

## 2次元スタッキングルーラーオートマトン

坂井 浩二, 伊藤 暁, 井上 克司, 王 躍 (山口大学)  
(Koji Sakai, Akira Ito, Katsushi Inoue, Tue Wang)

### 1 まえがき

2次元ルーラーオートマトンとは, 2次元テープ上にルーラーを置くことにより現在入力ヘッドが指している位置だけでなく, その位置を含む行または列のすべての入力記号を書き換えることが可能な有限オートマトンである.

この2次元ルーラーオートマトンについてはルーラーの本数によって受理能力に違いが存在することが知られている [1]. しかし, 垂直線  $k$  本ルーラーオートマトンに水平線 1 本を加えた場合の階層性については, 証明が困難であった. そこで, 本研究ではルーラーを置く順序にスタックの概念を導入する. 本研究で扱うスタッキング動作は, 水平線をすべて置かなければどの垂直線も置けない (垂直線をすべて取り上げなければどの水平線も取り上げられない) という水平-垂直順と, 垂直線をすべて置かなければどの水平線も置けない (水平線をすべて取り上げなければどの垂直線も取り上げられない) という垂直-水平順である. このようなスタッキングモデルは, 実際に人間が2次元パターン上に定規を重ねたときの操作が自然にスタック動作になっている, という意味でごく自然なオートマトンモデルと言える.

このような水平-垂直順及び垂直-水平順スタッキングルーラーオートマトンの垂直線  $k$  本のものに水平線 1 本を加えた場合の垂直ルーラーの本数に関する受理能力の階層性を示す.

### 2 諸定義

**定義 2.1** [1]  $\Sigma$  を記号の有限集合とする.  $\Sigma$  上の2次元テープは  $\Sigma$  上の長方形2次元配列である.  $\Sigma$  上のすべての2次元テープの集合は  $\Sigma^{2+}$  で表される. テープ  $x \in \Sigma^{2+}$  が与えられたとすると,  $l_1(x)$  は  $x$  の行数,  $l_2(x)$  は  $x$  の列数をそれぞれ表す.  $1 \leq i \leq l_1(x)$  かつ  $1 \leq j \leq l_2(x)$  ならば  $x(i, j)$  は  $x$  の  $i$  行  $j$  列の記号を表す. さらに,  $1 \leq i \leq i' \leq l_1(x)$  かつ  $1 \leq j \leq j' \leq l_2(x)$  のとき,  $x[(i, j), (i', j')]$  を次の条件を満足するような2次元テープ  $z$  とする.

- (1)  $l_1(z) = i' - i + 1$  かつ  $l_2(z) = j' - j + 1$ ,
- (2) 各  $k, r [1 \leq k \leq l_1(z) \text{ かつ } 1 \leq r \leq l_2(z)]$  につ

いて

$$z(k, r) = x(k+i-1, r+j-1).$$

$l_2(x) = n$  である  $x \in \Sigma^{2+}$  について  $x$  の第  $i$  番目の行  $x[(i, 1), (i, n)]$  は単に  $x[i, *]$  と表す.

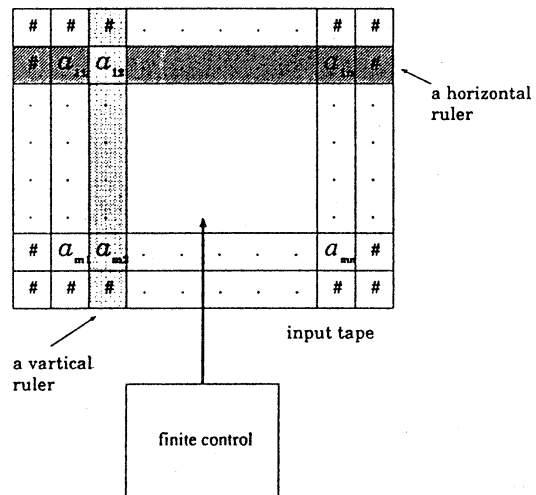


図 1: 水平線 1 本垂直線 1 本 (水平-垂直順) スタッキングルーラーオートマトン

**定義 2.2** [2]  $k, l$  を非負の整数とする. 水平線  $k$  本垂直線  $l$  本のオルタネーティングルーラーオートマトン (ARH $k$ VI) は 7 個組

$$M = (Q, q_0, U, F, \Sigma, \{0, 1\}, \delta),$$

である. ここに,

- (1)  $Q$  は制御部の有限状態集合,
- (2)  $q_0 \in Q$  は初期状態,
- (3)  $U \subseteq Q$  は全称状態の集合,
- (4)  $F \subseteq Q$  は受理状態の集合,
- (5)  $\Sigma$  は有限の入力アルファベット,
- (6)  $\{0, 1\}$  はラインの存在, 不存在を表す目印,

(7)  $\delta \subseteq ((Q \times \{0, 1\}^k \times \{0, 1\}^l) \times ((\Sigma \cup \{\#\}) \times \{0, 1\}^k \times \{0, 1\}^l)) \times ((Q \times \{0, 1\}^k \times \{0, 1\}^l) \times ((\Sigma \cup \{\#\}) \times \{0, 1\}^k \times \{0, 1\}^l) \times \Delta)$  は状態遷移関係である. ( $\# \notin \Sigma$  は境界記号,  $\Delta = \{\text{up, down, left, right, stationary}\}$  は入力ヘッドの移動方向の集合である.)

$u_{H_i}(u_{V_j})$  は  $i(j)$  番目の水平線 (垂直線) を保持しているとき, 値が 1 になるものとする.

$$q \in Q,$$

$$\mathbf{u}_H = (u_{H_1}, \dots, u_{H_k}) \in \{0, 1\}^k,$$

$$\mathbf{u}_V = (u_{V_1}, \dots, u_{V_l}) \in \{0, 1\}^l,$$

とするとき, 3 個組  $[q, \mathbf{u}_H, \mathbf{u}_V]$  は  $M$  が状態  $q$  にあり,  $u_{H_i}, u_{V_j}$  の値に従って有制限御部にルーラーを保持しているか, いないかの状態を示している.

$v_{H_i}(v_{V_j})$  は  $i(j)$  番目の水平線 (垂直線) が入力テープに置かれているとき, 値が 1 になるものとする.

$$q \in Q,$$

$$\mathbf{v}_H = (v_{H_1}, \dots, v_{H_k}) \in \{0, 1\}^k,$$

$$\mathbf{v}_V = (v_{V_1}, \dots, v_{V_l}) \in \{0, 1\}^l,$$

とするとき, 3 個組  $[a, \mathbf{v}_H, \mathbf{v}_V]$  は現在のマス目の入力記号が  $a$  であり,  $v_{H_i}(v_{V_j})$  の値に従ってルーラーが現在の行または列に存在しているか, いないかを示している.

ここで,

$((q', \mathbf{u}'_H, \mathbf{u}'_V), (a', \mathbf{v}'_H, \mathbf{v}'_V, d)) \in \delta((q, \mathbf{u}_H, \mathbf{u}_V), (a, \mathbf{v}_H, \mathbf{v}_V))$  かつ  $a = a'$  なる任意の

$$q, q' \in Q, a, a' \in \Sigma, d \in \Delta,$$

$$\mathbf{u}_H, \mathbf{u}'_H, \mathbf{v}_H, \mathbf{v}'_H \in \{0, 1\}^k,$$

$$\mathbf{u}_V, \mathbf{u}'_V, \mathbf{v}_V, \mathbf{v}'_V \in \{0, 1\}^l,$$

$$\mathbf{u}_H = (u_{H_1}, u_{H_2}, \dots, u_{H_k}),$$

$$\mathbf{u}'_H = (u'_{H_1}, u'_{H_2}, \dots, u'_{H_k}),$$

$$\mathbf{v}_H = (v_{H_1}, v_{H_2}, \dots, v_{H_k}),$$

$$\mathbf{v}'_H = (v'_{H_1}, v'_{H_2}, \dots, v'_{H_k}),$$

$$\mathbf{u}_V = (u_{V_1}, u_{V_2}, \dots, u_{V_l}),$$

$$\mathbf{u}'_V = (u'_{V_1}, u'_{V_2}, \dots, u'_{V_l}),$$

$$\mathbf{v}_V = (v_{V_1}, v_{V_2}, \dots, v_{V_l}),$$

$$\mathbf{v}'_V = (v'_{V_1}, v'_{V_2}, \dots, v'_{V_l}),$$

について,

$$(u_{H_i}, v_{H_i}, u'_{H_i}, v'_{H_i}) \in \{(1, 0, 1, 0), (1, 0, 0, 1), (0, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 1), (0, 1, 1, 0)\},$$

$$(u_{V_j}, v_{V_j}, u'_{V_j}, v'_{V_j}) \in \{(1, 0, 1, 0), (1, 0, 0, 1), (0, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 1), (0, 1, 1, 0)\},$$

が成り立つ ( $1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq l$ ). これは, 以下の様な条件を表す.

(1) ルーラーを保持しているとき,  $M$  はルーラーを保持し続けるか, 現在の行 (または列) にルーラーを置くことができる.

(2) ルーラーを保持していないとき,

(a) 現在の行 (または列) にルーラーが存在していない場合,  $M$  は新しくルーラーを置くことはできない.

(b) 現在の行 (または列) にルーラーが存在している場合, ルーラーをそのまましておくか取り上げることができる.

次に本研究で新たに導入する 2 次元スタッキングルーラーオートマトンの定義を与える.

水平-垂直順スタッキングルーラーオートマトンの場合, 水平線をすべて置かなければ垂直線は置けない, 垂直線をすべて取り除かなければ水平線は取り上げられない, という新たな制約が付く (表 1 参照).

$V\_ruler$ $H\_ruler$	hold	put	pick up
hold	○	×	×
put	○	×	×
pick up	○	×	×

表 1: 水平-垂直順の場合の水平線の状態と垂直線の状態の可能な組み合わせ

**定義 2.3** ARHkVl  $M$  の状態遷移関数  $\delta \subseteq ((Q \times \{0, 1\}^k \times \{0, 1\}^l) \times ((\Sigma \cup \{\#\}) \times \{0, 1\}^k \times \{0, 1\}^l)) \times ((Q \times \{0, 1\}^k \times \{0, 1\}^l) \times ((\Sigma \cup \{\#\}) \times \{0, 1\}^k \times \{0, 1\}^l) \times \Delta)$  が次の条件を満たすとき,  $M$  を水平線  $k$  本垂直線  $l$  本水平-垂直順オルタネーティングスタッキングルーラーオートマトンと呼ぶ.

$((q', \mathbf{u}'_H, \mathbf{u}'_V), (a', \mathbf{v}'_H, \mathbf{v}'_V, d)) \in \delta((q, \mathbf{u}_H, \mathbf{u}_V), (a, \mathbf{v}_H, \mathbf{v}_V))$  が成り立つとき,  $(u_{H_i}, v_{H_i}, u'_{H_i}, v'_{H_i})$  と  $(u_{V_j}, v_{V_j}, u'_{V_j}, v'_{V_j})$  の可能な組み合わせには以下の通りである.

(1) ある  $i(1 \leq i \leq k)$  について,  
 $(u_{H_i}, v_{H_i}, u'_{H_i}, v'_{H_i}) = (1, 0, 1, 0)$   
 ならば, すべての  $j(1 \leq j \leq l)$  について,  
 $(u_{V_j}, v_{V_j}, u'_{V_j}, v'_{V_j}) = (1, 0, 1, 0)$  のみ,

(2) ある  $i(1 \leq i \leq k)$  について,  
 $(u_{H_i}, v_{H_i}, u'_{H_i}, v'_{H_i}) = (1, 0, 0, 1)$   
 ならば, すべての  $j(1 \leq j \leq l)$  について,  
 $(u_{V_j}, v_{V_j}, u'_{V_j}, v'_{V_j}) = (1, 0, 1, 0)$  のみ,

- (3) ある  $i(1 \leq i \leq k)$  について,  
 $(u_{H_i}, v_{H_i}, u'_{H_i}, v'_{H_i}) = (0, 1, 1, 0)$   
 ならば, すべての  $j(1 \leq j \leq l)$  について,  
 $(u_{V_j}, v_{V_j}, u'_{V_j}, v'_{V_j}) = (1, 0, 1, 0)$  のみ.

垂直-水平順スタッキングルーラーオートマトンの場合, 垂直線をすべて置かなければ水平線は置けない, 水平線をすべて取り除かなければ垂直線は取り上げられない, という新たな制約が付く (表 2 参照).

**定義 2.4**  $ARH_kV_l$   $M$  の状態遷移関数  $\delta \subseteq ((Q \times \{0, 1\}^k \times \{0, 1\}^l) \times ((\Sigma \cup \{\#\}) \times \{0, 1\}^k \times \{0, 1\}^l)) \times ((Q \times \{0, 1\}^k \times \{0, 1\}^l) \times ((\Sigma \cup \{\#\}) \times \{0, 1\}^k \times \{0, 1\}^l) \times \Delta)$  が次の条件を満たすとき,  $M$  を水平線  $k$  本垂直線  $l$  本垂直-水平順オルタネイティングスタッキングルーラーオートマトンと呼ぶ.

$((q', u'_H, u'_V), (a', v'_H, v'_V, d)) \in \delta((q, u_H, u_V), (a, v_H, v_V))$  が成り立つとき,  $(u_{H_i}, v_{H_i}, u'_{H_i}, v'_{H_i})$  と  $(u_{V_j}, v_{V_j}, u'_{V_j}, v'_{V_j})$  の可能な組み合わせには以下の通りである.

- (1) ある  $i(1 \leq i \leq k)$  について,  
 $(u_{V_i}, v_{V_i}, u'_{V_i}, v'_{V_i}) = (1, 0, 1, 0)$   
 ならば, すべての  $j(1 \leq j \leq l)$  について,  
 $(u_{H_j}, v_{H_j}, u'_{H_j}, v'_{H_j}) = (1, 0, 1, 0)$  のみ,
- (2) ある  $i(1 \leq i \leq k)$  について,  
 $(u_{V_i}, v_{V_i}, u'_{V_i}, v'_{V_i}) = (1, 0, 0, 1)$   
 ならば, すべての  $j(1 \leq j \leq l)$  について,  
 $(u_{H_j}, v_{H_j}, u'_{H_j}, v'_{H_j}) = (1, 0, 1, 0)$  のみ,
- (3) ある  $i(1 \leq i \leq k)$  について,  
 $(u_{V_i}, v_{V_i}, u'_{V_i}, v'_{V_i}) = (0, 1, 1, 0)$   
 ならば, すべての  $j(1 \leq j \leq l)$  について,  
 $(u_{H_j}, v_{H_j}, u'_{H_j}, v'_{H_j}) = (1, 0, 1, 0)$  のみ.

V_ruler H_ruler	hold	put	pick up
hold	○	○	○
put	×	×	×
pick up	×	×	×

表 2: 垂直-水平順の場合の水平線と垂直線の状態の可能な組み合わせ

**定義 2.5** 本研究で導入する水平線  $k$  本垂直線  $l$  本水平-垂直順決定性 (非決定性) スタッキングルーラーオートマトンを,

$$DRH_1kV_2l \text{ (NRH}_1kV_2l)$$

と記す. 同様に, 水平線  $k$  本垂直線  $l$  本垂直-水平順決定性 (非決定性) スタッキングルーラーオートマトンを,

$$DRH_2kV_1l \text{ (NRH}_2kV_1l)$$

と記す. また,  $DRH_1kV_2l$  によって受理される 2 次元テープの集合族を  $\mathcal{L}[DRH_1kV_2l]$  と記す.

**定義 2.6** [2] 入力ヘッドの動きが左, 右, 下の 3 方向に限定された 2 次元チューリング機械を 3 方向チューリング機械という. また,  $L(n) : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{R}$  を変数  $n$  の関数とする. 任意の  $m, n$  に対して,  $m$  行  $n$  列の入力テープ  $x$  を与えたとき, もし  $M$  の  $x$  上の受理計算木  $T$  が存在し, そのすべての節点のラベル  $c = (x, (i, j), (q, a, k))$  について,  $|\alpha| \leq L(n)$  が成り立つとき  $M$  は  $L(n)$  領域限定であるという.  $L(n)$  領域限定決定性 (非決定性, 全称状態のみのオルタネイティング) 3 方向チューリング機械を  $3DT(L(n))$  ( $3NT(L(n)), 3UT(L(n))$ ) と記す.

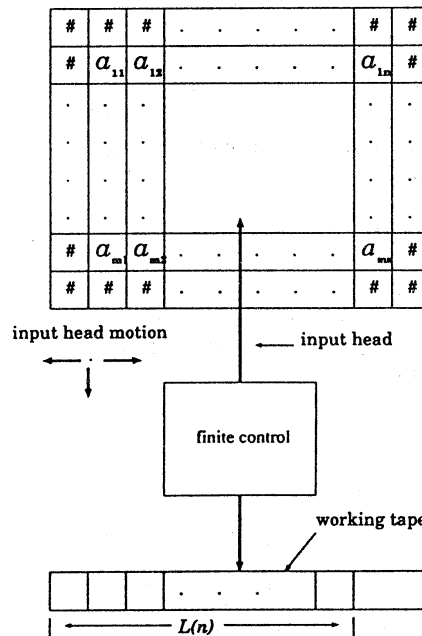


図 2:  $L(n)$  領域限定 3 方向チューリング機械

### 3 スタッキングルーラーオートマトンの受理能力

補題 3.1 2次元テープの集合  $T(k)$  を,

$$T(k) = \{x \in \{0, 1\}^{2+} \mid \exists n \geq 1 [l_2(x) = n \text{ かつ} \\ \exists m \geq 2 [l_1(x) = k \cdot m \text{ かつ} \\ \exists i, j (1 \leq i, j \leq m, i \neq j) \\ [x[block_k(i) = x[block_k(j)]]]]] \text{ かつ} \\ x \text{ の各行はちょうど 1 つの記号 "1" 持つ} \}$$

とする。ここに、 $x[block_k(i)]$  とは入力テープ  $x$  の第  $i$  番目の  $k$ -ブロックを表す。つまり、 $x[(i-1) \cdot k + 1, 1), (i \cdot k, n)]$  である。このとき任意の非負の整数  $k$  に対して、

- (1)  $T(k+1) \in \mathcal{L}[DRH_11V_2k]$ ,
- (2)  $T(k+1) \in \mathcal{L}[DRH_21V_1k]$ ,
- (3)  $T(2(k+1)) \in \mathcal{L}[NRH_11V_2k]$ ,
- (4)  $T(k+2) \in \mathcal{L}[NRH_21V_1k]$ .

#### 証明の概要

(1):

1. 第  $i$  番目のブロックの最下行の下に水平線を置く。
2. そのブロックの各  $j$  行目 ( $2 \leq j \leq k+1$ ) の "1" の所に ( $j-1$ ) 番目の垂直線を置く。
3. 現在のブロックの 1 行目の "1" の所へから、各ブロックの 1 行目の "1" を探して上へ移動する。
4. あるブロックで "1" に出会ったら、そのブロックの各  $j$  行目 ( $2 \leq j \leq k+1$ ) の "1" の所に ( $j-1$ ) 番目の垂直線があるかどうかをチェックする。
5. チェックに成功すれば受理状態に入る (図 3 参照)。

(2): 水平-垂直順の場合と同様の手法を用いる。ただし、ルーラーを置く順序は垂直-水平順である (図 4 参照)。

(3):

1. 第  $i$  番目のブロックの最下行の下に水平線を置く。
2. そのブロックの各  $j$  行目 ( $k+3 \leq j \leq 2(k+1)$ ) の "1" の所に ( $j-k-2$ ) 番目の垂直線を置く。
3. ( $k+2$ ) 行目の "1" の所から、各ブロックの ( $k+2$ ) 行目の "1" を探して上方へ移動する。
4. あるブロックで "1" に出会ったら、現在のブロックと第  $i$  番目のブロックが等しいかどうかを非決定的に推測する。

5. 等しいと推測したならば、現在のブロックの各  $j$  行目 ( $k+3 \leq j \leq 2(k+1)$ ) の "1" の所に ( $j-k-2$ ) 番目の垂直線があるかどうかをチェックする。
6. このチェックに成功したならば、すべての垂直線を取り上げた後、現在のブロックの各  $j$  行目 ( $2 \leq j \leq k+1$ ) に ( $j-1$ ) 番目の垂直線を "1" の所に置く。
7. 現在のブロックの最初の行の "1" の所へ移動し、この位置より第  $i$  番目のブロックの最初の行まで降りる。
8. そこへ "1" があれば、現在のブロックの各 ( $j-1$ ) 行目 ( $2 \leq j \leq k+1$ ) の "1" の所へ行き、( $j-1$ ) 番目の垂直線があるかどうかをチェックする。
9. このチェックに成功すれば受理状態に入る (図 5 参照)。

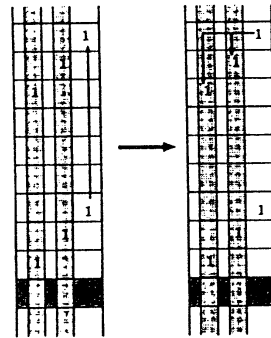


図 3:  $T(3) \in \mathcal{L}[DRH_11V_22]$  の説明図

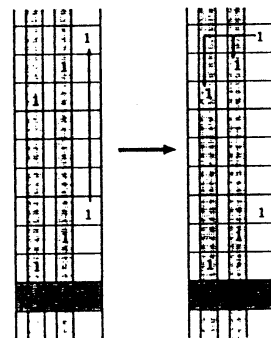


図 4:  $T(3) \in \mathcal{L}[DRH_21V_12]$  の説明図

(4): 水平-垂直順とは異なり, ルーラーの再利用はできない. よって, 次のような手順になる.

1. 第  $i$  番目のブロックの各  $j$  行目 ( $3 \leq j \leq k+2$ ) の “1” の所に  $(j-2)$  番目の垂直線を置く.
2. 第  $i$  番目のブロックの最下行の下に水平線を置く.
3. 2 行目の “1” の所から, 各ブロックの 2 行目の “1” を探して上方へ移動する.
4. あるブロックで “1” に出会ったら, 現在のブロックと第  $i$  番目のブロックが等しいかどうかを非決定的に推測する.
5. 等しいと推測したならば, 現在のブロックの各  $j$  行目 ( $3 \leq j \leq k+2$ ) の “1” の所に  $(j-2)$  番目の垂直線があるかどうかをチェックする.

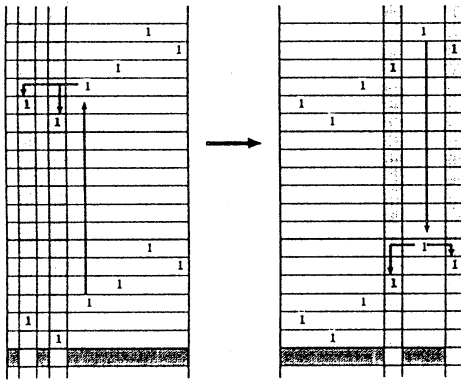


図 5:  $T(6) \in \mathcal{L}[\text{NRH}_1\text{V}_22]$  の説明図

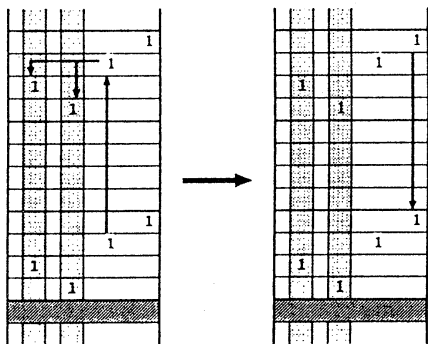


図 6:  $T(4) \in \mathcal{L}[\text{NRH}_2\text{V}_12]$  の説明図

6. このチェックに成功したならば, 現在のブロックの最初の行の “1” の所へ移動する.
7. 第  $i$  番目のブロックの最初の行まで降りる.
8. もしそこへ “1” があれば受理状態に入る (図 6 参照). □

#### 4 スタッキングルーラーオートマトンと 3 方向チューリング機械の関係

水平線 1 本垂直線  $k$  本水平-垂直順及び垂直-水平順スタッキングルーラーオートマトンを 3 方向チューリング機械で模倣する手法について述べる. その模倣アルゴリズムの要点は, 水平-垂直順の場合, 水平線を保持している間は単なる有限オートマトンとして, 水平線を入力テープ上に置いている間は垂直線  $k$  本のみの垂直ルーラーオートマトンと考える. また, 垂直-水平順の場合は, 水平線を保持している間は垂直線  $k$  本のみの垂直ルーラーオートマトン, 水平線を入力テープ上に置いている間は  $k$  本の垂直ラインを引いた後のラインドロ잉オートマトンと考えることにある.

定理 4.1 任意の非負の整数  $k$  に対して,

- (1)  $\mathcal{L}[\text{DRH}_1\text{V}_2k] \subseteq \mathcal{L}[3\text{NT}(n^{k+1} \log n)]$ ,
- (2)  $\mathcal{L}[\text{NRH}_1\text{V}_2k] \subseteq \mathcal{L}[3\text{NT}(n^{2(k+1)})]$ ,
- (3)  $\mathcal{L}[\text{DRH}_2\text{V}_1k] \subseteq \mathcal{L}[3\text{NT}(n^{k+1} \log n)]$ ,
- (4)  $\mathcal{L}[\text{NRH}_2\text{V}_1k] \subseteq \mathcal{L}[3\text{NT}(n^{k+2})]$ .

##### 証明の概要

(1):  $\text{DRH}_1\text{V}_2k$   $M$  と  $m$  行  $n$  列の入力テープ  $x$  によって定まる 3 種類の写像を次のように定義する.

$$f_i^{\leq H} : Q \times \{0, 1, \dots, n+1\} \times \{-1, 0, 1, \dots, n+1\}^k \mapsto Q \times \{0, 1, \dots, n+1\} \times \{-1, 0, 1, \dots, n+1\}^k \cup \{l\},$$

$$f_i^{\uparrow H} : Q \times \{0, 1, \dots, n+1\} \mapsto Q \times \{0, 1, \dots, n+1\} \cup \{l\},$$

$$f_i^{\geq H} : Q \times \{0, 1, \dots, n+1\} \times \{-1, 0, 1, \dots, n+1\}^k \mapsto Q \times \{0, 1, \dots, n+1\} \times \{-1, 0, 1, \dots, n+1\}^k \cup \{l\}.$$

$f_i^{\leq H}(q, j, (J_1, J_2, \dots, J_k)) = (q', j', (J'_1, J'_2, \dots, J'_k))$   
 $I \geq i$  とする.  $M$  を準計算状況  $(q, (i-1, j), I, (J_1, J_2, \dots, J_k))$  から動作を開始させたとき,  $M$  が  $x$  の第  $i$  行目に達し, その直後の準計算状況が  $(q', (i, j'), I, (J'_1, J'_2, \dots, J'_k))$  である場合.

$$f_i^{\leq H}(q, j, (J_1, J_2, \dots, J_k)) = l$$

$M$ を準計算状況  $(q, (i-1, j), I, (J_1, J_2, \dots, J_k))$  から動作を開始させたとき,  $M$ が第  $i$  行目に達しない場合.

$$f_i^{\uparrow-H}(q, j) = (q', j')$$

$M$ を準計算状況  $(q, (i-1, j), -1, (-1, -1, \dots, -1))$  から動作を開始させたとき, 水平線を保持して第  $i$  行目に達し (途中で水平線, 垂直線を置いた場合, 必ず取り上げなければならない), その直後の準計算状況が  $(q', (i, j'), -1, (-1, -1, \dots, -1))$  である場合.

$$f_i^{\uparrow-H}(q, j) = l$$

$M$ を準計算状況  $(q, (i-1, j), -1, (-1, -1, \dots, -1))$  から動作を開始させたとき,  $M$ が第  $i$  行目に達しない場合.

$$f_i^{\geq H}(q, j, (J_1, J_2, \dots, J_k)) = (q', j', (J'_1, J'_2, \dots, J'_k))$$

$I \leq i$  とする.  $M$ を準計算状況  $(q, (i+1, j), I, (J_1, J_2, \dots, J_k))$  から動作を開始させたとき,  $M$ が  $x$  の第  $i$  行目に達し, その直後の準計算状況が  $(q', (i, j'), I, (J'_1, J'_2, \dots, J'_k))$  である場合.

$$f_i^{\geq H}(q, j, (J_1, J_2, \dots, J_k)) = l$$

$M$ を準計算状況  $(q, (i+1, j), I, (J_1, J_2, \dots, J_k))$  から動作を開始させたとき,  $M$ が第  $i$  行目に達しない場合.

3種類の写像を用いて,  $3NT(n^{k+1} \log n)$   $M'$ は入力の最上行から最下行まで走査する間に, 各行において,

1.  $f_i^{\geq H}$ の推測, 2.  $f_{i+1}^{\leq H}, f_{i+1}^{\uparrow-H}$ の構成, 3.  $f_{i-1}^{\geq H}$ の正当性のチェック,

を行っていく. 各  $i$ について, これらの写像を記憶するためには, 大きさ  $O(n \log n)$  のブロックが  $O(n^k)$  個あれば十分である. よって作業用テープは総計  $O(n^{k+1} \log n)$  個のマスを使用すれば十分である.

最下行  $m+1$  行目において  $M$ が入力を受理するかどうかを判断するため,  $M'$ は初期準計算状況  $(q, (m+1, n+1), -1, (-1, -1, \dots, -1))$  から  $M$ の動作を模倣する.  $M$ が  $m$  行目に上がろうとしたときは,  $f_{m+1}^{\leq H}, f_{m+1}^{\uparrow-H}$ により  $M$ が再び  $m+1$  行目に戻ってくるか否かが分かる. 再び戻ってこないことが分かれば入力を拒否し停止する. 戻ってくる事が分かれば模倣を続ける.  $M$ が受理計算状況  $(q_a, (m+1, n+1), -1, (-1, -1, \dots, -1))$  に入ることが確認できれば  $M'$ は入力  $x$ を受理する. 以上より,  $T(M) = T'(M)$  は明らかである. □

(2), (3), (4) の証明は省略する.

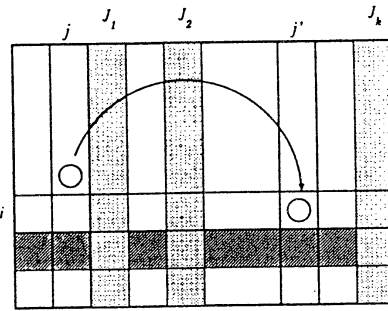


図 7:  $f_i^{\leq H}(q, j, (J_1, J_2, \dots, J_k))$  の概念図

## 5 スタッキングルーラーオートマトンの階層性

本章では, 第 3 章, 第 4 章の結果を受けて垂直線  $k$  本水平-垂直順及び垂直-水平順スタッキングルーラーオートマトンに水平線を 1 本加えた場合の垂直線の本数  $k$  に関する階層性を示す.

**補題 5.1** 任意の非負の整数  $k$  に対して,  
 $T(k) = \{x \in \{0, 1\}^{2^+} \mid \exists n \geq 1 [\ell_2(x) = n \text{ かつ}$   
 $\exists m \geq 2 [\ell_1(x) = k \cdot m \text{ かつ}$   
 $\exists i, j (1 \leq i, j \leq m, i \neq j)$   
 $[x[\text{block}_k(i) = x[\text{block}_k(j)]]]] \text{ かつ}$   
 $x \text{ の各行はちょうど 1 つの記号 "1" を持つ} \}$ , とする. このとき,  
 $L(n) = o(n^k)$  ならば  $T(k) \notin \mathcal{L}[3UT(L(n))]$ .

証明の基本的な考え方は, 文献 [3] の補題 4.2 と同様である.

3 方向チューリング機械の諸性質 (文献 [2] 参照) より, 次のことがいえる.

**命題 5.1** 任意の非負の整数  $k$  に対して,

- (1)  $\mathcal{L}[3UT(n^{k+1} \log n)] = co\text{-}\mathcal{L}[3NT(n^{k+1} \log n)]$ ,
- (2)  $\mathcal{L}[3UT(n^{2(k+1)})] = co\text{-}\mathcal{L}[3NT(n^{2(k+1)})]$ ,
- (3)  $\mathcal{L}[3UT(n^{k+2})] = co\text{-}\mathcal{L}[3NT(n^{k+2})]$ .

ここに,  $co\text{-}\mathcal{L}$  は  $\mathcal{L}$  の補集合族を表す.

**補題 5.2** 任意の非負の整数  $k$  に対して,

- (1)  $co\text{-}\mathcal{L}[\text{DRH}_1 1V_2 k] \subseteq \mathcal{L}[3NT(n^{k+1} \log n)]$ ,
- (2)  $co\text{-}\mathcal{L}[\text{NRH}_1 1V_2 k] \subseteq \mathcal{L}[3NT(n^{2(k+1)})]$ ,
- (3)  $co\text{-}\mathcal{L}[\text{DRH}_2 1V_1 k] \subseteq \mathcal{L}[3NT(n^{k+1} \log n)]$ ,

(4)  $co-\mathcal{L}[\text{NRH}_21V_1k] \subseteq \mathcal{L}[\text{3NT}(n^{k+2})]$ .

上記補題 5.2 の証明の概要は、3 方向チューリング機械  $M'$  によるスタッキングルーラーオートマトン  $M$  の模倣において、 $M'$  の受理状態と拒否状態を入れ替えた機械  $M''$  によって  $M$  を模倣する、というものである。

このことと命題 5.1 より次のことがいえる。

定理 5.1 任意の非負の整数  $k$  に対して、

- (1)  $\mathcal{L}[\text{DRH}_11V_2k] \subseteq \mathcal{L}[\text{3UT}(n^{k+1} \log n)]$ ,
- (2)  $\mathcal{L}[\text{NRH}_11V_2k] \subseteq \mathcal{L}[\text{3UT}(n^{2(k+1)})]$ ,
- (3)  $\mathcal{L}[\text{DRH}_21V_1k] \subseteq \mathcal{L}[\text{3UT}(n^{k+1} \log n)]$ ,
- (4)  $\mathcal{L}[\text{NRH}_21V_1k] \subseteq \mathcal{L}[\text{3UT}(n^{k+2})]$ .

以上と、補題 3.1 及び補題 5.1 より、次の階層性定理が得られる。

定理 5.2 任意の非負の整数  $k$  に対して、

- (1)  $\mathcal{L}[\text{DRH}_11V_2k] \subsetneq \mathcal{L}[\text{DRH}_11V_2k+1]$ ,
- (2)  $\mathcal{L}[\text{NRH}_11V_2k] \subsetneq \mathcal{L}[\text{NRH}_11V_2k+1]$ ,
- (3)  $\mathcal{L}[\text{DRH}_21V_1k] \subsetneq \mathcal{L}[\text{DRH}_21V_1k+1]$ ,
- (4)  $\mathcal{L}[\text{NRH}_21V_1k] \subsetneq \mathcal{L}[\text{NRH}_21V_1k+1]$ .

## 6 まとめと今後の課題

本研究では、新たにスタッキングルーラーオートマトンを導入し、ルーラーの本数に関する受理能力の階層性を得た。決定性の場合を図 8 に示す。ここに、細線は既知の包含関係、太線はスタッキングルーラーオートマトンを導入後に得た包含関係である。

今後の課題を以下に挙げる。

- スタッキングルーラーオートマトンは一般的なルーラーオートマトンよりも真に受理能力が弱いのか：各  $X \in \{D, N\}$  について、

$$\mathcal{L}[\text{XRH}_11V_2k] \subsetneq \mathcal{L}[\text{XRH}1V_k]?$$

- 本研究で用いた型以外の 2 次元スタッキングルーラーオートマトンでも、同様の階層性がいえるのか：各  $X \in \{D, N\}$  について、

$$\mathcal{L}[\text{XRV}_1k\text{H}_21V_3l] \subsetneq \mathcal{L}[\text{XRV}_1k\text{H}_21V_3l+1]?$$

- 一般的な 2 次元ルーラーオートマトンでも同様の階層性がいえるのか：各  $X \in \{D, N\}$  について、

$$\mathcal{L}[\text{XRH}1V_k] \subsetneq \mathcal{L}[\text{XRH}1V_{k+1}]?$$

- 水平-垂直順と垂直-水平順の関係は比較不能か？
- 3 方向決定性チューリング機械での模倣。

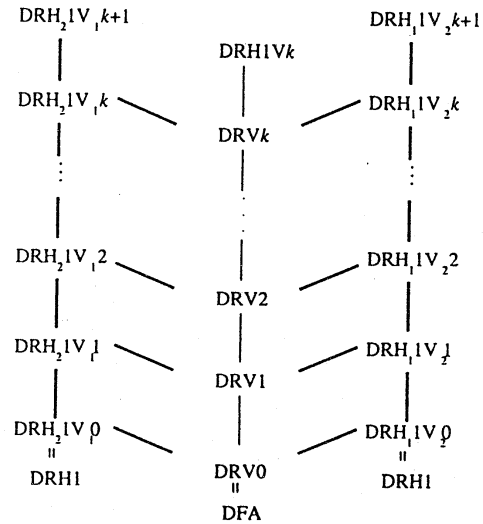


図 8: 決定性の場合の階層性

## 参考文献

- [1] T.Hasebe et.al., "Two-dimensional Ruler Automata", *Proc.the 5th Inter. Workshop on Parallel Image Analysis*, pp124-143(1997).
- [2] 伊藤 暁, "領域限定 2 次元オルタネイティングチューリング機械の図形認識能力に関する研究", 名古屋大学工学部博士論文 (1992).
- [3] A.Ito, K.Inoue, Y.Wang, "Nonclosure Properties of Two-Dimensional One-Marker Automata", *Inter.J.Patt.Recog.Art.Intel. Vol11, No.7*, pp1025-1050(1997).