数理解析研究所講究録
1141 巻 2000 年 145-154

MHD 乱流の GOY 型シェルモデルとアルヴェーン効果

九工大工　服部 裕司 (Yuji Hattori)
原研那珂　石澤 明宏 (Akihiro Ishizawa)

Abstract

MHD 乱流の統計的性質を GOY 型のシェルモデルと直接数値計算により調べた。シェルモデルについては磁場の秩序構造によるアルヴェーン効果を導入した結果、Iroshnikov-Kraichnan の議論より導かれる $k^{-3/2}$ に比例するエネルギースペクトルが得られることがわかった。また、シェルモデルの PDF と、直接数値計算の結果より得られたウェーブレット係数の PDF の比較を行なった。

1 Introduction

MHD 乱流の性質を知ることは、宇宙空間プラズマ、核融合プラズマの巨視的挙動を理解する上で重要であるだけでなく、non-MHD の乱流理論との関係においても興味深いものである。しかしながら、実験観測が必ずしも容易でないことなどにより、MHD 乱流の性質はよく理解されているとは言いがたい。例えば、一様かつ等方的な MHD 乱流の慣性領域におけるエネルギースペクトルのスケーリング則については二つの有力な理論がある。一つは Kolmogorov の non-MHD の乱流に関する $k^{-5/3}$ 則がそのまま成り立つと考えるものである。もう一つは Iroshnikov と Kraichnan により独立に議論されたもの [1] で、アルヴェーン効果を考慮すると $k^{-3/2}$ に比例したエネルギースペクトルが導出されるというものである。より詳しくは以下の通りである。MHD 乱流においてしばしば出現する大規模な秩序的磁場の平均的な大きさを B_C とするとき、アルヴェーン波の存在によりエネルギー散逸率 ϵ はアルヴェーン波の特性時間 $\tau_A = (B_C k)^{-1}$ に比例する

$$\epsilon \propto (B_C k)^{-1}$$

と仮定する。この仮定の下で通常の次元解析を行なうと $k^{-3/2}$ に比例したスペクトルが得られる。太陽風の観測データは概ね $k^{-5/3}$ 則を支持しているようであるが [2]、二次元の直接数値計算結果では $k^{-3/2}$ 則に近いスペクトルが得られている [3, 4]。これらの二種類のスケーリング則がどのような条件下で成り立つか、また他のスケーリング則の可能性について調べることは重要なことであると考えられる。

本稿では、MHD 乱流の統計的性質について、GOY 型のシェルモデルと直接数値計算 (DNS) を用いて研究した結果について報告する。特に GOY 型シェルモデルについてアルヴェーン効果の導入法が重要であることを示し、改良されたシェルモデルと DNS の比較を行なう。

2 MHD 乱流のシェルモデル

MHD 乱流のシェルモデルについてはこれまでにいくつかの研究がある [5-9]。最初のものは Gloaguen *et al.*[5] で、主に低次元におけるカオス的挙動について調べている。GOY 型のシェルモデルを MHD 乱流に拡張して調べたのは Biskamp[7] が最初のようである。ここでは、複素共役の取り方が元々の GOY 型のシェルモデルと異なる "Sabra model" [10] 型のモデルを考える。

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}Z_n^\pm}{\mathrm{d}t} &= i\alpha k_{n+1}Z_{n+1}^{\pm*}Z_{n+2}^{\mp} + i\beta k_{n+1}Z_{n+1}^{\mp*}Z_{n+2}^{\pm} - i\alpha k_n Z_{n-1}^{\pm*}Z_{n+1}^{\mp} \\ &\quad + i\gamma k_n Z_{n-1}^{\mp*}Z_{n+1}^{\pm} + i\beta k_{n-1}Z_{n-2}^{\pm}Z_{n-1}^{\mp} + i\gamma k_{n-1}Z_{n-2}^{\mp}Z_{n-1}^{\pm} \\ &\quad -\nu k_n^2 Z_n^\pm \pm i k_n B_C Z_n^\pm + f_n^\pm. \end{aligned} \tag{1}$$

ここで、$Z_n^\pm$ は波数 $k_n = k_0\lambda^n$ の Elsässer 変数 $\boldsymbol{Z}^\pm = \boldsymbol{u} \pm \boldsymbol{B}$ の代表モード (シェル変数) であり、α, β, γ は定数、ν が散逸率に相当する (磁気 Prandtl 数を 1 としている)。$f_n^\pm$ は外力に相当する項であるが、MHD 乱流のシェルモデルでは外力の入れ方によっては一方の Elsässer 変数にエネルギーが偏ってしまう現象が起き [8]、長時間平均を取るのに適さないため、実際には最も低波数のシェル変数 $Z_1^\pm$ を固定することで外力を導入した。

上のモデルは Biskamp のモデルと同様に $\nu = 0$ の場合には元々の MHD 方程式の (散逸がない場合の) 保存量に対応する保存量をもつ。すなわち、

$$\text{全エネルギー} \qquad E_T = \frac{1}{4}\sum_n (|Z_n^+|^2 + |Z_n^-|^2)$$

$$\text{クロスヘリシティ} \qquad H_C = \frac{1}{4}\sum_n (|Z_n^+|^2 - |Z_n^-|^2)$$

が $\nu = 0$ の場合の保存量となる。さらに定数 α, β, γ に

$$\frac{\beta}{\alpha} = -\frac{\lambda^{2\delta} - \lambda^{2\delta} + 1}{\lambda^{2\delta} + \lambda^{2\delta} - 1}, \qquad \frac{\gamma}{\alpha} = -\frac{\lambda^{2\delta} - \lambda^{2\delta} - 1}{\lambda^{2\delta} + \lambda^{2\delta} - 1}$$

の関係を課すと

$$H_M = \sum_n k_n^\delta |B_n|^2$$

が保存量となる。H_M の保存は $\delta = -2$ と選ぶことにより二次元の場合の磁気ポテンシャルの保存に対応し、$\delta = -1$ または $\lambda^{\delta+1} = -1$ と選ぶことにより磁気ヘリシティの保存

と対応すると考えることができるが、H_M と磁気ヘリシティとの対応は必ずしも自明ではない。

上のモデルにおいて $ik_nB_CZ_n^{\pm}$ の項をアルヴェーン項と呼ぶことにする。MHD 乱流においては、二次元の場合には保存量の selective decay の結果として大規模な磁場が出現することがある。また大規模な磁場が外部磁場として与えられている場合などもある。アルヴェーン項はこのような大規模な磁場の効果を表す項として導入されている。アルヴェーン項は Gloaguen *et al.*[5] においても議論されているが、実際にその効果を最初に調べたのは Biskamp[7] のようである。アルヴェーン項によりエネルギー輸送にアルヴェーン時間 τ_A が導入され、Iroshnikov-Kolmogorov の $k^{-3/2}$ 則が実現されると期待されるが、Biskamp[7] によれば、$\lambda = 2$ で B_C を定数とした場合にはエネルギースペクトルは 2 つの異なる指数をもつスケーリング領域に分かれる。すなわち、低波数側では $k^{-5/3}$ 則に近くなり、高波数側では $k^{-3/2}$ よりも大きさの小さい指数 (~ -1.25) をもつようになる。

われわれは、上の単純なアルヴェーン項が $k^{-3/2}$ 則を導かない理由を明確にするために、上のモデルについて次の二つのテストを行なった。一つにおいては B_C は一定とし、波数の大きさの比 λ を最もよく選ばれる 2 よりも小さい値を選ぶ。具体的には $\lambda = 2^{1/2}, 2^{1/4}$ の場合を調べた。もう一つでは秩序的な磁場の大きさ B_C を時間的に次のように変動させる

$$
\begin{aligned}
B_{C,n} &= \overline{B_C} + B'_{C,n}, \\
\frac{\mathrm{d}B'_{C,n}}{\mathrm{d}t} &= -\frac{B'_{C,n}}{\tau_n} + g(t), \\
\tau_n &= \frac{1}{k_n\overline{B_C}}.
\end{aligned}
$$

ここで $g(t)$ は Gaussian white noise である。これにより $B'_{C,n}$ は

$$
< B'_{C,n}(t)B'_{C,n}(s) > \ \propto \ \exp\left(-\frac{|t-s|}{\tau_n}\right)
$$

のように、τ_n の相関時間をもつランダムな磁場のゆらぎ成分となる [11]。

$\lambda = 2$ として B_C を定数とした場合に $k^{-3/2}$ 則が見られなかった理由は、アルヴェーン項が過剰にコヒーレントであり、各シェル変数の位相が短時間の周期で変動するために非線形項が殆んど効かなくなってしまう点にあると考えられる。上の二つのテスト、特に後者では、ランダム性を入れることによりこの位相コヒーレンシーを緩めている。これは、元々の MHD 乱流では各シェル変数は対応するスケールの多数のモードを代表しているが、その統計性を取り入れることに対応していると考えることもできる。

3 結果

3.1 計算方法とパラメタ

シェルモデルについては古典的な Runge-Kutta 法で数値計算を行なった。定数は $\alpha = -0.5, \beta = 1.5, \gamma = -1$ とした。この場合には H_M は非散逸の保存量ではない。散逸率はいずれの場合にも $\nu = 2 \times 10^{-8}$ とした。外力は最も低波数のモードを $Z_1^{\pm} = 0.5 \pm 0.5i$ と固定することにより導入した。B_C 一定の場合には波数比 λ とシェルの総数 N の比について $(\lambda, N) = (2, 26), (2^{1/2}, 45), (2^{1/4}, 85)$ の三つの場合を考えた。B_C をランダムにした場合については、その平均とゆらぎの二乗平均がともに $B_1 = (Z_1^+ - Z_1^-)/2i$ に等しくなるようにした。つまり

$$\overline{B_{C,n}} = \left(\overline{B'^2_{C,n}}\right)^{1/2} = B_1$$

である。また、後者の場合には $(\lambda, N) = (2, 26)$ とした。

DNS については、二次元の減衰 MHD 乱流を考え、擬スペクトル法により 2048^2 個のモードを用いて計算を行なった。速度場と磁場のウェーブレット解析を行ない、その分布に注目した。DNS とウェーブレット解析に関する詳細は Ishizawa and Hattori[4] に記述されている。

3.2 エネルギースペクトル

Figure 1 は B_C 一定の場合のエネルギースペクトルである。$k^{-3/2}$ 則との違いを明確にするためにスペクトルに $k^{3/2}$ をかけてある。Figure 1(a) は $\lambda = 2$ の場合に $B_C/B_1 = 0.1, 0.3, 1$ としたときのものである。低波数側ではエネルギースペクトルは $k^{-5/3}$ に近いが、高波数側では $k^{-3/2}$ よりも平坦な (指数の大きさの小さい) スペクトルになることがわかる。また、二つの領域の境は B_C が大きくなると低波数側に寄ることもわかる。以上の結果は Biskamp[7] の結果と本質的に同じである。Figure 1(b) は $\lambda = 2^{1/4}$ の場合のエネルギースペクトルである。$B_C/B_1 = 1, 3$ の場合が $k^{-3/2}$ 則に近くはなっているが、全体的に依然として二つのスケーリング領域が見られる。Figure 1(a) と比較すると高波数側の指数は λ によって異なることもわかる。

一方、B_C をランダムにした場合については Figure 2 に示すようにスペクトルは $k^{-3/2}$ に近くなる。

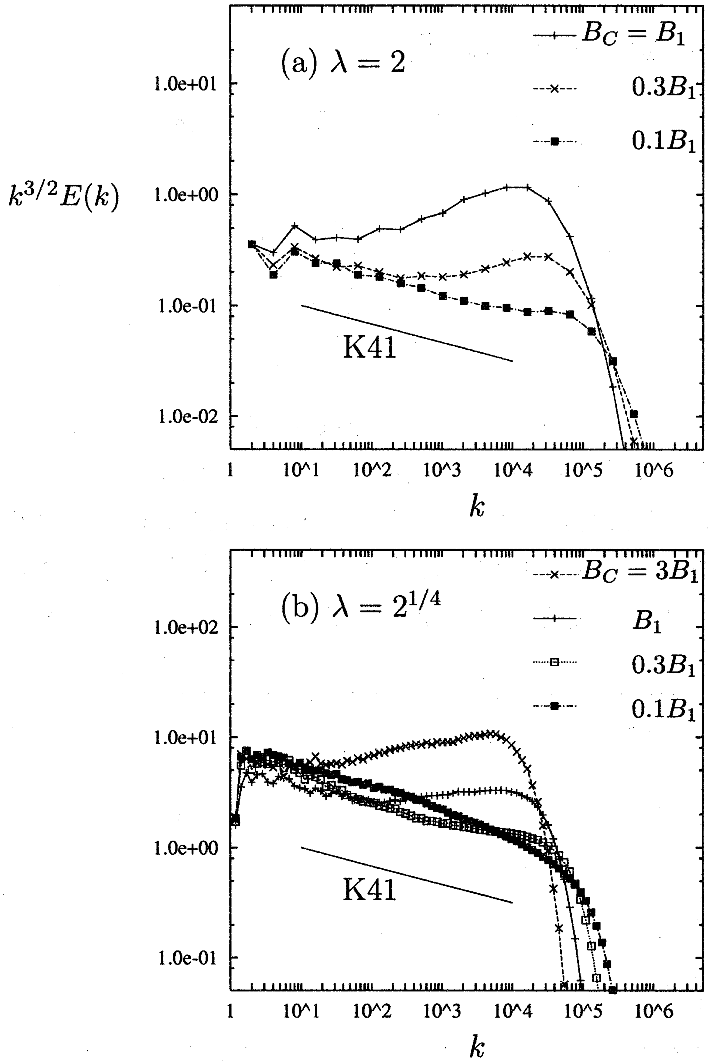

Figure 1: エネルギースペクトル ($k^{3/2}$ を乗じてある), B_C 一定の場合.

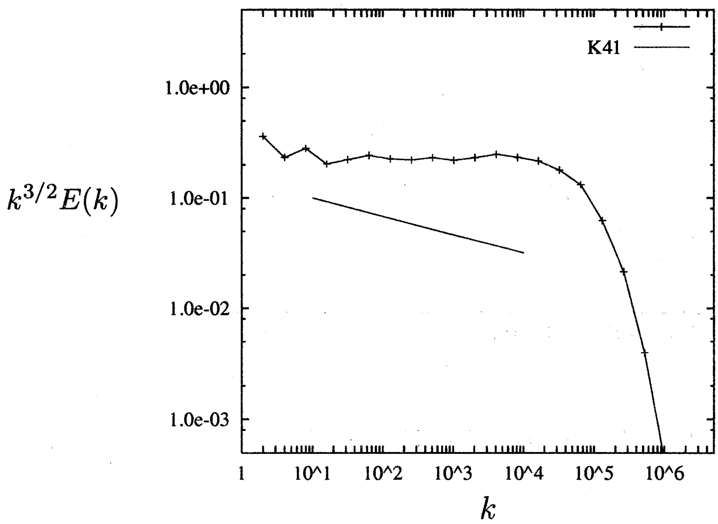

Figure 2: エネルギースペクトル, B_C がランダムの場合.

3.3 エネルギー変動と輸送の特性時間

B_C がランダムな場合と一定の場合の違いの原因を明確にするために次のように定義されるシェル間の相関を調べた

$$
\begin{aligned}
Cor(f;n,l;\tau) &= \frac{\overline{f'_n(t)f'_l(t+\tau)}}{\sqrt{\overline{f'^2_n}}\sqrt{\overline{f'^2_l}}},\\
f_n &= \overline{f_n} + f'_n.
\end{aligned}
$$

ここで f_n としてはシェルの全エネルギー E_n と輸送関数 T_n を考えた。Figure 3 は $f_n = E_n, l = n+1$ とした場合の相関である。B_C が一定の場合 (a) には n が大きくなるにしたがい相関が小さくなるのに対し、B_C がランダムの場合にはある程度の相関が保たれていることがわかる。つまり、高波数におけるエネルギー輸送が前者では効果的に行なわれなくなっているのに対し、後者では行なわれていることを示している。

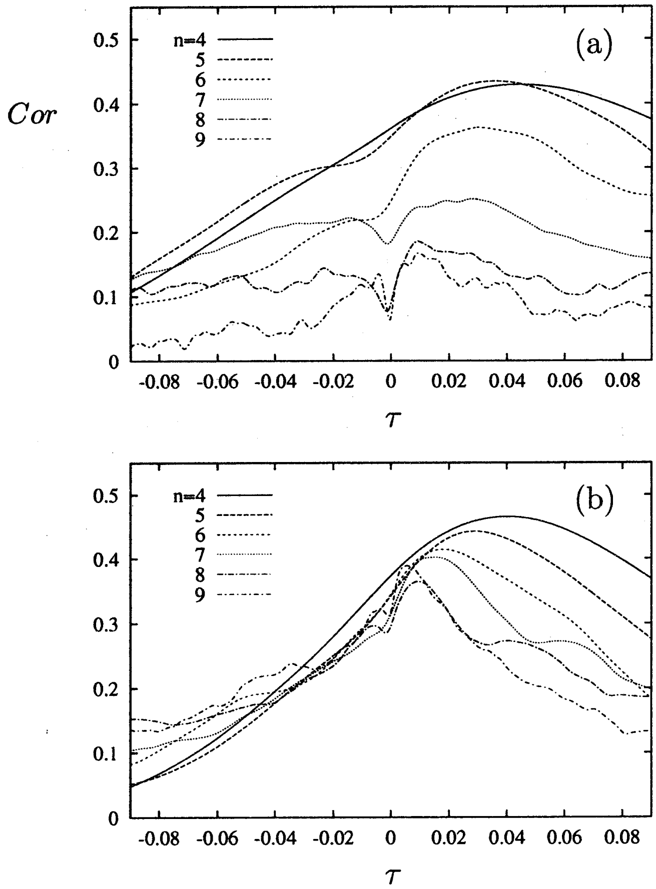

Figure 3: シェルのエネルギーの相関, (a) B_C 一定, (b) B_C ランダム.

さらに、B_C がランダムの場合に $l=n$ としたときの $f_n=E_n, T_n$ の相関を Figure 4 に示す。この図においては時間差 τ を、$f_n=E_n$ については $\tau_1 \propto \tau k_n^{3/4}$ のように、$f_n=T_n$ については $\tau_2 \propto \tau k_n$ のようにスケーリングしてある。両者とも相関の値の高いところで線が一致していることがわかる。これは、エネルギーの振動については Iroshnikov-Kraichnan の議論の下での "eddy turnover time" が特性時間となっており、一方エネルギー輸送についてはアルヴェーン時間 τ_A が特性時間となっていることを示唆しており、モデルが Iroshnikov-Kraichnan の描像によく合うことがわかる。

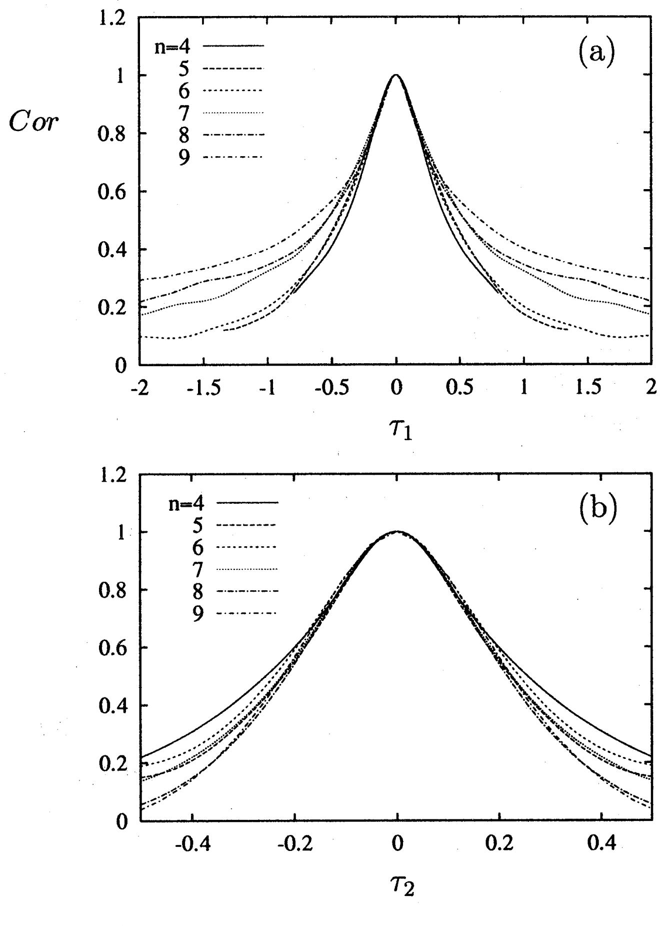

Figure 4: シェルの相関 (B_C がランダムの場合), (a) エネルギー変動, (b) エネルギー輸送.

3.4 PDF

シェルモデルが元々の系の性質をうまく反映しているかどうかの一つのチェックとして、確率分布関数 (PDF) の比較を行なった。シェルモデルについては $Re(u_n)$ の PDF を、DNS についてはウェーブレット係数 $\tilde{u}_{xpq}^{jr}$ の PDF を取った。

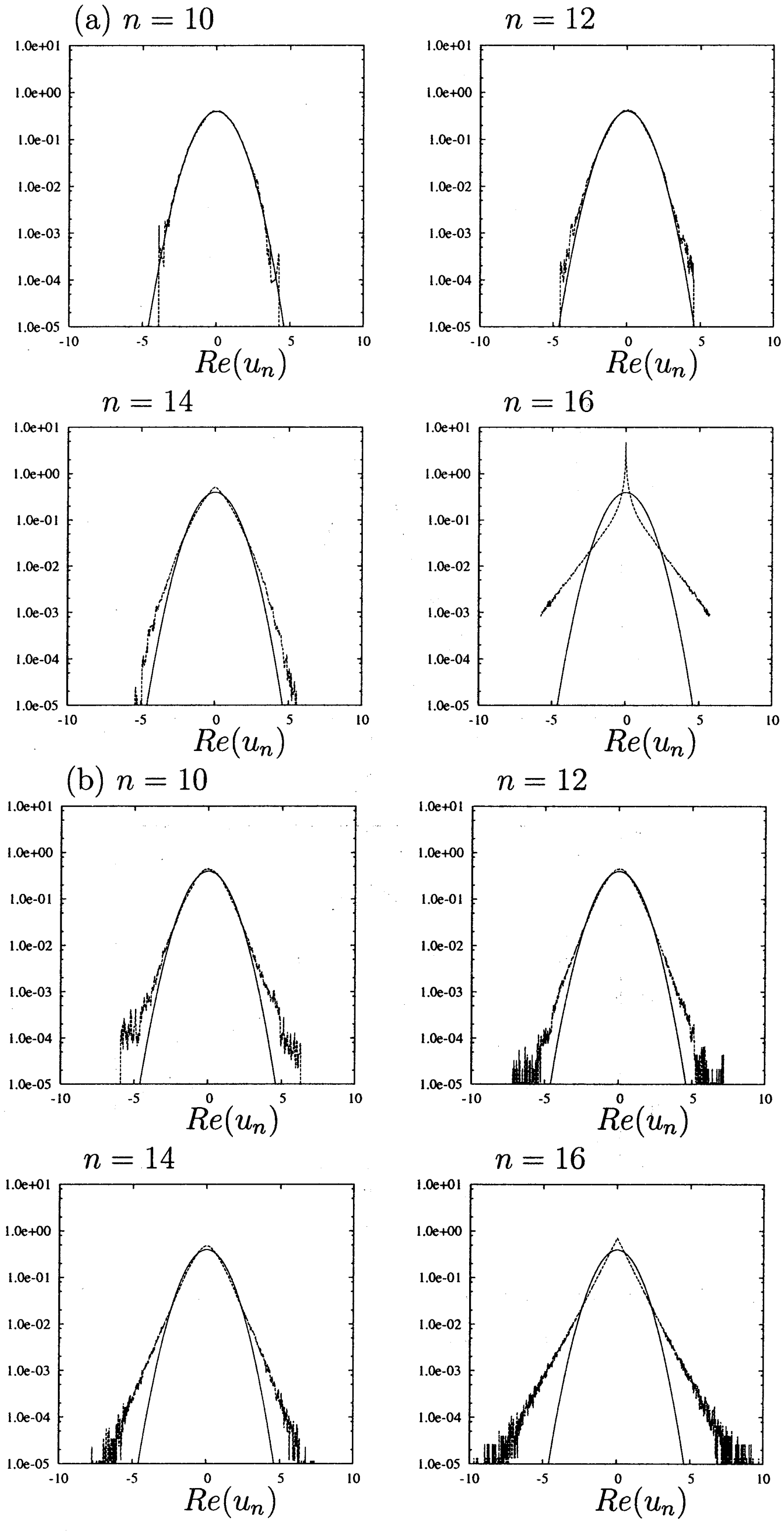

Figure 5: シェルモデルの PDF, (a) B_C 一定, (b) B_C ランダム.

シェルモデルの PDF を Figure 5 に、DNS の PDF を Figure 6 に示す。シェルモデルについては、$n=10,12$ は慣性領域にあり、$n=14$ が境目付近、$n=16$ は散逸領域にある。B_C 一定の場合、慣性領域ではガウス分布に近いが、散逸領域に入ると強い間欠性を示す。これに対して、B_C がランダムの場合はガウス分布から n が大きくなるにしたがい tail が伸び、$n=16$ で指数分布に近くなっていることがわかる。DNS の PDF については、慣性領域の代表として $j=5$ を、散逸領域の代表として $j=7$ を選んだ。$j=5$ の場合の PDF は参照点が少ないため明確ではないが B_C がランダムの場合に近く、$j=7$ の場合の PDF はどちらかといえば B_C が一定の場合の分布に近い。しかしながら散逸領域において、それぞれの絶対値(シェルモデルについては $|u_n|$、DNS については $[\sum_j\{(\tilde{u}_{x pq}^{jr})^2+(\tilde{u}_{y pq}^{jr})^2\}]^{1/2}$)の PDF をとると、DNS の PDF は B_C がランダムの場合と近くなることがわかる (Figure 7)。アルヴェーン効果の導入により位相が激しく変動しているため、その直接的な影響を受けない絶対値(またはシェルのエネルギー)の PDF の方が信頼できる可能性もあり、その点では B_C をランダムにしたモデルの方がモデルとしてよいことを示唆している。

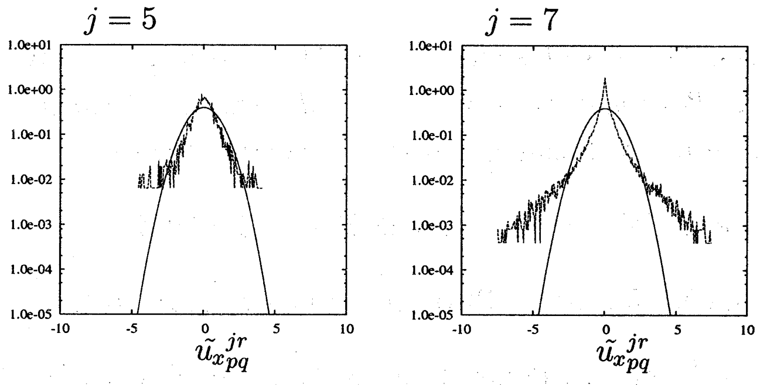

Figure 6: DNS の PDF(ウェーブレット係数).

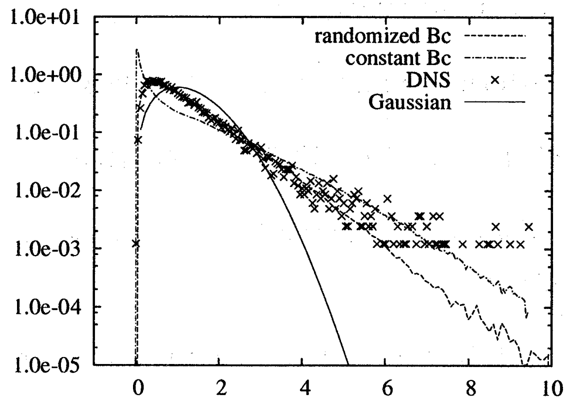

Figure 7: 絶対値の PDF, $n=16$ (シェルモデル), $j=7$ (DNS).

4 まとめ

MHD 乱流の統計的性質のいくつかを GOY 型のシェルモデルと DNS により調べた。シェルモデルについてアルヴェーン効果を考慮し、秩序的な磁場の大きさにランダム性を導入することにより、Iroshnikov-Kraichnan の描像に合うモデルが構成されることがわかった。すなわち、エネルギースペクトルは $k^{-3/2}$ 則にしたがい、エネルギー輸送はアルヴェーン時間を特性時間とする。シェルモデルと DNS による PDF の比較を行ない、まずまず一致することがわかった。得られたシェルモデルは MHD 乱流のモデル方程式として有望であるが、その適用範囲を含めて今後さらに詳しい性質を調べる必要があると考えられる。

References

[1] P. S. Iroshnikov: Astron. Zh. **40** (1963) 742.; R. H. Kraichnan: Phys. Fluids **8** (1965) 1385.

[2] D. A. Roberts, M. L. Goldstein, W. H. Matthaeus and L. W. Klein: in *Proceedings of the Workshop on Turbulence and Nonlinear Dynamics in MHD Flows* (eds. M. Meneguzzi, A. Pouquet and P. L. Sulem), (1988) 87.

[3] D. Biskamp and H. Welter: Phys. Fluids B **1** (1989) 1964.

[4] A. Ishizawa and Y. Hattori: J. Phys. Soc. Jpn. **67** (1998) 441.

[5] C. Gloaguen, J. Léorat, A. Pouquet and R. Grappin: Physica D **17** (1985) 154.

[6] V. Carbone: Phys. Rev. E **50** (1994) R671.

[7] D. Biskamp: Phys. Rev. E **50** (1994) 2702.

[8] P. Giuliani and V. Carbone: Europhys. Lett. **43** (1998) 527.

[9] P. Frick and D. Sokoloff: Phys. Rev. E **57** (1998) 4155.

[10] V. S. L'vov, E. Podivilov, A. Pomyalov, I. Procaccia and D. Vandebroucq: Phys. Rev. E **58** (1998) 1811.

[11] R. F. Fox, I. R. Gatland, R. Roy and G. Vemuri: Phys. Rev. A **38** (1988) 5938.