数理解析研究所講究録
1140巻 2000年 61-75

Knizhnik - Zamolodchikov 微分方程式と Drinfeld associator

島田信夫 (Nobuo Shimada)

§0. 準備. Knizhnik - Zamolodchikov 微分方程式 (以下 KZ-微分方程式と略記する) は共形場の理論, 表現論, 量子群論等多方面への応用が知られ, それぞれの分野に重要な貢献と影響をもたらしている. ここでは, それらの一端に過ぎないが, 量子群への重要な寄与である Drinfeld associator の導入について述べたい. 本質的には Drinfeld 自身の論文 $[D]_1$, $[D]_2$ をはじめ, 多くの解説書 ([K] [ ] [ ] 等) の内容以上のものではないが, 多少とも理解を補うような解釈と簡略化を試みたつもりである.

anTum
Tegory
定義すること.

先ず KZ-方程式の定義域である複素 n 次元多様体 Y_n, X_n から始めよう. Y_n は複素 n 次元空間 $\mathbb{C}^n$ の開集合

$$Y_n = \{ (z_1, \cdots, z_n) \,/\, z_i \neq z_j \ \text{for}\ i \neq j \} \subset \mathbb{C}^n$$

であり, configuration space $=$ $\mathbb{R}^2$ 中の n 個の相異なる点の組の集合, とも同一視される. Y_n には座標の置換として n 次対称群 S_n が作用し (例えば, 右作用 $(z_i)\cdot\sigma = (z_{\sigma^{-1}(i)}) = (z_{\sigma^{-1}(1)}, z_{\sigma^{-1}(2)}, \cdots, z_{\sigma^{-1}(n)})$) その作用によ

る商空間 $X_n = Y_n/S_n$ も複素n次元多様体である。X_n の基本群 $\pi_1(X_n, \bar{*})$ は Artin の braid 群(組み紐群) B_n に同型であり、自然な完全系列

$$1 \to \pi_1(Y_n, *) = P_n \longrightarrow \pi_1(X_n, \bar{*}) = B_n \longrightarrow S_n \to 1$$

は良く知られている。

V を $\mathbb{C}$-ベクトル空間として、Y_n 上の自明なバンドル $Y_n \times V^{\otimes n}$ を考える。ファイバー $V^{\otimes n} = V^{(1)} \otimes_{\mathbb{C}} V^{(2)} \otimes \cdots \otimes V^{(n)}$ ($V^{(i)}$ は V のコピー) には S_n の元の左作用 $\sigma(v_1 \otimes v_2 \otimes \cdots \otimes v_n) = v_{\sigma(1)} \otimes v_{\sigma(2)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(n)}$ があり、また $End(V^{\otimes n})$ = endomorphisms の全体 には、S_n の元の左作用 $\sigma \cdot \varphi = \sigma \circ \varphi \circ \sigma^{-1}$ (写像の合成) が定義される。

自明なベクトル・バンドル $Y_n \times V^{\otimes n}$ における S_n の作用を

$$(z_i) \cdot \sigma \times (v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) = (z_i) \times \sigma \cdot (v_1 \otimes \cdots \otimes v_n)$$

なる同一視により定義すれば $X_n = Y_n/S_n$ 上のベクトル・バンドル $Y_n \times_{S_n} V^{\otimes n}$ (ファイバーは $V^{\otimes n}$) が導びかれる。

同様にして X_n 上のバンドル $Y_n \times_{S_n} End\, V^{\otimes n}$ も定義される。

さて n 次の KZ-方程式

$$(KZ_n) \quad dW(z_1, \cdots, z_n) = \hbar\Big(\sum_{1 \le i < j \le n} \frac{t_{ij}}{z_i - z_j}(dz_i - dz_j)\Big) W, \quad \hbar = \frac{h}{2\pi\sqrt{-1}}$$

は全微分方程式の形で与えられる。ここで $\hbar$ は定数のパラメター、t_{ij} は不定元であるが、場合により 1) $t_{ij} \in V^{(i)} \otimes V^{(j)}$ (或いは 2) $t_{ij} \in End\, V^{(i)} \otimes V^{(j)}$ $(i \neq j)$ $\subset End\, V^{\otimes n}$) と考えることがあり 次の性質をもつものと仮定する。

$\hbar$ は定数パラメターとして、t_{ij} と可換であるとする。

$t_{ij} = t_{ji}$ 厳密には

$\tau_{ij} \circ t_{ij} = t_{ji} \circ \tau_{ij}$ （τ_{ij} は互換 (i,j)）

(t): もっと一般に $\tau \circ t_{ij} = t_{\tau(i)\tau(j)} \circ \tau$ （$\tau \in S_n$）

$[t_{ij}, t_{kl}] = 0$ （i,j,k,l すべて異なるとき）

$[t_{ij}, t_{ik}+t_{jk}] = 0$ （i,j,k が相異なるとき）

方程式(KZ_n)はその形からS_nの元による変換で不変であり，従ってX_n上の微分方程式であるとも考えられる．

(KZ_n)の解 $W(z)=W(z_1,\dots,z_n)$ は普通 n 変数の正則関数で $V^{\otimes n}$-valued（または End $V^{\otimes n}$-valued）であるものと定義されるが，パラメーター $\hbar$ や不定元 t_{ij} が方程式に含まれていること，及び後に解の逆元を考える必要があること等から，End $V^{\otimes n}$-係数の $\hbar$ に関する形式的巾級数環 $(\mathrm{End}\,V^{\otimes n})[[\hbar]]$，または $V^{\otimes n}[[\hbar]]$ の更に或る部分環に制限したものに値をもつ関数であると規定する方が便利である．

実際 $n=2$ の場合

(KZ_2): $dW = \hbar(t_{12}\, d\log(z_1-z_2))W$

の解として例えば $W(z_1,z_2) = (z_1-z_2)^{\hbar t_{12}} = \exp(\hbar t_{12}\log(z_1-z_2))$ があり，これは $t_{12}\in \mathrm{End}\,V^{\otimes 2}$ と考えれば，W は $(\mathrm{End}\,V^{\otimes 2})[[\hbar]]$-値の関数とみなされ，$t_{12}\in U(\mathfrak{g})\otimes U(\mathfrak{g})$ の場合は，W は $(U(\mathfrak{g})^{\otimes 2})[[\hbar]]$-値の関数と見られる．次に$(KZ_2)$の monodromy，つまり，方程式の解を通じて braid 群 B_2 から End $V^{\otimes 2}$ への表現が得られる（河野俊丈氏の

定理)を示そう．(KZ_2)をX_2上の微分方程式と考える．braid群 $B_2=\pi_1(X_2,\bar{*})$ の生成元σ_1をloopで，更にそのY_2への持ち上げである curve $z(s)=(z_1(s),z_2(s))$ $(0\leqq s\leqq 1)$で表わそう．Y_2の基点 $*=(1,2)$をとり，X_2への射影を$\bar{*}=\overline{(1,2)}=\overline{(2,1)}$とする．$z(s)$を

$z_1(s)=\frac{1}{2}(3-e^{\pi\sqrt{-1}s})$，$z_2(s)=\frac{1}{2}(3+e^{\pi\sqrt{-1}s})$で定義すれば点$(1,2)$と$(2,1)$を結ぶcurve $z(s)$が得られ，$\overline{z(s)}$はσ_1を代表するloop in X_2となる．(実は，$\overline{z(s)}$はσ_1^{-1}を代表していると見る立場もあるが，慣用に従うことにする．)

このcurve $z(s)$に沿って(KZ_2)を線分$[0,1]$上にpull backすれば，

$$\frac{dW(s)}{ds}=\frac{h}{2}t_{12}\cdot W(s)\quad \text{on } [0,1]\qquad (\text{ただし } W(s)=W(z(s)))$$

が得られ，その一意的な正則解として$W(s)=W(0)\cdot e^{\frac{h}{2}t_{12}s}$を得る(ただし，$\hbar\cdot\pi\sqrt{-1}=\frac{h}{2}$を用いた)　$s=1$において$W(1)=W(0)e^{\frac{h}{2}t_{12}}$であり，$W(0)=id.$とおけば$W(1)=e^{\frac{h}{2}t_{12}}:V^{(1)}\otimes V^{(2)}\to V^{(1)}\otimes V^{(2)}$となる．

これをY_2上での解，さらにX_2上での解 $\underset{(2,1)}{W}(z(1))$へtranslateすれば
$\underset{(2,1)}{W}(z(1))=\tau_{12}\circ e^{\frac{h}{2}t_{12}}:V^{(1)}\otimes V^{(2)}\to V^{(2)}\otimes V^{(1)}$ (τ_{12}は互換$(1\,2)$)となり，

monodromy表現 $\rho(\sigma_1)(v_1\otimes v_2)=\tau_{12}\circ e^{\frac{h}{2}t_{12}}(v_1\otimes v_2)=R_{12}(v_1\otimes v_2)$
が得られる。$R_{12}=\tau_{12}\circ e^{\frac{h}{2}t_{12}}:V^{(1)}\otimes V^{(2)}\to V^{(2)}\otimes V^{(1)}$はベクトル空間のmonoidal圏におけるbraiding作用素となる．$R_{ij}=\tau_{ij}\circ e^{\frac{h}{2}t_{ij}}$も用いる．($R_{12}$を単に，$U(\mathfrak{g}_2)_h$の元と見なす場合もある)

§1. 解空間について. 微分方程式 (KZ_n) の解の在り場所を正確に定めるため場合を分ける.

<u>Case 1.</u> $\mathbb{C}$ 上の finite dim. semi-simple Lie 環 $\mathfrak{g}$ とその universal enveloping algebra $U(\mathfrak{g})$ をとり, 前節のベクトル空間 V を $U(\mathfrak{g})$, $V^{\otimes n} = U(\mathfrak{g})^{\otimes n}$ とする場合. $\mathfrak{g}$ 上の bilinear form $\langle x, y\rangle \overset{\mathrm{def}}{=} \mathrm{Trace}(\mathrm{Ad}\,x \cdot \mathrm{Ad}\,y)$ (行列のトレイス) は Killing form と呼ばれて, 対称, 非退化な $\mathfrak{g}$ 上の内積を定義する. これは adjoint 不変: $\langle [z,x], y\rangle + \langle x, [z,y]\rangle = 0$ $(\forall z \in \mathfrak{g})$ である. $\mathfrak{g}$ の一つの基 $\{x_i\}$ をとり, この内積に関する dual base $\{x^i\}$ をとる $(\langle x_i, x^j\rangle = \delta_{ij})$

Lemma $[x, x_i] = \sum_j \alpha_{ij}(x)\cdot x_j$, $[x, x^i] = \sum_k \beta_{ik}(x)\cdot x^k$ とおくとき

$$\alpha_{ij}(x) = -\beta_{ji}(x)$$

Lemma. 1) Casimir 元 $C = \sum_i x_i \cdot x^i \in U(\mathfrak{g})$ は基 $\{x_i\}$ のとり方に無関係に定まる. 2) C は $U(\mathfrak{g})$ の centre に属する.

以上の良く知られた性質から, 次の事項, 性質が従う (証明なしに述べる) $t = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i \otimes x^i + x^i \otimes x_i) \in \mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g} \subset U(\mathfrak{g})^{\otimes 2})$ は $U(\mathfrak{g})$ の余積 $\Delta : U(\mathfrak{g}) \to U(\mathfrak{g}) \otimes U(\mathfrak{g})$ を用いると

$$t = \frac{1}{2}(\Delta C - 1\otimes C - C\otimes 1)$$

$$[\Delta x, t] = 0 \quad (\forall x \in \mathfrak{g})$$

$t_{12} = t \in V^{\otimes 2} = V^{(1)} \otimes V^{(2)}$ $(V^{(i)}$ は V のコピー$)$ とおく

$t = \sum_r y_r \otimes z_r \in V^{\otimes 2}$ のとき

$t_{ij} = \sum_r 1\otimes\cdots\otimes \overset{i}{y_r} \otimes 1 \otimes\cdots\otimes 1 \otimes \overset{j}{z_r} \otimes 1 \otimes\cdots\otimes 1$ とおくと

前節の関係式 (t) が成り立つ.

Case 2. V を $\mathbb{C}$-ベクトル空間, t_{ij} $(1 \le i < j \le n) \in \mathrm{End}(V^{(i)} \otimes V^{(j)})$ $\subset \mathrm{End}(V^{\otimes n})$ とし, $\sigma \circ t_{12} \circ \sigma^{-1} = t_{\sigma(1)\sigma(2)}$ とする. このとき前節の関係式 (t) を仮定する.

t_{ij} で生成された $\mathbb{C}$ 上の Lie 環を $\mathfrak{t}_n$ とおく. $U(\mathfrak{t}_n) \subset \mathrm{End}(V^{\otimes n})$ と考えられる. degree $(t_{ij}) = 1$ と置けば, $\mathfrak{t}_n$ は graded Lie algebra, $U(\mathfrak{t}_n)$ は graded algebra となる. 前節で導入した $\mathrm{End}\, V^{\otimes n}$ 上の S_n の作用 $\sigma \cdot \varphi = \sigma \circ \varphi \circ \sigma^{-1}$ について $\sigma \cdot t_{ij} = t_{\sigma(i)\sigma(j)}$ となるから, $U(\mathfrak{t}_n)$ は S_n-不変な部分環である.

係数域を $\mathrm{End}\, V^{\otimes n}$ とする h の形式的巾級数環 $(\mathrm{End}\, V^{\otimes n})[[h]]$ の部分環 $U(\mathfrak{t}_n)_h$ を次の様に定義する. 先ず系列 $U(\mathfrak{t}_n)[[h]]/(h^N)$ の逆極限 $\varprojlim_{N \to \infty} U(\mathfrak{t}_n)[[h]]/(h^N)$ は, $U(\mathfrak{t}_n)[[h]]$ において イデアル (h^N) を零の基本近傍系と考えて, 一様位相空間と考えられるが, 更に, degree による $U(\mathfrak{t}_n)$ の完備化に相当する $U(\mathfrak{t}_n)_h$ を, h の形式的巾級数 $\sum_k \alpha_k(\cdot) h^k$ であって, 係数 $\alpha_k(\cdot)$ は t_{ij} に関する k 次の非可換斉次多項式, つまり degr $(\alpha_k(\cdots t_{ij} \cdot)) = k$ なるものに限った その $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k(\cdot) h^k$ の全体と定義する. これを $\varprojlim_N U(\mathfrak{t}_n)[[h]]/(h^N)$ の部分空間と考えたものが $U(\mathfrak{t}_n)_h \approx \widehat{U(\mathfrak{t}_n)}$ (degree による完備化) である. 以下 Case 2 の場合に限ることとし, Y_n 上の(自明な)ベクトル・バンドルのファイバーとして $U(\mathfrak{t}_n)_h$ $\left(\subset (\mathrm{End}\, V^{\otimes n})[[h]]\right)$ をとり, (KZ_n) の解は $U(\mathfrak{t}_n)_h$-valued 正則関数であるとする. 実は, Case 1 においても $\{t_{ij}\}$ から生成された Lie 環 $\mathfrak{t}_n$ $(\subset U(\mathfrak{g})^{\otimes n})$ および $U(\mathfrak{t}_n)$ $(\subset U(\mathfrak{g})^{\otimes n})$ を考えれば, $U(\mathfrak{t}_n)$ に S_n が作用し, Case 2 に帰着する. formal には $U(\mathfrak{t}_n)$ だけで十分であり, $V^{\otimes n}$, $\mathrm{End}\, V^{\otimes n}$ 等は, 場合に応じて考える.

§2. 変数の reduction. 前々節§0. で与えた全微分方程式

$$(KZ_n) : dW = \hbar\Big(\sum_{i<j} \frac{t_{ij}}{z_i - z_j} d(z_i - z_j)\Big) W$$

は次の~~[illegible]~~偏微分方程式と同値である.

$$(KZ_n)' : \frac{\partial W}{\partial z_i} = \hbar\Big(\sum_{j\neq i} \frac{t_{ij}}{z_i - z_j}\Big) W \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

これから直ちに $\sum_i \frac{\partial W}{\partial z_i} = 0$ が従う. そこで $w_1 = z_1 + \cdots + z_n$, $w_i = z_i - z_1 \ (i > 1)$ とおけば

$\widehat{W}(w_1, \cdots, w_n) = W(z_1, z_2, \cdots z_n)$ について

$$\frac{\partial \widehat{W}}{\partial w_1} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial W}{\partial z_i} \cdot \frac{\partial z_i}{\partial w_1}, \quad \frac{\partial z_i}{\partial w_1} = \frac{\partial z_1}{\partial w_1} = \frac{1}{n} \ (i = 2, \cdots, n) \quad 故に \ \frac{\partial \widehat{W}}{\partial w_1} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial W}{\partial z_i} = 0$$

従って変数 w_1 は除いて, $W(z_1, \cdots, z_n) = \widetilde{W}(w_2, \cdots, w_n)$ となり, $(KZ_n)'$ は

$$(\widetilde{KZ_n}) : \frac{\partial \widetilde{W}}{\partial w_i} = \hbar\Big(\frac{t_{i1}}{w_i} + \sum_{2\leq j \neq i} \frac{t_{ij}}{w_i - w_j}\Big) \widetilde{W} \quad (i > 1)$$

と同値となる. この式から

$$\sum_{i=2}^{n} w_i \frac{\partial \widetilde{W}}{\partial w_i} = \hbar T \widetilde{W}, \quad T = \sum_{1\leq i<j\leq n} t_{ij}$$

が従う. Euler により, この式は $\widetilde{W}$ が $(w_2, \cdots, w_n)$ の, 指数 $\hbar T$ をもつ斉次関数であることを意味する: つまり

$$\widetilde{W}(u\overset{w_2}{u_2}, u\overset{w_3}{u_3}, \cdots, uu_n) = u^{\hbar T} \widetilde{W}(u_2, \cdots, u_n) \text{ が成り立つ.}$$

ここで $u^{\hbar T} = \exp(\hbar T \log u)$ (ただし $\log u$ は自然対数)

証) $$\frac{d\widetilde{W}(uu_i)}{du} = \sum \frac{\partial \widetilde{W}}{\partial w_i} \cdot u_i = \frac{\hbar T}{u} \widetilde{W}$$

$$\log \widetilde{W} = \hbar T \log u + C \ (定数)$$

$$\widetilde{W} = u^{\hbar T} \cdot e^C \qquad e^C = \widetilde{W}(u = 1) = \widetilde{W}(u_2, \cdots, u_n)$$

(又は $\frac{d(\widetilde{W} \cdot u^{-\hbar T})}{du} = 0$ から直ちに従う)

ここで $u_n=1,\ u=w_n,\ u_i=\frac{w_i}{w_n}$ とおくことにより

$$u^{-hT}\cdot\widetilde{W}(uu_2,\cdots,uu_{n-1},u)=\widetilde{W}(u_2,\cdots,u_{n-1},1)=V(u_2,\cdots,u_{n-1})$$

つまり変数の数を$(n-2)$個までreduceすることができる。$(\widetilde{KZ_n})$は

$$(*_n):\quad \frac{\partial V}{\partial u_i}=h\left(\frac{t_{i1}}{u_i}+\sum_{i<j\le n-1}\frac{t_{ij}}{u_i-u_j}+\frac{t_{in}}{u_i-1}\right)V \quad (\text{for } i=2,\cdots,n-1)$$

と同値となる。念のため $u_i=\frac{w_i}{w_n}=\frac{z_i-z_1}{z_n-z_1}$ である。

§3. KZ-方程式の解

これまで述べた様にKZ_n-微分方程式の解$W(z_1,\cdots,z_n)$はパラメーターhの形式的巾級数 $W=\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k\cdot h^k$ の形に表わされ、α_kはベクトル空間$V^{\otimes n}$(または$\mathrm{End}\,V^{\otimes n}$)の有限次元部分空間に値をもつ($Y_n$上の)正則関数と解すべきであるが、この言葉自体の意味をもう少し明確にしようとすれば、先づY_n上の複素正則関数の芽の作る層(sheaf)$\mathcal{F}$を考え、constant sheaf $V^{\otimes n}$(または$\mathrm{End}\,V^{\otimes n}$)とのテンソル積 $\mathcal{F}\otimes V^{\otimes n}$(または$\mathcal{F}\otimes\mathrm{End}\,V^{\otimes n}$)のcross-sectionのmodule $\Gamma(\mathcal{F}\otimes V^{\otimes n})$の元が、上記のベクトル値正則関数の意味である。もっと正確には正則関数α_kの値は$V^{\otimes n}$(または$\mathrm{End}\,V^{\otimes n}$)の有限次元部分空間($k$に依存してよい)に属するものとする(この条件は、$h$の巾級数同志の積を考える時に必要である)(

以下 $n=3,4$ の場合に(KZ_n)-方程式の具体的な解を求めよう。Drinfeld associatorの導入、その性質については$n\leqq 4$までの検討で一応足りている。

$n=3$ の場合．一変数の方程式

$(*_3)$: $\dfrac{dV}{dz} = \hbar\left(\dfrac{t_{12}}{z} + \dfrac{t_{23}}{z-1}\right)V$, $\left(z = u_2 = \dfrac{z_2-z_1}{z_3-z_1}\right)$

は係数に特異点 $z=0$, $z=1$ を含み，フックス型と呼ばれる常微分方程式であり，各特異点の近傍で，指定点で指定された初期値をもつ正則解が一意的に存在する．またその解は単連結な領域に解析接続できることが知られている．いまの場合例えば $\mathbb{C}' = \mathbb{C} - \{(-\infty,0] \cup [1,\infty)\}$ 上で，非可換な t_{12}, t_{23} の k次斉次多項式を値とする正則関数 $\alpha_k(z)$ に対して $\hbar$ の巾級数 $\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k(z)\hbar^k$ の形の収束解が次の様に求められる．特異点 $z=0$ の近傍では，方程式の係数のうち $\frac{t_{12}}{z}$ が支配的(dominant)であるので解 $V(z)$ の漸近挙動が

$V_0(z) \sim z^{\hbar t_{12}}$ なるものが存在して，$V_0(z)$ 自体は

$V_0(z) = P(z)\cdot z^{\hbar t_{12}}$ ($P(z)$は上記の意味の正則関数，$P(0)=1$) の形で一意的な解として定まる．

証) $P(z) = \sum_{r\geq 0} P_r z^r$, $P_0=1$ と置いて，$V_0 = P(z)\cdot z^{\hbar t_{12}}$ を $(*_3)$に代入すると $V_0'(z) = \left(P'(z) + P\cdot\frac{\hbar t_{12}}{z}\right)\cdot z^{\hbar t_{12}} = \hbar\left(\frac{t_{12}}{z}+\frac{t_{23}}{z-1}\right)P(z)\cdot z^{\hbar t_{12}}$

となり $z\cdot P'(z) - \hbar[t_{12}, P(z)] = \hbar\left(\frac{z\cdot t_{23}}{z-1}\right)P(z)$ を得る．

これを z の巾級数として展開すると $[t_{12},P_0]=0$ であるから $r>0$ のとき $r\cdot P_r - \hbar[t_{12},P_r] = -\hbar t_{23}(P_0+P_1+\cdots+P_{r-1})$ (z^rの係数比較)

$(r-\hbar\,\mathrm{Ad}\,t_{12})P_r = -\hbar t_{23}(P_0+P_1+\cdots+P_{r-1})$ において，

$r-\hbar\,\mathrm{Ad}\,t_{12}$ は逆 $(r-\hbar\,\mathrm{Ad}\,t_{12})^{-1} = \frac{1}{r}\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{\hbar}{r}\mathrm{Ad}\,t_{12}\right)^i$ をもつから r につき帰納的に P_r が求められ，従って $V_0(z)$ が得られる．

特異点 $z=1$ の近傍でも同様に漸近展開 $(1-z)^{\hbar t_{23}}$ をもつ一意的な解 $V_1(z) = Q(1-z)(1-z)^{\hbar t_{23}}$ （$Q(1-z)$ は $|1-z|<\varepsilon$ で正則, $Q(0)=1$）が存在する。$V_0(z)$ と $V_1(z)$ は二つの別々な解であるが、これらを解析接続(或いは延長)して、同じ場所で比較しよう。$V_1(z)$ は逆をもつ: $V_1^{-1}(z) = (1-z)^{-\hbar t_{23}} \cdot Q(1-z)^{-1}$ から $V_1^{-1}V_0 = \Phi$ とおけば $V_0 = V_1\Phi$ 両辺を微分して $V_0' = V_1'\cdot\Phi + V_1\cdot\Phi'$, しかるに $V_0' = \hbar\left(\frac{t_{12}}{z} + \frac{t_{23}}{z-1}\right)V_1\Phi = V_1'\cdot\Phi$ であるから上式より $V_1\cdot\Phi' = 0 \Longrightarrow$ $\Phi' = 0$ つまり Φ は z を含まない constant. $\Phi = \Phi(\hbar t_{12}, \hbar t_{23}) \left(\in U(\mathfrak{t}_3)_\hbar\right)$ と書いて、これを Drinfeld associator (結合子?) とよぶ。

（上記において $(z-1)^{\hbar B} = \exp(\hbar B \log(z-1)) = \exp(\hbar B (\log(-1) + \log(1-z)))$

$\log(-1) = \pi\sqrt{-1}$ (主値) により $(z-1)^{\hbar B} = \exp(\hbar\pi\sqrt{-1}B)\cdot\exp(\hbar B \log(1-z))$

$= e^{\frac{h}{2}B}(1-z)^{\hbar B}$

（$\hbar = \frac{h}{2\pi\sqrt{-1}}$, $B = t_{23}$）

$\Phi(ht_{12}, ht_{23}) : (V^{(1)}\otimes V^{(2)})\otimes V^{(3)} \xrightarrow{\approx} V^{(1)}\otimes(V^{(2)}\otimes V^{(3)})$ と考える）

さて $(KZ_3)'$: $\dfrac{\partial W}{\partial z_2} = \hbar\left(\dfrac{t_{21}}{z_2-z_1} + \dfrac{t_{23}}{z_2-z_3}\right)W$

において $W(z_1,z_2,z_3) = (z_3-z_1)^{\hbar(t_{12}+t_{23}+t_{13})}V(z)$ （ただし $z = \dfrac{z_2-z_1}{z_3-z_1}$）

とおけば「この W が $(KZ_3)'$ の解 $\Longleftrightarrow$ $V(z)$ が $(*_3)$ の解」

証) この W が $(KZ_3)'$ の解とすれば、代入して

$(KZ_3)'$ の左辺 $= \dfrac{\partial W}{\partial z_2} = (z_3-z_1)^{\hbar(t_{12}+t_{23}+t_{13})}\dfrac{V'(z)}{z_3-z_1}$

右辺 $= \hbar\left(\dfrac{t_{21}}{z_2-z_1} + \dfrac{t_{23}}{z_2-z_3}\right)\cdot(z_3-z_1)^{\hbar(t_{12}+t_{23}+t_{13})}V(z)$

左辺 = 右辺とおけば $V'(z) = \hbar\left(\dfrac{t_{21}}{z_2-z_1} + \dfrac{t_{23}}{z_2-z_3}\right)V$ すなわち $(*_3)$.

逆に V が $(*_3)$ の解なら上記の W が $(KZ_3)'$ の解となる。

そこで $(*_3)$ の解 V_i $(i=0,1)$ を使って

$W_i(z_1,z_2,z_3)=(z_3-z_1)^{\hbar T}\cdot V_i(z)$ とおけば $(T=t_{12}+t_{23}+t_{13})$,

$W_0(z_1,z_2,z_3)\sim(z_2-z_1)^{\hbar t_{12}}(z_3-z_1)^{\hbar(t_{23}+t_{13})}$ when $|z_2-z_1|\ll|z_3-z_1|$

ここで $t_{23}+t_{13}=t_{(12)3}$ とおけば $(t_{(12)3}=t_{12}\otimes 1+(1\otimes\tau_{23})\circ(t_{13}\otimes 1)\circ(1\otimes\tau_{23}))$

$$W_0(z_1,z_2,z_3)\sim(z_2-z_1)^{\hbar t_{12}}(z_3-z_1)^{\hbar t_{(12)3}}$$

となり、同様に

$W_1(z_1,z_2,z_3)\sim(z_3-z_2)^{\hbar t_{23}}(z_3-z_1)^{\hbar t_{1(23)}}$ $\quad |z_2-z_3|\ll|z_3-z_1|$

- 上記で t_{12} は $t_{(12)3}$ と，t_{23} は $t_{1(23)}$ と，T は t_{ij} $(1\le i<j\le 3)$ と可換であること，また W_0, W_1 は上の漸近挙動で一意的に定まることに注意しよう．

$V_0=V_1\Phi_{123}$ の関係 (p.10) から $W_0=W_1\Phi_{123}$ の関係が生ずる．

(T は $\Phi(\hbar t_{12},\hbar t_{23})$ と可換であることを使った)

$W_{(12)3}=W_0\sim(z_2-z_1)^{\hbar t_{12}}(z_3-z_1)^{\hbar t_{(12)3}}$: $V^{\otimes 3}\to V^{\otimes 3}$

$W_{1(23)}=W_1\sim(z_3-z_2)^{\hbar t_{23}}(z_3-z_1)^{\hbar t_{1(23)}}$: $V^{\otimes 3}\to V^{\otimes 3}$

さらに z_1,z_2,z_3 を permute して次の四つの解を得る．

$W_{1(32)}=W_2\sim(z_2-z_3)^{\hbar t_{32}}(z_2-z_1)^{\hbar t_{1(32)}}$ when $|z_2-z_3|\ll|z_2-z_1|$

$W_{(13)2}=W_3\sim(z_3-z_1)^{\hbar t_{13}}(z_2-z_1)^{\hbar t_{(13)2}}$ when $|z_3-z_1|\ll|z_2-z_1|$

$W_{(31)2}=W_4\sim(z_1-z_3)^{\hbar t_{31}}(z_2-z_3)^{\hbar t_{(31)2}}$ when $|z_1-z_3|\ll|z_2-z_3|$

$W_{3(12)}=W_5\sim(z_2-z_1)^{\hbar t_{12}}(z_2-z_3)^{\hbar t_{3(12)}}$ when $|z_2-z_1|\ll|z_2-z_3|$

これらは夫々の領域での一意的な解を定め，それらの間に次の関係がある：W_2 は W_1 から z_2,z_3 の交換で得られる：$W_1=W_2\circ R_{23}$ (p.4参)

W_3 と W_2 は t_{23} と t_{13} の入れ換えで得られる：$W_3\circ\Phi_{132}^{-1}=W_2$ $\quad$ ($\Phi(v,u)=\Phi(u,v)^{-1}$ であることに注意.)

要証明

W_4 は W_3 から z_1 と z_3 の交換で得られる. $W_4 \circ R_{13} = W_3$

W_5 は W_4 から t_{31} と t_{12} の入れかえで得られる: $W_5 \circ \Phi_{31,2} = W_4$

W_5 は W_0 から (z_1, z_2) と z_3 の交換で得られる: $W_5 \circ R_{(12)3} = W_0$

これらの関係から

$$W_0 = W_1 \Phi_{123} = W_2 \cdot R_{23} \cdot \Phi_{123} = W_3 \cdot \Phi_{132}^{-1} \circ R_{23} \Phi_{123} = W_4 R_{13} \Phi_{132}^{-1} \cdot R_{23} \cdot \Phi_{123}$$
$$= W_5 \Phi_{312} \cdot R_{13} \cdot \Phi_{132}^{-1} R_{23} \cdot \Phi_{123}$$

一方 $W_0 = W_5 \cdot R_{(12)3}$ であるから

$$R_{(12)3} = \Phi_{312} R_{13} \Phi_{132}^{-1} R_{23} \cdot \Phi_{123} \quad \text{(Hexagon axiom A)}$$

$R_{(21)3} = \Phi_{321} \circ R_{23} \circ \Phi_{231}^{-1} \circ R_{13} \cdot \Phi_{213}$ (Hex. B)

$R_{12} \circ R_{(12)3} = R_{(21)3} \circ R_{12}$

これは monoidal 圏 (または tensor 圏とも言う) における associator

$$\Phi_{V_1, V_2, V_3} = (V_1 \otimes V_2) \otimes V_3 \xrightarrow{\sim} V_1 \otimes (V_2 \otimes V_3)$$

なる自然同型と braiding $R_{V,W} = V \otimes W \xrightarrow{\sim} W \otimes V$ との coherence を意味する公理 (MacLane の本 Category Theory for Working Mathematician 参照) である (これから non-associative の場合の Yang-Baxter 方程式に相当する等式が得られる)

次に更に面倒な $n=4$ の場合が残っている.

$R_{(23)} \cdot R_{13} =$
$\Phi_{231}^{-1} R_{13} \cdot \Phi_{213}^{-1} \cdot R_{12} \Phi_{123}^{-1}$

Hex. B

(KZ_4) と同値な

$$(*_4): \text{ i) } \frac{\partial V}{\partial u_2} = \hbar\left(\frac{t_{12}}{u_2} + \frac{t_{23}}{u_2 - u_3} + \frac{t_{24}}{u_2 - 1}\right)V$$

$$\text{ii) } \frac{\partial V}{\partial u_3} = \hbar\left(\frac{t_{13}}{u_3} + \frac{t_{23}}{u_3 - u_2} + \frac{t_{34}}{u_3 - 1}\right)V$$

を考える. この場合, 2 変数 u_2, u_3 の関数 V を考えればよい $\begin{cases} u = u_2 = \dfrac{z_2 - z_1}{z_4 - z_1} \\ v = u_3 = \dfrac{z_3 - z_1}{z_4 - z_1} \end{cases}$ とおいて

$u = u_2 = 0$
$v = u_3 = 1$

点 $(u, v) = (0, 1)$ の近傍では, 方程式 $(*_4)$ i) の第1項, ii) の第3項がそれぞれ dominant であるので, $(*_4)$ の normal form の形 $(\widehat{*_4})$: $\begin{cases} \dfrac{\partial V}{\partial u} = \hbar\left(\dfrac{t_{12}}{u} + P\right)V \\ \dfrac{\partial V}{\partial v} = \hbar\left(\dfrac{t_{34}}{v-1} + Q\right)V \end{cases}$ の解が

漸近挙動

$$V(u,v) \sim u^{\hbar t_{12}}(v-1)^{\hbar t_{34}}$$

で定まると期待できる。実際 $V(u,v) = U(u,v) \cdot u^{\hbar t_{12}}(v-1)^{\hbar t_{34}}$

$U(u,v)$ は $(0,1)$ の近傍で正則かつ $U(0,1)=1$ な関数とおいて、$n=3$ の場合

と同様に求めることができる（t_{12}, t_{34} は可換）

このとき $(z_4-z_1)^{\hbar T} \cdot V(u,v) = X_5$ は (KZ_4) の解となる（$T = t_{12}+t_{13}+t_{23}+t_{24}+t_{14}+t_{34}$）

$$X_5 = W_{(12)(34)} = U_{(u,v)}(z_2-z_1)^{\hbar t_{12}} \cdot (z_4-z_3)^{\hbar t_{34}}(z_4-z_1)^{\hbar t_{(12)(34)}} \quad (t_{(12)(34)} = T - t_{12} - t_{34})$$

for $|z_2-z_1| \ll |z_4-z_1|$, $|z_4-z_3| \ll |z_4-z_1|$

次に特異点 $(u_2,u_3)=(0,0)$ のときは、そのままでは $(*_4)$ を標準形に持ち込むことはできないので点 $(0,0)$ の近くで座標 $u=u_3$，$v=\frac{u_2}{u_3}$ を導入し（blowing up の方法）

$\hat{V}(v,u) = V(\underset{u_2}{uv}, \underset{u_3}{u})$ とおけば、

$$\frac{\partial \hat{V}}{\partial u} = \frac{\partial V}{\partial u_2} \cdot \underset{\frac{\partial u_2}{\partial u}}{v} + \frac{\partial V}{\partial u_3} = \hbar v\left(\frac{t_{12}}{u_2} + \frac{t_{23}}{u_2-u_3} + \frac{t_{24}}{u_2-1}\right)V + \hbar\left(\frac{t_{13}}{u_3} + \frac{t_{23}}{u_3-u_2} + \frac{t_{34}}{u_3-1}\right)V$$

$$= \hbar\left(\frac{t_{12}+t_{13}+t_{23}}{u} + \frac{vt_{24}}{uv-1} + \frac{t_{34}}{u-1}\right)\hat{V}$$

$$\frac{\partial \hat{V}}{\partial v} = \frac{\partial V}{\partial u_2} \cdot u = \hbar u_3\left(\frac{t_{12}}{u_2} + \frac{t_{23}}{uv-u} + \frac{t_{24}}{uv-1}\right)V$$

$$= \hbar\left(\frac{t_{12}}{v} + \frac{t_{23}}{v-1} + \frac{t_{24}u}{uv-1}\right)\hat{V}$$

従ってこれは

$(*_4)^\wedge$ i) $\dfrac{\partial \hat{V}}{\partial u} = \hbar\left(\dfrac{t_{12}+t_{13}+t_{23}}{u} + \cdots\right)\hat{V}$ near $(\overset{v}{0}, \overset{u}{0})$

ii) $\dfrac{\partial \hat{V}}{\partial v} = \hbar\left(\dfrac{t_{12}}{v} + \cdots\right)\hat{V}$

という標準形になり、前と同様に $(*_4)^\wedge$ i), ii) の解

$$\hat{V}_{((12)3)4}(v,u) = U_{((12)3)4}(v,u) \cdot v^{\hbar t_{12}} u^{\hbar(t_{12}+t_{13}+t_{23})}$$

（U は正則、$U_{\cdots}(0,0)=1$）

および ~~[illegible]~~ near $(\overset{v}{1}, \overset{u}{0})$ での解

$$\hat{V}_{(1(23))4}(v,u) = U_{(1(23))4}(v,u)(1-v)^{\hbar t_{23}} u_3^{\hbar(t_{12}+t_{13}+t_{23})}$$

（$U_{(1(23))4}(1,0)=1$，正則）

が得られ、従って対応する(KZ₄)の解

$$X_1 = W_{((12)3)4} = \hat{V}_{((12)3)4}\left(\underset{v}{\frac{z_2-z_1}{z_3-z_1}}, \underset{u}{\frac{z_2-z_1}{z_4-z_1}}\right)\cdot(z_4-z_1)^{\hbar T}, \quad T = t_{12}+t_{23}+t_{13}+t_{14}+t_{24}+t_{34}$$

$$X_2 = W_{(1(23))4} = \hat{V}_{(1(23))4}\,(v, u)\,(z_4-z_1)^{\hbar T}$$

が得られる。

near $(u_2, u_3) = (1, 1)$ では z_2, z_3, z_4 が互に接近状態にあるので新たに変数 $w = \dfrac{1-u_3}{1-u_2} = \dfrac{z_4-z_3}{z_4-z_2}$ を導入し

$$\check{V}(u_2, w) = V(u_2, \underbrace{1+(u_2-1)w}_{u_3})$$ を定義すると

$$(\check{*}_4)\ \frac{\partial \check{V}}{\partial u_2} = \frac{\partial V}{\partial u_2} + \frac{\partial V}{\partial u_3}\cdot \underset{\frac{\partial u_3}{\partial u_2}}{w} = \hbar\left(\frac{t_{12}}{u_2} + \frac{t_{23}+t_{24}+t_{34}}{u_2-1} + \frac{t_{13}}{1+(u_2-1)w}\right)\check{V}$$

$$\frac{\partial \check{V}}{\partial w} = \frac{\partial V}{\partial u_3}\cdot(u_2-1) = \hbar\left(\frac{(u_2-1)t_{13}}{1+(u_2-1)w} + \frac{t_{23}}{w-1} + \frac{t_{34}}{w}\right)\check{V}$$

となり、これは $(u_2=1, w=1)$ および $(u_2=1, w=0)$ の近傍でそれぞれ標準型となり、それぞれ漸近解

$$\check{V}_{1((23)4)} \sim (1-u_2)^{\hbar(t_{23}+t_{24}+t_{34})}\,(1-w)^{\hbar t_{23}}$$

および

$$\check{V}_{1(2(34))} \sim (1-u_2)^{\hbar(t_{23}+t_{24}+t_{34})}\,w^{\hbar t_{34}}$$

が得られ、対応する(KZ₄)の解

$$X_3 = W_{1((23)4)} = \check{V}_{1((23)4)}\cdot(z_4-z_1)^{\hbar T}$$

$$X_4 = W_{1(2(34))} = \check{V}_{1(2(34))}\cdot(z_4-z_1)^{\hbar T}$$

を得る。

これらの(KZ₄)の解は次の様な漸近展開で一意的に定まる

$$W_{((12)3)4} = X_1 \sim (z_2-z_1)^{\hbar t_{12}} (z_3-z_1)^{\hbar t_{(12)3}} (z_4-z_1)^{\hbar t_{(123)4}} \quad \text{for } |z_2-z_1| \ll |z_3-z_1| \ll |z_4-z_1|$$

$$W_{(1(23))4} = X_2 \sim (z_3-z_2)^{\hbar t_{23}} (z_3-z_1)^{\hbar t_{1(23)}} (z_4-z_1)^{\hbar t_{(123)4}} \quad |z_3-z_2| \ll |z_3-z_1| \ll |z_4-z_1|$$

$$W_{1((23)4)} = X_3 \sim (z_3-z_2)^{\hbar t_{23}} (z_4-z_2)^{\hbar t_{(23)4}} (z_4-z_1)^{\hbar t_{1(234)}} \quad |z_3-z_2| \ll |z_4-z_2| \ll |z_4-z_1|$$

$$W_{1(2(34))} = X_4 \sim (z_4-z_3)^{\hbar t_{34}} (z_4-z_2)^{\hbar t_{2(34)}} (z_4-z_1)^{\hbar t_{1(234)}} \quad |z_4-z_3| \ll |z_4-z_2| \ll |z_4-z_1|$$

$$W_{(12)(34)} = X_5 \sim (z_2-z_1)^{\hbar t_{12}} (z_4-z_3)^{\hbar t_{34}} (z_4-z_1)^{\hbar t_{(12)(34)}} \quad |z_2-z_1| \ll |z_4-z_1|,\ |z_4-z_3| \ll |z_4-z$$

さて $X_1 \cdot (z_4-z_1)^{-\hbar t_{(123)4}} \sim W_0(z_1, z_2, z_3)$

$X_2 \cdot (z_4-z_1)^{-\hbar t_{(123)4}} \sim W_1(z_1, z_2, z_3)$

であって $W_0 = W_1 \Phi_{123}$ であるから $X_1 = X_2 \circ (\Phi_{123} \otimes 1.)$

同様な考察で $X_3 \circ \Phi_{1,(23),4} = X_2$, $X_4 \circ (1 \otimes \Phi_{234}) = X_3$

$X_4 \circ \Phi_{1,2,(34)} = X_5$, $X_5 \circ \Phi_{(12),3,4} = X_1$

これから

$$\Phi_{1,2,(34)} \circ \Phi_{(12),3,4} = \Phi_{2,3,4} \cdot \Phi_{1(23)4} \circ \Phi_{123} \quad \text{(Pentagon axiom)}$$

を得る。これは4つのベクトル空間 V_1, V_2, V_3, V_4 のテンソル積

$$\begin{tikzcd}
((V_1 \otimes V_2) \otimes V_3) \otimes V_4 \arrow[r, "\simeq", "\Phi_{123}"'] \arrow[d, "\Phi_{(12),3,4}", "\simeq"'] & (V_1 \otimes (V_2 \otimes V_3)) \otimes V_4 \arrow[d, "\Phi_{1,(23),4}", "\simeq"'] \\
 & V_1 \otimes ((V_2 \otimes V_3) \otimes V_4) \arrow[d, "1 \otimes \Phi_{2,3,4}"] \\
(V_1 \otimes V_2) \otimes (V_3 \otimes V_4) \arrow[r, "\simeq", "\Phi_{1,2,(3,4)}"'] & V_1 \otimes (V_2 \otimes (V_3 \otimes V_4))
\end{tikzcd}$$

の括弧のくくり方によって，その間の結合子同型の合成が二通りの経路を通っても同じである（つまり上図が可換図式である）ことを意味するcoherence条件（MacLane）．これらの性質によってΦが非結合的代数（Drinfel'dの量子群）の結合子として利用された．（$[D]_1$，$[D]_2$）

文献は講究録1057 P.86参