数理解析研究所講究録
1140巻 2000年 80-85

群環の射影加群と Auslander-Reiten 列について

大阪市立大学理学部　河田成人 (Shigeto KAWATA)

G を有限群とする．$\mathcal{O}$は標数0の完備離散付値環，(π) は$\mathcal{O}$の極大イデアルで，剰余体 $k=\mathcal{O}/(\pi)$ の標数は $p>0$（p は $|G|$ を割り切るある素数）であるとする．Rで $\mathcal{O}$または k を表わすものとする．ここでは RG-加群といえば，R-上自由で有限生成なものとする．特に $\mathcal{O}G$-加群とは $\mathcal{O}G$-lattice を意味する．

定義　RG-加群の完全列 $\mathcal{E}:0\to Z\to Y\xrightarrow{f}X\to 0$ は次の3つの条件をみたすときに，Auslander-Reiten 列（または almost split 列）という：

（1）Xと Zは直既約；

（2）$\mathcal{E}$は分裂していない；

（3）任意の split-epi でない準同型写像 $g:W\to X$に対し，ある準同型写像 $h:W\to Y$が存在して $g=fh$ が成り立つ．

Auslander-Reiten, Roggenkamp らによって次の定理が示された．

定理（[AR], [R]）　任意の射影的でない直既約 RG-加群 X に対し，Xを最終項とするような Auslander-Reiten 列が一意的に存在する．

Auslander-Reiten 列の“一意性”から，Xを最終項とするような Auslander-Reiten 列 $0\to Z\to Y\to X\to 0$ において ZをτXと表わすことにする．$R=\mathcal{O}$のときは$\tau=\Omega$（ここでΩは Hellar 作用素，即ちΩXは Xの projective cover $P_X\to X\to 0$ の kernel）で，$R=k$ のときは$\tau=\Omega^2$であることが知られている ([AR], [R]).

Sを既約な kG-加群とし，P_Sを Sの projective cover とする．このとき $\mathrm{Rad}(P_S)$ は直既約で，P_Sの（唯一の）極大部分加群であり，さらに次のことが知られている．

命題（[AR]）　$\mathcal{S}:0\to\mathrm{Rad}(P_S)\to P_S\oplus\mathrm{Rad}(P_S)/\mathrm{Soc}(P_S)\to P_S/\mathrm{Soc}(P_S)\to 0$ が，P_Sが中間項に現われるような唯一の Auslander-Reiten 列である．

中間項に射影加群が現われるような Auslander-Reiten 列 $\mathcal{S}$ は standard Auslander-Reiten 列と呼ばれている．群環 kG は対称多元環で，$\mathrm{Top}(P_S)(:= P_S/\mathrm{Rad}(P_S))$，$\mathrm{Soc}(P_S)$ は共に既約で S に同型である．特に，$\Omega S \cong \mathrm{Rad}(P_S)$，$\Omega^{-1}S \cong P_S/\mathrm{Soc}(P_S)$ となっている．よって standard 列 $\mathcal{S}$ は次のようにも表わされる：

$$\mathcal{S} : 0 \to \Omega S \to P_S \oplus \mathrm{Rad}(P_S)/\mathrm{Soc}(P_S) \to \Omega^{-1}S \to 0$$

ところで，P_S は liftable（持ち上げ可能）である．即ち，ある射影的 $\mathcal{O}G$-lattice Q_S が存在して，$\overline{Q_S}(:= Q_S/\pi Q_S) \cong P_S$．また，任意の射影的な直既約 $\mathcal{O}G$-lattice は，ある射影的な直既約 kG-加群 P_S の lift（持ち上げ）となっている．これからこの稿で，射影的直既約 $\mathcal{O}G$-lattice Q_S が中間項に現われるような Auslander-Reiten 列について考察したい．

§1　射影的直既約 $\mathcal{O}G$-lattice の radical と Auslander-Reiten 列

群環 $\mathcal{O}G$ の Jacobson radical を $J(\mathcal{O}G)$ で表わし，射影的直既約 $\mathcal{O}G$-lattice Q_S の radical $Q_SJ(\mathcal{O}G)$ を J_S で表わすことにする．J_S は Q_S の（唯一の）極大部分加群である．次の結果は Auslander-Reiten による．

補題 1　埋め込み $\imath : J_S \hookrightarrow Q_S$ は既約写像である．さらに，$\mathcal{O}G$-lattice X から Q_S への既約写像が存在するための必要十分条件は，X が J_S の直和因子であることである．

Wiedemann の結果 [W] を使うことにより，次がわかる．

補題 2　Q_S の属する $\mathcal{O}G$-ブロックが Q_S とは非同型な直既約 $\mathcal{O}G$-lattice を持てば，$\mathrm{Soc}(J_S/\pi J_S) \cong S \oplus S$．

一般に J_S は直既約とは限らない：例えば $|G| = p$ で $(\pi) = (p)$ のとき，$J(\mathcal{O}G)$ は直可約で $J(\mathcal{O}G) \cong \mathcal{O}_G \oplus \Omega\mathcal{O}_G$．しかし無限表現型のときには次がいえる．

命題 3　Q_S の属する $\mathcal{O}G$-ブロックが無限表現型であれば，J_S は直既約である．また J_S から始まる Auslander-Reiten 列が，Q_S が中間項に現われる唯一の Auslander-Reiten 列である．

証明　J_S が直可約と仮定してみる．補題 2 より $J_S = U \oplus V$，$\mathrm{Soc}(U/\pi U) \cong \mathrm{Soc}(V/\pi V) \cong S$ となる．補題 1 から，埋め込み $U \to Q_S$ および $V \to Q_S$ はともに既約写像である．U か

ら始まる Auslander-Reiten 列の最終項は$\Omega^{-1}U$であり，Vから始まる Auslander-Reiten 列の最終項は$\Omega^{-1}V$であるが，$\mathcal{O}$-rank を考えることにより，$0 \to U \to Q_S \to \Omega^{-1}U \to 0$ および $0 \to V \to Q_S \to \Omega^{-1}V \to 0$ が Auslander-Reiten 列であるとわかる．よって，ΘをQ_Sを含むような Auslander-Reiten quiver の連結成分とすると，Θの一部分は次のようになっている：

$$\begin{array}{ccccc} U & & & & \Omega^{-1}U \\ & \searrow & & \nearrow & \\ & & Q_S & & \\ & \nearrow & & \searrow & \\ V & & & & \Omega^{-1}V \end{array}$$

Θにおいて，U，V，$\Omega^{-1}U$，$\Omega^{-1}V$と既約写像によって結ばれるような$\mathcal{O}G$-lattice は射影的なものに限られる．このことから，Θに含まれる射影的でない$\mathcal{O}G$-lattice は必ずある射影的$\mathcal{O}G$-lattice と既約写像で結ばれていることになる．このことはΘが有限グラフであることを意味し，さらには Wiedemann の結果 [W] により，このブロックが有限表現型になってしまうが，これは仮定に矛盾する．□

$Q_S/\pi Q_S \cong P_S$の socle は既約である．$\alpha \in Q_S$をこの既約な socle の生成元としたとき，

$$I_S := Q_S + \pi^{-1}\alpha\mathcal{O}G$$

とおくと，I_Sは$K\otimes_{\mathcal{O}}Q_S$ の$\mathcal{O}G$-部分加群である．このI_Sは，Q_Sを真に含むような$K\otimes_{\mathcal{O}}Q_S$の部分加群のなかで（唯一の）極小なものである．

命題 4　Q_Sの属する$\mathcal{O}G$-ブロックが無限表現型であるとする．このときI_Sは直既約で$\Omega^{-1}J_S$に同型である．よってQ_Sが中間項に現われる Auslander-Reiten 列は次のように表わされる：

$$\mathcal{A} : 0 \to J_S \to Q_S \oplus * \to I_S \to 0$$

証明　既約写像$f : Q_S \to \Omega^{-1}J_S$ について考える．補題 2 から $S \oplus S \cong \mathrm{Soc}(J_S/\pi J_S) \cong \mathrm{Top}(\Omega^{-1}J_S/\pi\Omega^{-1}J_S)$ であり，また $\mathrm{rank}_{\mathcal{O}}(J_S) = \mathrm{rank}_{\mathcal{O}}(Q_S)$ なので，$\mathrm{rank}_{\mathcal{O}}(\Omega^{-1}J_S) = \mathrm{rank}_{\mathcal{O}}(Q_S)$ が成り立つ．よって既約写像fは単射であることがわかる（一般に既約写像は単射かまたは全射であって，同型ではない）．それゆえ$\Omega^{-1}J_S$は$K \otimes_{\mathcal{O}} Q_S$の$\mathcal{O}G$-部分加群で$Q_S$を含んでいるとみなすことができる．さて$I_S$は，$Q_S$を真に含むような$K \otimes_{\mathcal{O}} Q_S$の部分

加群のなかで唯一の極小なものであるから，次のようなfの分解がある：

$$\begin{tikzcd} Q_S \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "i"'] & & \Omega^{-1}J_S \\ & I_S \arrow[ur, "j"'] & \end{tikzcd}$$

ここでi，jはともに埋め込みである．いまiはsplit-monoではないので，jがsplit-epiであり，さらに$\mathrm{rank}_{\mathcal{O}}(I_S)=\mathrm{rank}_{\mathcal{O}}(\Omega^{-1}J_S)$なので，$I_S=\Omega^{-1}J_S$となる．□

Gがp-群のとき，$\mathcal{O}G$が有限表現型になるのは次のいずれかの場合に限られることが知られている ([D])：

(i) $G=C_2$,

(ii) $G=C_3$かつ$(3)\supseteq(\pi^3)$,

(iii) $G=C_p$かつ$(p)\supseteq(\pi^2)$,

(iv) $G=C_{p^2}$かつ$(p)\supseteq(\pi)$（ここでC_{p^n}は位数p^nの巡回群を表す）．

§2　持ち上げ可能な既約 kG-加群と standard Auslander-Reiten 列

以下この節では既約kG-加群Sは持ち上げ可能とする．即ち，ある$\mathcal{O}G$-lattice Lが存在して，$L/\pi L\cong S$であるとする．このときQ_Sの radical J_Sについて次がいえる．

補題5　$J_S/\pi J_S\cong S\oplus\Omega S$.

証明　Lの projective cover $0\to\Omega L\to Q_S\to L\to 0$を考えると，$J_S=\pi Q_S+\Omega L$を得る．よって，$J_S/\pi J_S=(\pi Q_S+\pi J_S)/\pi J_S\oplus(\Omega L+\pi J_S)/\pi J_S$となる．ここで，$(\pi Q_S+\pi J_S)/\pi J_S=\pi Q_S/(\pi^2Q_S+\pi\Omega L)\cong Q_S/(\pi Q_S+\Omega L)\cong S$．また$(\Omega L+\pi J_S)/\pi J_S=(\Omega L+\pi^2Q_S+\pi\Omega L)/(\pi^2Q_S+\pi\Omega L)\cong\Omega L/(\Omega L\cap(\pi^2Q_S+\pi\Omega L))=\Omega L/\pi\Omega L$（最後の等号は，$\Omega L$が$Q_S$の pure 部分加群であることから）．□

さらに，P_Sが現われる standard Auslander-Reiten 列$\mathcal{S}$と，Q_Sが現われる Auslander-Reiten 列$\mathcal{A}:0\to J_S\to Q_S\oplus *\to I_S\to 0$との間に次のような関係がある．

定理6　既約kG-加群Sは持ち上げ可能でQ_Sは無限表現型の$\mathcal{O}G$-ブロックに属しているとする．このとき，Auslander-Reiten 列$\mathcal{A}$を$\mathrm{mod}(\pi)$で reduction して得られるkG-加群の完全列$\overline{\mathcal{A}}:0\to J_S/\pi J_S\to Q_S/\pi Q_S\oplus *\to I_S/\pi I_S\to 0$は，standard Auslander-Reiten

列 $\mathcal{S}$ と分裂列 $0 \to S \to S \oplus S \to S \to 0$ の直和である．

証明　（詳しくは [K] を見てください．）L の（$\mathcal{O}G$-lattices の圏における）injective hull は Q_S なので，L は Q_S の pure 部分加群とみなすことができる．このとき $(L+\pi Q_S)/\pi Q_S = \mathrm{Soc}(Q_S/\pi Q_S)$ なので，$I_S = Q_S + \pi^{-1}L \subseteq K \otimes_{\mathcal{O}} Q_S$ である．

今，$\varphi : Q_S \to L$ を projective cover とする．$L \subseteq Q_S$ なので $\varphi \in \mathrm{End}_{KG}(K \otimes_{\mathcal{O}} Q_S)$ とみなし，$\mu : \pi^{-1}\varphi$ とおくと，$\mu(I_S) \subseteq I_S$ が確かめられる．さらにこの $\mu \in \mathrm{End}_{\mathcal{O}G}(I_S)$ は $\mathrm{Soc}(\mathrm{End}_{\mathcal{O}G}(I_S)/\mathrm{Proj}(\mathrm{End}_{\mathcal{O}G}(I_S)))$ の生成元であることも確かめられる（次の注意 7 参照）．よって I_S を最終項とする Auslander-Reiten 列 $\mathcal{A}$ は，I_S の projective cover と μ による pull back として構成される ([R1], [T])：

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & J_S & \longrightarrow & Q_S \oplus \ * & \longrightarrow & I_S & \longrightarrow & 0 \\
 & & \Vert & & \downarrow & \text{pull back} & \downarrow \mu & & \\
0 & \longrightarrow & \Omega I_S & \longrightarrow & Q_S \oplus Q_S & \longrightarrow & I_S & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

このことから $\mathcal{A}$ の各項を mod (π) で reduction して得られる完全列 $\overline{\mathcal{A}}$ は，$I_S/\pi I_S \cong \Omega^{-1}S \oplus S$ の projective cover と $\overline{\mu} : \Omega^{-1}S \oplus S \to \Omega^{-1}S \oplus S$ による pull back である．しかるに，μ の定義から $\overline{\mu}(\Omega^{-1}S) = S$，$\overline{\mu}(S) = 0$ なので，$\overline{\mathcal{A}}$ は次の 2 つの pull back の直和となっている：

$$\begin{array}{ccc}
 & & \Omega^{-1}S \\
 & & \downarrow \overline{\mu}|_{\Omega^{-1}S} \\
P_S & \longrightarrow & S
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{ccc}
 & & S \\
 & & \downarrow \overline{\mu}|_S \\
P_S & \longrightarrow & \Omega^{-1}S
\end{array}$$

ここで左側の pull back は，$\overline{\mu}|_{\Omega^{-1}S}$ が 0-map ではないので，standard Auslander-Reiten 列 $\mathcal{S}$ である．また右側の pull back は，$\overline{\mu}|_S$ が 0-map なので，分裂列である．□

注意 7　定理 6 の証明における $\mu \in \mathrm{End}_{\mathcal{O}G}(I_S)$ は $\mathrm{Soc}(\mathrm{End}_{\mathcal{O}G}(I_S)/\mathrm{Proj}(\mathrm{End}_{\mathcal{O}G}(I_S)))$ の生成元である．

証明　定理 6 の証明の記号等を続けて使うことにする．また $Q_S = e\mathcal{O}G$（e は $\mathcal{O}G$ のある巾等元）とおく．このとき $I_S = e\mathcal{O}G + \pi^{-1}\alpha\mathcal{O}G$ と表され，$f \in \mathrm{End}_{\mathcal{O}G}(I_S)$ は $f(e)$ で決定される．ここで $f \in \mathrm{Rad}(\mathrm{End}_{\mathcal{O}G}(I_S))$ であるための必要十分条件は，$f(e) \in eJ(\mathcal{O}G) + \pi^{-1}\alpha\mathcal{O}G$ であることに注意する．よって，特に $f \in \mathrm{Rad}(\mathrm{End}_{\mathcal{O}G}(I_S))$ ならば，$\overline{f} \in \mathrm{End}_{kG}(\Omega^{-1}S \oplus S)$ を考えると，$\mathrm{Im}\ \overline{f} \subseteq \mathrm{Ker}\ \overline{\mu}$ となる．それゆえ $\overline{\mu \circ f}$ は 0-map で $\mu \circ f \in \pi\mathrm{End}_{\mathcal{O}G}(I_S) \subseteq \mathrm{Proj}(\mathrm{End}_{\mathcal{O}G}(I_S))$ が任意の $f \in \mathrm{Rad}(\mathrm{End}_{\mathcal{O}G}(I_S)$ に対して成り立つので，μ は $\mathrm{Soc}(\mathrm{End}_{\mathcal{O}G}(I_S)/\mathrm{Proj}(\mathrm{End}_{\mathcal{O}G}(I_S)))$ の生成元であることがわかる．□

系8　既約 kG-加群 Sは持ち上げ可能で Q_Sは無限表現型の $\mathcal{O}G$-ブロックに属しているとする．このとき，$vx(J_S) = vx(S)$.

証明　$J_S/\pi J_S \cong S \oplus \Omega S$なので $vx(J_S) \geq vx(S)$．逆に，定理6より Sが$\overline{\mathcal{A}}$の直和因子なので，特に $\mathcal{A}$ を $vx(S)$ に制限しても分裂せず，それゆえ $vx(J_S) \leq vx(S)$ が従う ([R2])．□

参考文献

[AR] Auslander, M. and Reiten, I.: *Representation theory of artin algebras V: Methods for computing almost split sequences and irreducible morphisms*, Comm. Algebra **5**(1977), 519–544.

[B] Benson, D. J.: Representations and cohomology I, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, Vol. 30, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1991.

[D1] Dieterich, E.: *Construction of Auslander-Reiten quivers for a class of group rings*, Math. Z. **183**(1983), 43–60.

[D2] Dieterich, E.: *Group rings of wild representation type*, Math. Ann. **266**(1983), 1–22.

[E] K. Erdmann: Blocks of Tame Representation Type and Related Algebras, Lecture Note in Mathematics, Vol. 1428, Springer-Verlag, Berlin/New York, 1990.

[K] Kawata, S.: *On standard Auslander-Reiten sequences for finite groups*, to appear in Arch. Math.

[R1] Roggenkamp, K. W.: *The construction of almost split sequences for integral group rings and orders*, Comm. Algebra **5**(1977), 1363–1373.

[R2] Roggenkamp, K. W.: Integral representations and structure of finite group rings, Les Presses de l'Université de Montréal, Montréal, 1980.

[T] Thévenaz, J.: *Duality in G-algebras*, Math. Z. **200**(1988), 47–85.

[W] Wiedemann, A.: *Brauer-Thrall I for orders and its application to orders with loops in their Auslander-Reiten graph*, in: Representations of Algebras, Proceedings, Puebla, Mexico 1980, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 903, Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/New York, 1981.