

## 2次元自由対流乱流の微細構造のダイナミクス

京大院・理  
藤 定義、松本 剛

### 1 はじめに

一様等方乱流では、微細な秩序渦構造が存在することが知られている。この秩序渦の形状は、管の直径が Kolmogorov 長の 10 倍程度、長さが積分長程度で、近似あるいは平均の意味で Burgers の渦管と同定されている。更に、壁乱流や境界層乱流等にもこの様な秩序渦が存在することが明らかにされ、乱流を生成する機構に因らない普遍的な存在であることが知られるようになった。しかし、これらの微細渦の乱流特性への寄与については、そのレイノルズ数依存性を含め手付かずの状態でありこれからの課題となっている。微細秩序渦の研究の現状については、本講究録に収録されている木田氏の報告を参照されたい。

本報告では、2次元自由対流 (2DFC) 系でも同様な秩序構造が存在することを示し、3次元 Navier-Stokes (3DNS) 系と共通する類似の機構で乱流が構成されていること、すなわち何がしかの普遍的機構、特性が存在することを示す。

### 2 2次元自由対流と $T$ 渦度

2次元自由対流 (2DFC) は、以下のような2次元ブシネ近似方程式に従う系である [1]。

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\frac{1}{\rho_0}\nabla p + \nu\Delta\mathbf{u} + \alpha g T \mathbf{e}_y, \quad \nabla\cdot\mathbf{u} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{DT}{Dt} = \kappa\Delta T \quad (2)$$

$$\frac{D\omega}{Dt} = \nu\Delta\omega + \alpha g \frac{\partial T}{\partial x} \quad (3)$$

高レイリー数での熱対流乱流はハード乱流と呼ばれ、様々な興味深い特性をもつが、2DFC はその中央領域の一様乱流<sup>†</sup>のモデルであり、平均温度勾配はない事に注意して欲しい。従って、乱流を維持するためには温度の発展方程式に外力 (熱の注入) が必要である。速度場は、浮力を通してポテンシャルエネルギーが運動エネルギーに変換されることで駆動される。

<sup>†</sup>当然だが、重力があるので等方ではない。ただし、乱流状態では局所的に等方性が成り立つと期待する。

2次元自由対流系は非粘性の場合、2つの保存量<sup>†</sup>を持つ。うち1つは、エントロピー<sup>‡</sup>である。

$$S = \int \frac{1}{2} T^2 dS. \quad (4)$$

ここで積分は全領域で行う。

慣性領域では、エントロピーカスケードを仮定すると、エントロピーと運動エネルギーのスペクトル、 $S(k)$ と $E(k)$ 、が次のように求まる。

$$S(k) \sim \epsilon_\theta^{4/5} (\alpha g)^{-2/5} k^{-7/5}, \quad (5)$$

$$E(k) \sim \epsilon_\theta^{2/5} (\alpha g)^{4/5} k^{-11/5}, \quad (6)$$

ただし、 $\epsilon_\theta$  はエントロピー散逸率で、局所エントロピー散逸率、 $\epsilon_\theta(\mathbf{x}) \equiv \kappa \nabla T \cdot \nabla T$  を空間平均したものである。渦回転時間 (eddy turnover time) に対応する特性時間も同様に得られる。

$$\tau_l \sim \epsilon_\theta^{-1/5} (\alpha g)^{-2/5} l^{2/5}. \quad (7)$$

次に、ベクトルの物理量である  $T$  渦度を導入する。

$$\chi \equiv \left( \frac{\partial T}{\partial y}, -\frac{\partial T}{\partial x} \right) \quad (8)$$

以下に示す  $T$  渦度の発展方程式 (9) は、3次元の渦度のそれと同じ形をしており、伸長項をもつ。この意味で、 $T$  渦度は渦度と良く似た振舞をすることが予想できる。

$$\frac{D\chi}{Dt} = \chi \cdot \nabla \mathbf{u} + \kappa \Delta \chi \quad (9)$$

また、 $T$  渦度の局所的な大きさは、以下のようにエントロピー散逸率に比例する。

$$\chi \cdot \chi = \nabla T \cdot \nabla T = \frac{\epsilon_\theta(\mathbf{x})}{\kappa} \quad (10)$$

このことは、3次元 NS 乱流におけるワームとは異り、 $T$  渦構造が散逸領域のダイナミクスをも併せて記述できることを意味する。従って、乱流特性と秩序構造の関係が直接理解できると期待できる。ただし、速度場の情報が増えているので、必ずしも 2DFC 系が 3DNS 系に優位であるとは言えない。この事情は 3DNS 系でも同じで、秩序渦構造はその定義から必ずしも渦管のように流体に凍結しておらず、渦構造だけで閉じたダイナミクスを与えない。

<sup>†</sup>正確に言えば、温度  $T$  の任意関数は保存する。

<sup>‡</sup>エントロピーを温度揺らぎで展開し、平均  $\langle T \rangle$  がゼロであることを用いると、2次の項に比例することが分かる。ただし、展開係数は負である。温度の散逸 (拡散) がある場合、外力 (熱の流入) が無ければ終状態は一様状態になるが、平均がゼロであるので2乗平均もゼロとなり、エントロピー最大となる。

## 2.1 バーガース $T$ 渦層解

$T$  渦度は、3次元渦度と同型の方程式に従う。従って、バーガース渦層に対応する  $T$  渦層解が存在する。淀み点流  $\mathbf{U} = (-Ax, Ay)$ , ( $A > 0$ ) により維持される定常解  $\mathbf{u} = \mathbf{U} + (0, v(x))$ ,  $T = T(x)$  を考える。このとき、 $T$  渦度と渦度はそれぞれ、 $(0, dT/dx) \equiv (0, \chi(x))$ 、 $(0, 0, \omega(x)) = (0, 0, dv/dx)$  と表せる。 $\chi$  と  $\omega$  は、以下の式を満たす。

$$A\chi + Ax \frac{d\chi}{dx} + \kappa \frac{d^2\chi}{dx^2} = 0 \quad (11)$$

$$-\alpha g \cos \theta \chi + Ax \frac{d\omega}{dx} + \nu \frac{d^2\omega}{dx^2} = 0 \quad (12)$$

ここで、 $\theta$  は重力  $g$  と  $y$  軸の成す角であり、境界条件は  $\chi, \omega \rightarrow 0 (x \rightarrow \pm\infty)$  である。簡単のため、プラントル数  $Pr$  が 1 の場合だけを考える。この場合、解は以下の様になる。

$$\chi(x) = \Theta_0 \sqrt{\frac{A}{2\pi\kappa}} \exp\left(-\frac{A}{2\kappa}x^2\right) \quad (13)$$

$$\omega(x) = -\frac{\alpha g \cos \theta}{A} \chi(x) \quad (14)$$

ここで  $\Theta_0 = T(+\infty) - T(-\infty)$  であり、 $T$  渦層に垂直な方向の温度差を表す<sup>†</sup>。 $T$  渦度は重力の方向に依らず等方的であるのに対し、渦度は重力の向きに依存することに注意して欲しい。これは、2DNS系とは異り、渦度は保存せずバロクリニック (傾圧) な効果により生成されることが原因である。つまり、 $T$  渦層のもつ温度差により重力の向きに依存したシアが形成されるのである。バーガース  $T$  渦層解では、 $T$  渦の大きさとエントロピー散逸は同じ分布をしている。3DNS系では渦構造と強散逸領域が直接関係していないことと対照的である。更に、伸縮の大きさと向きは非圧縮条件より一意であり、3DNS系の様に様々な組合せを考慮する必要はない。

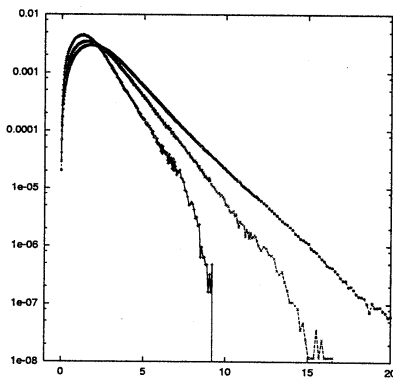


図 1: PDF: 3つのモード数  $N = 512, 1024, 2048$

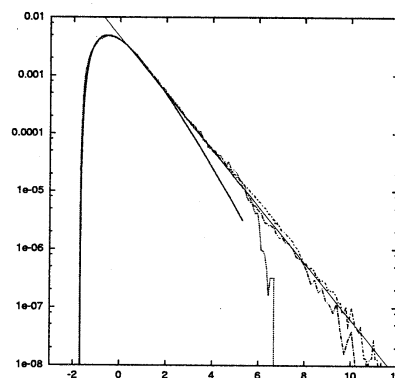


図 2: 標準偏差と平均で規格化された PDF。実線は、 $\Gamma$  分布と指数関数を表す。

<sup>†</sup>バーガース渦層の循環に対応する。

バーガース渦層は、非粘性極限で粘性散逸がゼロに成るため、十分発達した乱流では寄与しないと考えられている。この事情は  $T$  渦層でも同じである。実際、 $\epsilon_\theta = \int_{-\infty}^{\infty} \kappa |\chi|^2 dx \propto \sqrt{\kappa A}$  であるから、単位長さ当たりのエントロピー散逸  $\epsilon_\theta$  は、非粘性極限 ( $\kappa \rightarrow 0$ ) でゼロである。しかし、もし  $A \propto \kappa^{-1}$  の関係を満たすならば、 $\epsilon_\theta$  は有限に保たれる。バーガースの  $T$  渦層解は、伸縮の強さ  $A$ 、拡散係数  $\kappa$  と温度差  $\Theta_0$  を外部パラメータとして持つが、実際の乱流場ではこれらの量は独立ではなく何らかの関係を満たすと期待できる。図1にシミュレーションで得られた  $T$  渦層中心での歪み速度テンソルの正の固有値  $A$  の分布関数を示す。図2に示すように、 $A$  の PDF は標準偏差  $\sigma$  と平均  $\mu$  で規格化すると重なる。小さな揺らぎに対しては、 $\Gamma$  分布、 $a x^b \exp(-cx)$  ( $a=0.0337, c=1.927, b=2.167$ ) で良く近似できる。これは、3DNS 系の秩序渦の循環分布と良く似ている。一方、裾は指数関数  $0.00456 \exp(-1.123x)$  でよく近似できる。これらの結果は、上述の  $A$  と  $\kappa$  の間の逆比例関係を示唆しており、非粘性極限でも  $T$  渦層が重要な役割を担う可能性を排除しない。

### 3 数値計算

2DFC 系の乱流特性を調べるために、基礎方程式 (2)、(3) を用いて直接シミュレーション (DNS) を行った。乱流を定常にするために温度場に大きなスケールの外力、 $F_{\text{forcing}}(\mathbf{k}) = 0.2, (\mathbf{k} = (2, 2), (2, -2), (-2, 2), (-2, -2))$  を、また渦度場に対して低波数でのみ有効なドラッグ、 $D_{\text{rag}}(\mathbf{k}) = -0.2\tilde{\omega}(k)/k^2 (k \leq 3)$ 、をそれぞれ加えている。

$$\frac{DT}{Dt} = \kappa \Delta T + F_{\text{forcing}} \quad (15)$$

$$\frac{D\omega}{Dt} = \frac{\partial T}{\partial x} + \nu \Delta \omega + D_{\text{rag}} \quad (16)$$

空間方向には、擬スペクトル法<sup>†</sup>、時間発展に4次のルンゲ・クッタ法を用いている。ここでは、一般性を失うことなく  $\alpha g = 1$  とおける。また、簡単のため  $Pr = 1$  の場合を扱う。表1に、用いた3種のモード数に対しシステム及び流れのパラメータをまとめた。ここで、

表 1: 数値計算と流れのパラメータ

$N^2$	$\kappa$	$\Delta x$	$\eta_\theta$	$l_{BO}$	$\lambda$	$Ra_\lambda$
$512^2$	$1 \times 10^{-3}$	$\pi/256$	$1.38\Delta x$	$1.3\eta_\theta$	$6.5\eta_\theta$	526
$1024^2$	$2 \times 10^{-4}$	$\pi/512$	$1.14\Delta x$	$2.0\eta_\theta$	$8.0\eta_\theta$	1186
$2048^2$	$1 \times 10^{-4}$	$\pi/1024$	$1.5\Delta x$	$1.9\eta_\theta$	$10\eta_\theta$	1860

$l_{BO}$ 、 $\eta_\theta$  は、それぞれ、ボルギアーノ・オブコフ (BO) の長さスケール、温度場のコルモゴ

<sup>†</sup>エイリアス項は 1/2 位相シフト法を用いて除去した。従って、有効モード数は  $\frac{2\sqrt{2}}{3}N$  である。

ロフの長さスケールである。また、 $\lambda$ は温度場のテーラーの長さスケールで、 $Ra_\lambda$ はこのテーラー長に基づくレイリー数である。†

温度コルモゴロフ長はメッシュ幅とほぼ同じである。3次元NS乱流と同じ様に、温度テーラー長は温度コルモゴロフ長の10倍程度になっている。また、BOスケールがレゾリューションに依らずコルモゴロフ長程度であるので、全スケールでエントロピーカスケードが卓越していると推測できる。

## 4 $T$ 渦構造のスケルトン同定

図3に典型的な $T$ 渦場のスナップショットを示した。3DNS乱流の場合と同じように、2DFC乱流にも $T$ 渦からなる秩序構造が存在することがわかる。以下、この $T$ 渦の集中した領域を $T$ 渦層と呼ぶ。定義から、 $T$ 渦層は、異なる温度領域のシャープな境界に対応している。実際、 $T$ 渦層が作るキノコ状の構造が見えるが、これは低温流体が高温領域に流れ込みブルームを形成していることを表しており、Rayleigh-Taylor不安定がその形成メカニズムである。これは、渦層の巻上がりがKelvin-Helmholtz(KH)不安定であることと類似している。ただし、2DFC乱流でも $T$ 渦層によって誘導された渦層がKH不安定を起こし、スパイラル状に巻上がることもある。図5(c)に示すように $T$ 渦層には渦およびストレイン場も局在している。3DNS乱流のワームの定義は難しいが、2DFC系では $T$ 渦の集中領域として少なくともそのスケルトンは容易に定義にできる。図4に図3の $T$ 渦層のスケルトンを描いた。ここでは、スケルトンは単純に $T$ 渦の絶対値の局所極大値を結ぶ曲線として定義している。

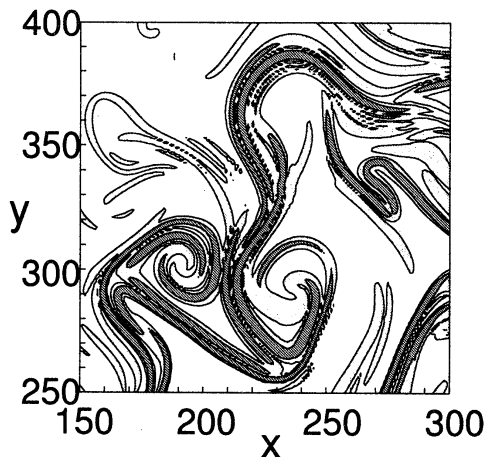


図3:  $N = 1024$  の場合の  $|\chi|$  の等高線。座標の単位はメッシュサイズ  $\Delta x$ 。

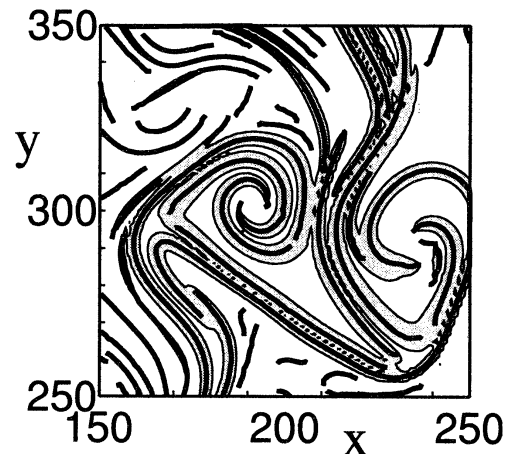


図4:  $T$  渦構造のスケルトンをトレースしたもの。曲率が大きいところで切れている。

†  $l_{BO} = \epsilon^{5/4} / \epsilon_\theta^{3/4} (\alpha g)^{3/2}$ ,  $\eta_\theta = [\kappa^5 / \epsilon_\theta (\alpha g)^2]^{1/8}$ ,  $\lambda = (\lambda_x + \lambda_y) / 2$ ,  $\lambda_{x_i} = \sqrt{\langle T^2 \rangle / \langle (\partial T / \partial x_i)^2 \rangle}$ ,  $Ra_\lambda = (Ra_{\lambda_x} + Ra_{\lambda_y}) / 2$ ,  $Ra_{\lambda_{x_i}} \equiv \alpha g \langle T^2 \rangle^{1/2} \lambda_{x_i}^3 / \kappa \nu$

図5に典型的な  $T$  渦構造を示す。図5(a)にスケルトンを描いたが、比較的直な部分と曲率の大きな部分からなる。直な部分は図5(b)で示すように比較的バーガス  $T$  渦解に近い。実際その空間構造は、図5(c)で示すように、ガウス型の形状をしている。一方、相対的に曲率の大きな部分では局在はしているものの定常解とは異っている。特に、 $\omega$  の形状が著しく平衡解からずれている。これは、浮力により誘導された渦度の平衡状態へ緩和時間が  $T$  渦構造の運動の時間スケールより長いので、追従できないと推測できる。この意味で  $T$  渦のワームは非定常な構造である。

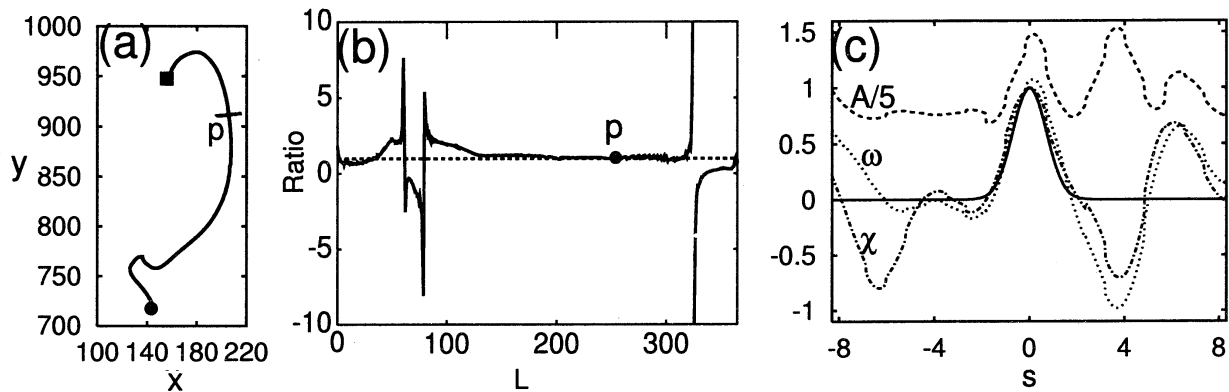


図5: 典型的な  $T$  渦構造 (a) スケルトン (●: 始点, ■: 終点) 座標はメッシュサイズが単位。(b) スケルトンに沿っての、 $\chi$  と  $\omega$  の比。バーガス  $T$  渦解が1になるように規格化している。(c) p点をよぎる垂線上の  $\chi(s)$ 、 $\omega(s)$ 、 $A(s)/5$ 。 $\chi$  と  $\omega$  は p 点上で1になるように規格化してある。実線はガウシアン。

## 5 間欠性と特異構造

本研究の目的は、秩序構造と乱流統計の関連を理解することである。もし、構造が乱流で重要な役割を果たしているとする、非粘性極限でエントロピー散逸に寄与する特異構造が存在するはずである。この章では、エントロピー散逸の間欠性との関連でそのような特異構造を考える [2]。ここでは、モード数  $1024^2$  の DNS で得たデータに対して ESS (Extended Self Similarity) 法を用いて散逸率の間欠性指数  $\tau_q$  を評価した。ESS は構造関数間にスケールリング関係があるとする仮説であり次の関係を仮定している。

$$\langle \epsilon_\theta(l)^q \rangle \sim \langle |\delta T(l_x)^2 \delta u_x(l_x)| \rangle^{\tau_q} \quad (17)$$

ここで、 $\delta T(l_x)$  と  $\delta u_x(l_x)$  は温度  $T$  と速度  $u_x$  の距離  $l_x$  離れた2点での差である。図3(a)に  $\tau_q$  を、図3(b)に温度差のスケールリング指数  $\zeta_p$  ( $\langle \delta T(l_x)^p \rangle \sim \langle |\delta T(l_x)^2 \delta u_x(l_x)| \rangle^{\zeta_p}$ ) と速度差のスケールリング指数  $\xi_p$  ( $\langle \delta u(l_x)^p \rangle \sim \langle |\delta T(l_x)^2 \delta u_x(l_x)| \rangle^{\xi_p}$ ) をそれぞれ描いた。

この結果と She-Lévêque の提案した間欠性モデルを比較した。彼らのモデルはもっとも特異な構造と呼ばれる渦構造に基づいている [3]。このモデルは、間欠性指数を以下の方

に与える。

$$\tau_q = -aq + C_0[1 - (1 - a/C_0)^q] \quad (18)$$

ここで、 $C_0$  と  $a$  はパラメータで、それぞれ特異構造の余次元と時間スケーリングの指数である。

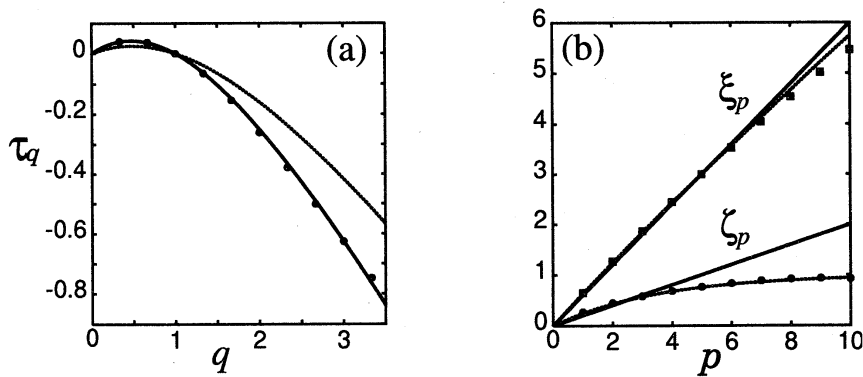


図 6: (a) SL モデルと DNS で得た間欠性指数  $\tau_q$  比較。実線は  $a = 1/2$ 、点線は  $a = 2/5$  を用いた SL モデル。記号  $\bullet$  は DNS データから得た間欠性指数を表す。(b)  $x$  方向に  $l$  だけ離れた、温度差  $\delta T(l)$  と  $x$  方向速度差  $\delta u(l)$  のスケーリング指数、 $\zeta_p$  ( $\bullet$ ) と  $\xi_p$  ( $\blacksquare$ )。実線は BO スケーリング、点線はそれぞれ  $\zeta_p = p/5 + \tau_{2p/5}$ 、 $\xi_p = 3p/5 + \tau_{p/5}$  である。

彼らは 3 次元 NS 乱流に対し、特異構造が渦フィラメントでありエネルギー散逸がコロモゴロフの時間スケール (渦回転時間  $t_l \sim l^{2/3}$ ) で生じると仮定し  $C_0 = 2$  と  $a = 2/3$  を得た。このモデルは、これまでに得られている間欠性指数を良く説明できると信じられている。

以下、2DFC 乱流に対して SL モデルを適用する。ここでは、DNS の結果から特異構造が層状 (その 2 次元断面であるから線状) であると仮定し  $C_0 = 1$  と置く。オリジナルの SL モデルの様に BO スケーリングの時間スケール (5) を用いると  $a = 2/5$  である。しかし、この値よりも  $a = 1/2$  を用いる方が DNS の結果をより良く近似する。このことから、もし SL モデルのパラメータ  $a$  が散逸の特性時間スケールの指数を表しているとする、BO スケーリングとは異なる新たな時間スケールが存在することが示唆される [5]†。

次に、この時間スケールが非粘性 2 次元自由対流系の有限時間発散と関係している事を紹介する。ただし、有限時間発散は未だ未解決の問題である。Pumir と Siggia は非粘性の 2DFC 方程式 (1) と (2) を数値計算することにより、 $|\nabla T|$  の最大値が時間の自乗  $t^2$  に逆比例

† 散逸率のスケーリング指数  $\tau_p$  と温度差、速度差の指数  $\zeta_p$ 、 $\xi_p$  を関係付けるためには、通常の RSH、 $\delta u^2 \delta T / l \sim \varepsilon_\theta$ 、の他にもう一つ条件がある。ここでは、浮力と非線形項の釣合、 $\delta u^2 / l \sim \delta T$ 、が成り立つと仮定した。この関係を用いると  $\zeta_p = p/5 + \tau_{2p/5}$ 、 $\xi_p = 3p/5$  が得られる。 $a = 1/2$  を用いると  $\zeta_p = 1 - (1/2)^{2p/5}$ 、 $\xi_p = p/2 + 1 - (1/2)^{p/5} \tau_{p/5}$  となる。 $p \rightarrow \infty$  の時  $\zeta_p \rightarrow 1$  となるが、これは温度場にショックが存在することを示しており、SL モデルの特異構造の仮定と整合している。ここでは、 $x$  方向の差しか示さないが、方向による差はほとんど無く、先に期待した等方向性が成り立っていることがわかる。

して発散することを示唆する結果を得た [4]<sup>†</sup>。ここでは、かれらの結果は粘性効果が効き始めるまでは成り立つと仮定する。彼らが得たスケーリングは、

$$|\nabla T| \sim \Delta T_0 / l(t) \sim (t - t_*)^{-2} \quad (19)$$

と書ける。ただし、 $t_*$  は発散時間である。温度はラグランジアン的に保存されるので、温度場  $T$  のオーダー  $\Delta T_0$  は変化せず一定であるとおける。 $l(t)$  は特異構造の幅であるが、時間の関数とすると、 $|t - t_*| \equiv t_l \sim l^{1/2}$  の関係を得る。ここで、温度勾配と  $T$  渦のノルムは同じであり、特異構造は  $T$  渦層と見做せる。実際、Pumir と Siggia の論文にある特異構造の時間発展の図から、発散は  $T$  渦層の幅が縮むことで起こると思われる。ただし、この過程は単純な相似発展ではなく、構造の不安定化による巻上がりとそれによる引き延ばし、構造の再不安定化と言う一連の過程が繰り返される意味でグローバルな構造の発展過程である。この自己伸長過程は、Jiménez と Wray[6] が提案している 3次元秩序渦の渦秩序カスケードと類似した過程であると思われる。

## 6 まとめ

本報告では、3DNS 乱流で観測される微細秩序渦構造 “ワーム” に類似の構造が 2DFC 乱流でも存在し、局所的にバーガス  $T$  渦層で近似できることを示した。このことは、乱流の生成や特性に微細秩序構造が普遍的に寄与していることを示唆している。更に、間欠性を She と Lévêque の Log-Poisson モデルと比較し、特異構造の持つ時間スケールは、渦回転時間 (eddy turnover time) のそれではなく、むしろ非粘性 2DFC 方程式の発散解 (あるいはその候補) の持つ時間スケールに等しいと推測した。ただし、非粘性 2DFC 系が有限時間発散するかどうかは未解決の問題であるが、この特異性あるいは  $T$  渦層の突発的な引き延ばしが間欠性や SL モデルが仮定する特異構造と深く関連していると考えられる。

バーガス  $T$  渦層解は、 $T$  渦のつくる典型的なワームを良く表しているが、 $T$  渦層の動的な発展が間欠性等の乱流特性に深く関係していると思われるので乱流を記述するには簡単過ぎると思われる。乱流の理解を深めるためには、ワームを動力学な立場から詳細に理解する必要があるであろう。

## 参考文献

- [1] Toh, S. and Suzuki, E. (1994), *Phys. Rev. Lett.*, **73**, pp. 1501-1505
- [2] Suzuki, E. and Toh, T. (1995), *Phys. Rev. E*, **51**, pp. 5628-5635
- [3] She, Z. S. and Lévêque, E. (1994), *Phys. Rev. Lett.*, **72**, pp. 336-339
- [4] Pumir, A. and Siggia, E.D. (1992), *Phys. Fluids*, **A4**, pp. 1472-1491

<sup>†</sup>彼らは、3次元オイラー方程式の有限時間発散を調べるために 3次元の軸対称旋回流を扱い、局所的に方程式 (1)、(2) で近似できることを示した。



- [5] Iima, M. and Toh, S. (1998), *J. Phys. Soc. Jpn.*, **67**, pp. 373-376 ;( Toh. S, and Iima, M. ,Dynamical Aspect of Entropy Transfer in Free Convection Turbulence, *to appear in Phys. Rev. E* **61** No.2 (2000))
- [6] Jiménez, J. and Wray, A. A. (1998), *J. Fluid Mech.*, **373**, pp. 255-285