかるかもしれません. 有限時間にも一瞬から宇宙の年齢程度の時間, もっと長い時間までありますから, これらの差を議論するのは興味深い問題です. この差を議論する分野を計算量の

理論といいます。世の中には、計算可能なものもたくさんありますが、計算可能でないものの方がたくさんでしょう。たとえば Hilbert の第 10 問題 “不定方程式の有理数解の存在するかいなかを判定する計算機のプログラムは存在するか?” のように、計算可能性は現代的な計算機の存在する以前から多くの数学者によって問題にされています。

さて、上の定理を用いて次元を評価できれば、あとはたとえばしらみつぶしに探索して、有理解や多項式解をすべて構成できます。したがって、ホロノミックな I に関しては、有理解をすべて決定する問題は、計算可能です。

さて、私達の次元を評価するアルゴリズムでは D -加群の理論において有名な次の関係式を用いて、解空間の次元の計算を、dual, テンソル積, (D -加群的) 積分の計算に帰着します。

$$\dim_{\mathbf{C}} \text{Hom}_D(D/I, N) = \dim_{\mathbf{C}} H^{-n}(D/D\partial \otimes_D^{\mathbf{L}} (\mathbf{D}(D/DI) \otimes_{\mathbf{O}}^{\mathbf{L}} N)). \quad (4)$$

ここで N を $\mathbf{C}[x]$ かまたは $\mathbf{C}[x, 1/f]$ にとると、 $\mathbf{D}(D/DI) \otimes_{\mathbf{O}}^{\mathbf{L}} N$ はそれぞれ $\mathbf{D}(D/DI)$ と $\mathbf{D}(D/DI)[1/f]$ になります。ここで、 $\mathbf{D}(D/DI)$ は D/DI の dual です。

(4) の評価を計算機でどのようにやるかですが、それには、[7], [9] に述べてある積分 (制限), 局所化のアルゴリズムをもちいます。

アルゴリズムの詳細は、これらの論文および [6], [8], [10] を参照して下さい。大阿久氏の [6] は、制限 (積分) のアルゴリズムに関して、その後のアルゴリズムの研究の突破口を開くこととなった、 b 関数を用いて無限性を有限性へ帰着する方法を提案した論文です。[10] の 5 章には、制限および積分の計算のアルゴリズムの比較的初心者向けの記述があります (グレブナ基底の基礎知識は仮定)。

ここでは、簡単な例でどのように (4) を評価するか紹介しようと思います。

例 7 $n = 1$ として、 $I = D \cdot \{x(x-1)\partial_x\}$ を考えます。 $f = x(x-1)$ ととれます。またこのとき、dual $\mathbf{D}(D/I)$ は、 $x(x-1)\partial_x$ の adjoint operator にほかならず、 $D/D \cdot \{\ell\}$, $\ell = -\partial_x x(x-1) = x(1-x)\partial_x - (2x-1)$ に等しくなります。なお、Dual を一般の状況で計算するには、グレブナ基底を用いて、 D で一次不定方程式を解き、 D/I の free resolution を構成する必要があります。

次に $\mathbf{D}(D/I)$ の f による局所化を計算する必要があります。この計算法は、[9] で与えています。今の場合は、 $D/D \cdot \{\ell\} \simeq \mathbf{C} \left[x, \frac{1}{x(1-x)} \right]$ となっているので ([6] のアルゴリズムで確かめられます), 局所化の計算の必要はありません。

最後に、 $M := D/D \cdot \{\ell\}$ の D -加群としての積分を計算します。これは、[7] で一般的方法を与えています。いまの場合にこの方法を適用すると以下ようになります。

まず、 ℓ の形式的な Laplace 変換をもとめると、 $\ell' = x\partial_x^2 + x\partial_x$ となる。 $M' := D/D \cdot \{\ell'\}$ の free resolution は、

$$0 \longrightarrow D \xrightarrow{(x\partial_x^2 + x\partial_x)} D \longrightarrow M \longrightarrow 0.$$

よって, $0 \rightarrow M \rightarrow 0$ と,

$$0 \rightarrow D \xrightarrow{(x\partial_x^2+x\partial_x)} D \rightarrow 0$$

が q.i.s. となります (コホモロジ (kernel/image) をとればふたつの複体は同じ).

Weight $(-1, 1)$ に対する b -関数は, $s(s-1)$ となる (一般の場合には, b 関数の計算にやはりグレブナ基底が必要になります). b -関数の最大整数根は 1. よって積分は, 次の truncated complex の cohomology に同型.

$$0 \rightarrow F_0/(F_{-1} + xD) \cap F_0 \xrightarrow{(x\partial_x^2+x\partial_x)} F_1/(F_{-1} + xD) \cap F_1 \rightarrow 0$$

ここで, F_k は $(-1, 1)$ -weight が k 以下の D の元全体の集合です. $F_0 \setminus F_{-1}$ は, $x^k \partial_x^k$, $k = 0, 1, \dots$ ではられる線形空間, $F_1 \setminus F_{-1}$ は, $x^k \partial_x^{k+1}$, $x^k \partial_x^k$, $k = 0, 1, \dots$ ではられる線形空間となります. したがって, $F_0/(F_{-1} + xD) \cap F_0$ は, 1 ではられる 1 次元線形空間, $F_1/(F_{-1} + xD) \cap F_1$ は, $1, \partial_x$ ではられる 2 次元線形空間となります. 一般の場合にこれらのベクトル空間の基底を具体的にもとめるには, やはり, グレブナ基底の計算が必要です. また, $1 \notin F_1 + xD$ となるので, 結局 $F_0/(F_{-1} + xD) \cap F_0 \xrightarrow{(x\partial_x^2+x\partial_x)} F_1/(F_{-1} + xD) \cap F_1$ の kernel は, 1 次元線形空間となります. したがって結局, 有理解の空間の次元は 1 となります. たしかに, $f = 1$ が, $x(x-1)\partial_x$ の解となっています.

以上のように, 線形の場合は, D のイデアルに関するグレブナ基底計算をもととしてなんとか次元の計算ができるわけですが, 具体的な計算には大量の計算が必要となります. アルゴリズムの本質的改善と同時にこの計算を少しでも効率よくやることを努力することにより, D のグレブナ基底計算を改良していきたいとおもっています. それから非線形の場合は, 代数方程式を解く問題とうまく関連していると思っていますがいまのところ手も足もでない状況です.

解を発見的にさがすには, 解の積分表示で留数計算する, 解の形をきめてしまって, それを解に持つようなパラメータをパラメータに関する連立一次方程式を解いて決める, などの方法があります (OpenXM の src/asir-contrib には, これらの計算を補助するために奥谷君 (神戸大, M2) の書いたプログラムがあります).

3 計算機の生成した例をひとつ

ここでは, パラメータ $(a, b, b', c) = (2, -3, -2, 5)$ をもつ, Appell の F_1 の微分方程式の多項式解を考察します. パラメータ a, b, b', c をもつ, Appell の関数 F_1 の微分方程式に対応する左イデアルを I とするとき, $F_1(a, b, b', c)$ で D/I をあらわすと約束します. 左 D 加群 $F_1(2, -3, -2, 5)$ は次の複体 (complex) と q.i.s. です.

$$0 \rightarrow D^1 \xrightarrow{Q^1} D^2 \xrightarrow{Q^0} D^1 \rightarrow 0,$$

ここで

$$Q_0 = \begin{bmatrix} (\theta_x - 3)\partial_y - (\theta_y - 2)\partial_x \\ (y^2 - y)(\partial_x\partial_y + \partial_y^2) - 2(y+x)\partial_x + 4y\partial_y + 2\partial_x - 8\partial_y - 4 \end{bmatrix}^T$$

$$Q_1 = \begin{bmatrix} (y^2 - y)(\partial_x\partial_y + \partial_y^2) - 2x\partial_x + 6y\partial_y + \partial_x - 9\partial_y \\ -(\theta_x - 3)\partial_y + (\theta_y - 1)\partial_x \end{bmatrix}$$

Dual $\mathbf{D}(F_1(2, -3, -2, 5))$ は Q_1 の adjoint の coker であり, $F_1(-1, 4, 2, -3)$ と同型となっています.

$M = F_1(2, -3, -2, 5)$ とおきます. $\mathbf{D}(M)$ の Fourier 変換に対して, q.i.s. である $(-w, w)$ -adapted 自由複体を weight $(u, v) = (-w, w)$, $w = (1, 2)$ で計算すると,

$$0 \rightarrow D^2 \rightarrow D^3 \rightarrow D^1 \rightarrow 0$$

となります (“adapted” については, [7] を参照). $(-w, w)$ にたいする b-関数は $(s+5)(s+2)(s-5)$ であり, truncated complex は,

$$0 \rightarrow \mathbf{Q}^{28} \rightarrow \mathbf{Q}^{40} \rightarrow \mathbf{Q}^{12} \rightarrow 0$$

となります. これの \ker/im の次元を計算することにより,

$$\dim \text{Ext}_D^i(M, \mathbf{C}[x]) = \begin{cases} 1 & \text{if } i = 0 \\ 2 & \text{if } i = 1 \\ 1 & \text{if } i = 2 \end{cases}$$

となります.

$\dim \text{Ext}_D^0(M, \mathbf{C}[x]) = \text{Hom}_D(M, \mathbf{C}[x]) = 1$ なので, 多項式解の次元は 1 だとわかります.

参 考 文 献

- [1] Björk, J. (1979): Rings of Differential Operators. North-Holland, Amsterdam.
- [2] Cattani, E., Dickenstein, A., Sturmfels, B. (1999): Rational Hypergeometric Functions. math.AG/9911030 at <http://xxx.lanl.gov>
- [3] Grayson, D., Stillman, M. (1999): Macaulay 2: a computer algebra system for algebraic geometry, Version 0.8.52, <http://www.math.uiuc.edu/Macaulay2>
- [4] Kashiwara, M. (1976): B -functions and holonomic systems. Inventiones mathematicae **38**, 33–53.

- [5] Kashiwara, M. (1978): On the holonomic systems of linear partial differential equations II. *Inventiones mathematicae* **49**, 121–135.
- [6] Oaku, T. (1997): Algorithms for b -functions, restrictions, and algebraic local cohomology groups of D -modules. *Advances in Applied Mathematics*, **19**, 61-105.
- [7] Oaku, T., Takayama, N. (1998): Algorithms for D -modules — Restrictions, tensor product, localization and algebraic local cohomology groups. math.AG/9805006, to appear in *Journal of Pure and Applied Algebra*.
- [8] Oaku, T., Takayama, N. and Tsai, T., Polynomial and Rational Solutions of Holonomic Systems, preprint, 1999.
- [9] Oaku, T., Takayama, N., Walther, U. (1999): A localization algorithm for D -modules. to appear in *Journal of Symbolic Computations*.
- [10] Saito, M., Sturmfels, B. and Takayama, N., *Gröbner Deformations of Hypergeometric Differential Equations*. Springer, 1999.
- [11] Tsai, H. (1999): Weyl closure, torsion, and local cohomology of D -modules, preprint.
- [12] Tsai, H., Walther, U. (1999): Computing homomorphisms between holonomic D -modules, in preparation.
- [13] Walther, U. (1999): Algorithmic computation of local cohomology modules and the local cohomological dimension of algebraic varieties, *Journal of Pure and Applied Algebra*.
- [14] Walther, U. (1999): Algorithmic computation of deRham cohomology of complements of complex affine varieties, to appear in *Journal of Symbolic Computation*.
- [15] Walther, U. (1999): The cup product structure for complements of complex affine varieties, preprint.