数理解析研究所講究録
1140巻 2000年 122-126

Specht module の既約成分について

津島行男 (Yukio Tsushima)
大阪市立大学理学部

1 準備

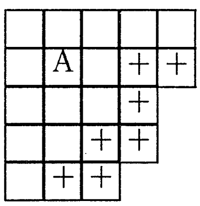
初めにいくつかの用語と記号を説明する。殆ど標準的なものであり,例えばJames[2,3]等で使われているものと同じである.

n を自然数とし,p を素数とする. 非負整数の数列 $\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_f)$ が n の分割であるとは,$\lambda_1\geq\lambda_2\geq\cdots\geq\lambda_f$ であり, それらの和が n であることをいう.$\lambda_d\neq 0$ かつ $\lambda_{d+1}=0$ であるとき,$d=d(\lambda)$ と表す. もし,$\lambda_{i+1}=\cdots=\lambda_{i+p}>0$ となるような番号 $i\geq 0$ があるならば,λ を p-singular という。p-singular でないとき,p-regular という。$P(n)$ を n の分割全部の集合とし, そのなかで p-regular なもの全体のつくる部分集合を $P(n)^0$ と表す.$P(n)$ には dominance order とよばれる順序 $\trianglelefteq$ がある. すなわち $\lambda,\mu\in P(n)$ について

$$\lambda\trianglelefteq\mu\Longleftrightarrow\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_i\leq\mu_1+\mu_2+\cdots+\mu_i\quad\text{for all } i\geq 1.$$

分割 λ に対し, 同じ大きさの正方形を第 i 行に λ_i 個ずつ左側を揃えて並べたものをヤング図形といい,$[\lambda]$ と表す. ヤング図形において, 上から i 行目, 左から j 列目にある正方形を A(i,j) とするとき,A の右側にある水平部分を A の腕 (arm),A の下にある垂直部分を脚 (leg) という.A 自身と腕, および脚を合わせた図形を $[\lambda]$ の (i,j)-hook といい, そこに出てくる正方形の個数を hook length よんで,$h_{ij}(\lambda)$ あるいは単に h_{ij} と書く.(個数を長さに読み替えるのは各正方形の長さを1とみているからである.) 脚の長さが 0 である hook を bar(横木), 腕の長さが 0 である hook を pillar(柱) という。(これは, ここだけの用語である。) A の hook length $h_{ij}(\lambda)$ は A の脚の下端からヤング図形の縁 (rim) に沿って腕の右端に至るまでに通過する正方形の個数に等しい. このような縁を $[\lambda]$ の (i,j)-rim hook とよぶ.

例1. 下図では $h_{22}=7$. プラス記号+の部分が (2,2)-rim hook である.



$G = S_n$ を n 次対称群とし,L を体とする。各 $\lambda \in P(n)$ に対して,Specht module とよばれる LG-module S^λ が構成されて, 以下の性質をもつ.

(1.1) Char L=0 のとき,S^λ は絶対既約であり, 集合 $\{S^\lambda; \lambda \in P(n)\}$ は既約 LG-modules の完全代表系になる.

(1.2) Char $L = p$ の場合,$\lambda \in P(n)^0$ ならば,$D^\lambda = S^\lambda/\mathrm{rad}(S^\lambda)$ は 絶対既約であり, 集合 $\{D^\lambda; \lambda \in P(n)^0\}$ は既約 LG-modules の完全代表系となる. さらに,S^λ における D^μ の重複度 $d_{\lambda\mu}$ $(\mu \in P(n)^0)$ について, 次が成り立つ:

(1) $d_{\lambda\mu} \neq 0$ ならば $\lambda \trianglelefteq \mu$ (2) $d_{\mu\mu} = 1$.

(1.3)(Char $L = p$) $\lambda \in P(n)^0$ のとき,S^λ が既約 ($i.e.$, $S^\lambda = D^\lambda$) であるための必要十分条件は,$\nu_p(h_{ij}) = \nu_p(h_{kj})$ がすべての i, j, k について成り立つことである.

なお, 例1の $\lambda = (5,5,4,4,3)$ のように同じ数が続くときは,$\lambda = (5^2, 4^2, 3)$ と表す.

例2.

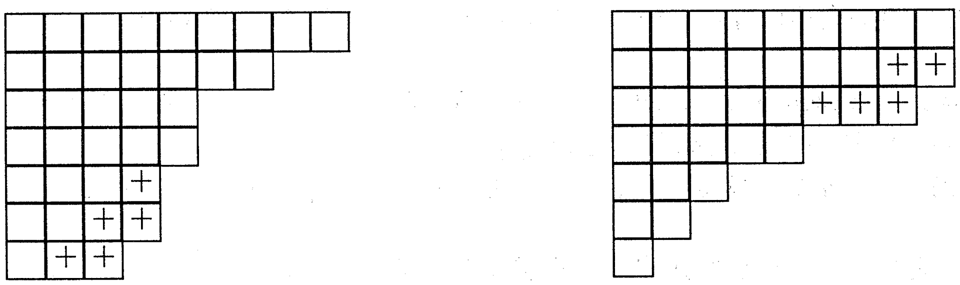
(1) (n) は dominance order に関して $P(n)$ の最大限であり,$S^{(n)}$ は1次元の自明な加群である.

(2) $\lambda = (1^n)$ とすると,S^λ は交代指標の加群 L_{a} を与える.Char $L = p$ で,$n \geq p$ のときは λ は p-regular ではないから, これを D^λ と書くわけにはいかない. この場合,$n = (p-1)k + e \, (0 \leq e < p-1)$ とし,$\mu = ((k+1)^e, k^{p-1-e})$ とすると, これは p-regular で,$D^\mu = L_{\mathrm{a}}$ となる.

2 ヤング図形上の操作

与えられた $\lambda \in P(n)$ と自然数 $a, b, c (a < b)$ に対して $\lambda(a,b,c)$ を次のように定義する;$[\lambda]$ の (b,c)-rim hook を取り外して (unwrap),$[\lambda]$ の a 行の右端から rim に沿って取り外した $h_{bc}(\lambda)$ 個の正方形を1つずつ取り付けていく (wrap). この結果が n の分割となっている (すなわち非増加な数列になっている) とき, それを $\lambda(a,b,c)$ と書いて,λ の branch とよぶことにする.

例3. 下の左側のヤング図形において,(5,2)-rim hook を取り外して,3 行の右端から順次取り付けたものが右側のヤング図形 $\lambda(3,5,2)$ となる.



注意1. branch の定義は James[3] による. ただし branch という用語はそこでは使われていない.

注意2. 一般に $\lambda \trianglelefteq \lambda(a,b,c)$ が成り立つ.

以下 Char $L = p$ とする.Specht module S^λ の既約成分の集合 (これを $\mathrm{IBr}(S^\lambda)$ と記す) についての状況を知りたいというのが本研究の動機である。まずこれに関する Carter-Payne の定理を述べよう.λ から $\lambda(a,b,c)$ を作るとき, 取り外した rim hook と取り付けた rim hook のいずれもが bar であるならば $\lambda(a,b,c)$ を λ の bar type branch という. 同様にして,pillar type branch も定義される.

定理1 (Carter and Payne[1]).$\lambda(a,b,c)$ を $\lambda(\in P(n))$ の bar(pillar resp.)type branch とし, $e = \nu_p(h_{ac})$ とおく. もし取り外した bar(pillar resp.) の長さ h_{bc} に対して,$p^e > h_{bc}$ が満たされるならば, 次が成り立つ:

$$\mathrm{Hom}_G(S^{\lambda(a,b,c)}, S^\lambda) \neq 0.$$

従って $\lambda(a,b,c) \in P(n)^0$ ならば,$D^{\lambda(a,b,c)} \in \mathrm{IBr}(S^\lambda)$ である.

上の定理は Carter and Payne[1] においては,bar type の場合しか取り扱われてないが,pillar type の場合は次の同型を用いると,bar lift の場合に帰着できる. すなわち $[\lambda']$ を $[\lambda]$ の転置,S^* を S の L-dual とするとき

(2.1) (James[2]) $S^{\lambda'} \otimes L_{\mathrm{a}} \simeq (S^\lambda)^*$.

$\lambda(a,b,c)$ の構成の際, 取り外した rim-hook の脚の長さと取り付けてできた rim-hook の脚の長さの和を $l(a,b,c)$ と表す.LG の Grothendieck group のなかで, 次のような表示を考える.

(2.2) $\sum_c \sum_{a<b} (-1)^{l(a,b,c)} (\nu_p(h_{ac}) - \nu_p(h_{bc})) S^{\lambda(a,b,c)} = \sum_{\mu \in P(n)^0} \alpha_{\lambda\mu} D^\mu$.

上式は左辺を Grothendieck group の Z-基底である $\{D^\mu; \mu \in P(n)^0\}$ の線形結合で表したものが右辺になるという意味である ($\alpha_{\lambda\mu} \in Z$). このとき次の定理が成り立つ.

定理2 (Jantzen-Schaper,cf.James and Mathas[4]) $\mu \in P(n)^0$ とする.

(1) 任意の $\lambda \in P(n)$ に対し,$\alpha_{\lambda\mu} \geq 0$;

(2) $\lambda \neq \mu$ ならば,$d_{\lambda\mu} \leq \alpha_{\lambda\mu}$ であり, さらに, $d_{\lambda\mu} \neq 0 \Leftrightarrow \alpha_{\lambda\mu} \neq 0$.

先へ進む前に記号を導入する。まず n の分割 μ に対し,$\lambda \to \mu$ とは,$\lambda = \mu$ か又は μ が λ から始めて branch を作る操作を何回か続けて得られている場合とする. さらに, 次のようにおく.

(2.3) $\Gamma_\lambda = \{\lambda(a,b,c); \nu_p(h_{ac}) \neq \nu_p(h_{bc})\}$;
(2.4) $m_\lambda(S^{\lambda(a,b,c)}) = (-1)^{l(a,b,c)}(\nu_p(h_{ac}) - \nu_p(h_{bc}))$.

次の系は上の定理より容易に分かる.

系３.
(1) $\mathrm{IBr}(S^\lambda) \subset \{D^\mu; \lambda \to \mu,\ \mu \in P(n)^0\}$;
(2) $\tilde{\lambda} \in \Gamma_\lambda^0$ が次の２つの条件を満たせば,$D^{\tilde{\lambda}} \in \mathrm{IBr}(S^\lambda)$ が成り立つ.
 (i) $m_\lambda(S^{\tilde{\lambda}}) > 0$;
 (ii) $\delta \in \Gamma_\lambda$ かつ $\delta \trianglelefteq \tilde{\lambda}$ ならば,$m_\lambda(S^\delta) > 0$.
(3) μ を Γ_λ のなかの dominance order についての極小元とする。もし μ が p-regular ならば,$D^\mu \in \mathrm{IBr}(S^\lambda)$ である.

[証明](1) は (1.2) と (2.2) より dominance order に関する上からの帰納法で証明される.

(2)(2.2) の左辺において,$D^{\tilde{\lambda}}$ を既約成分に含むような $S^\delta(\delta \in \Gamma_\lambda)$ があれば,$\delta \trianglelefteq \tilde{\lambda}$ であり,従って $m_\lambda(S^\delta) > 0$ なので, $m_\lambda(S^{\tilde{\lambda}})S^{\tilde{\lambda}}$ よりでてくる $D^{\tilde{\lambda}}$ が (2.2) の左辺の計算のなかで消えることはない. 従って,$\alpha_{\lambda\tilde{\lambda}} \neq 0$ であるから定理２ より $d_{\lambda\tilde{\lambda}} \neq 0$ である.

(3) 仮定と上と同様な議論によって,$\alpha_{\lambda\mu} = m_\lambda(S^\mu)$ となり, これは 0 でない. よって,$d_{\lambda\mu} \neq 0$.

定理２を見ると, ある $\mu \in \Gamma_\lambda^0 := \Gamma_\lambda \cap P(n)^0$ に対し $D^\mu \in \mathrm{IBr}(S^\lambda)$ が成り立つと考えるのは自然であろう. ここではこれが正しいことを次の形で述べておく.

定理４. $\lambda \in P(n)^0$ で S^λ は既約ではないとする。このとき, 系３ (2) の２つの条件を満たす $\tilde{\lambda} \in \min \Gamma_\lambda^0$ がある。従って $D^{\tilde{\lambda}} \in \mathrm{IBr}(S^\lambda)$ が成り立つ.(min X は X のなかの ($\trianglelefteq$ に関する) 極小元の集合を表す.)

証明方法はもっぱら diagram chasing arguments によるもので初等的ではあるが, その分細かな議論を必要とする. 以下に大筋だけを述べておく.

Step 1.λ の (ヤング図形の) 第１列を λ_1', これより右にある図形を μ とすると,μ は $n - d(\lambda)$ の分割である. このことを,$\lambda = (\lambda_1', \mu)$ と表すことにする. もし,S^μ が既約ならば,Γ_λ の元はすべて p-regular であることが証明できる. 従って, 系３より定理４は正しい.

Step 2.S^μ は既約でないとする.n に関する帰納法を用いて,μ に対し定理の主張が成り立つような $\tilde{\mu}$ を取る. もし,$(\lambda_1', \tilde{\mu})$ が p-regular であれば, これを $\tilde{\lambda}$ とおけば, 定理の主張が成り立つ.

Step 3. 上のことから,$\tilde{\mu}$ の取り方によらず $(\lambda_1', \tilde{\mu})$ は p-singular と仮定してよい.$\lambda = (1^r, 2^s, \cdots)$ とおいて,$r = p-1$ の場合と,$r \leq p-2$ の場合に分けて考える.

定理４を弱めて, ある $\mu \in \Gamma_\lambda^0$ に対し $D^\mu \in \mathrm{IBr}(S^\lambda)$ が成り立つという主張にすると, 証明は少し簡単になる. もちろん, 上のような形にしておけば, このような μ のいくつかを具体的に求めることができるというメリットがある. あまり自信はないが, 次のような問題を提起しておきたい.

問題　λ は p-regular で S^λ は既約ではないとする. このとき $\min \Gamma_\lambda^0$ の任意の元 μ に対し,$D^\mu \in \mathrm{IBr}(S^\lambda)$ が成り立つか？

References

[1]R.W.Carter and M.T.J.Payne: On homomorphisms between Weyl modules and Specht modules: Math.Proc.Camb.Phil. Soc.87(1980), 419-425.

[2]G.James:The representation theory of the symmetricgroup,Springer LN.682(1978).

[3]G.James:The representation theory of the symmetricgroups,Proc. Symposia in Pure Math.47 (1987),111-126.

[4]G.James and A.Mathas:A q-analogue of the Jantzen-Schaper theorem,Proc.London Math.Soc.74(1997),241-274.