数理解析研究所講究録
1151巻 2000年 80-84

Schur積と extended Haagerupテンソル積

群馬大学教育学部　伊藤 隆 (Takashi Itoh)
千葉大学理学部　渚 勝 (Masaru Nagisa)

$n\times n$ 複素行列 $M_n(\mathrm{C})$ に入る演算の中に、同じ行列成分同士の積として定義される Schur 積がある。i.e.

$$M_n(\mathrm{C})\ni \mathrm{a}=[\mathrm{a_{ij}}],\ \mathrm{b}=[\mathrm{b_{ij}}] \text{ に対し、} \qquad \mathrm{a}\circ\mathrm{b}=[\mathrm{a_{ij}b_{ij}}].$$

Shur積の応用例は、古くから知られているが [cf. 8]、Haagerup の Group invariant Λ_G[2] のように作用素環の中にも自然な形で現れている。有限次元の場合にかぎらず、ヒルベルト空間 H 上の有界線形作用素全体 $B(H)$ や AFDII$_1$-factor に導入した Schur積の研究もなされている [cf. 9] [10]。

通常、$B(H)$ 上の Schur 積は、$\Xi=\{\xi_i\}$ が H の完全正規直交系のときに、$V\xi_i=\xi_i\otimes\xi_i$ である isometry V を用いて $B(H)\ni x,\ y$ に対し、

$$x\circ_\Xi y=V^*(x\otimes y)V$$

と定義される。実際、$H=C^n$ のとき、Ξ を標準基底にとれば、上記の $M_n(\mathrm{C})$ に対する Schur積になることが、簡単に確かめられる。そこで、次の問題を与える。

問題1　H から $H\otimes H$ への isometry は、いつ Schur積を誘導するか。

Ξ によって定義された上記の V は、次の二つの条件を満たしている。

(1)　任意な $x\in B(H)$ に対し、　$V^*(x\otimes 1)V=V^*(1\otimes x)V,$
(2)　$P_V(x)=V^*(x\otimes 1)V$ は、$B(H)$ からある $*-$ 部分環へのノルム1の射影である。

このとき、この二つの条件によって Schur 積が決まる事がわかる。

定理 1 V が (1), (2) の条件を満たす H から $H \otimes H$ への isometry ならば、$V\xi_i = \xi_i \otimes \xi_i$ となる完全正規直交系 $\Xi = \{\xi_i\}$ が存在し、P_V は、離散極大部分環へのノルム 1 の射影になる。

$M_n(\mathrm{C})$ 上の Schur 積写像 $S_a : M_n(\mathrm{C}) \longrightarrow M_n(\mathrm{C}), \quad S_a(x) = a \circ x$ の特徴として、$M_n(\mathrm{C})$ の対角行列全体を ℓ_n^∞ とすると、S_a は ℓ_n^∞−module map であることがあげられる。逆に、$M_n(\mathrm{C})$ から $M_n(\mathrm{C})$ への ℓ_n^∞−module map は、S_a の形をしていることがわかる。

$B(H)$ においても、Schur 積写像を $S_a(x) = V^*(a \otimes x)V$ とし、$P_V(B(H)) \cong \ell^\infty$ と表わすと、やはり、ℓ^∞-module map になっている。しかし $B(H)$ において、ℓ^∞-module map が、すべて S_a という形で書けるわけではない。そこで次の問題を与える。

問題 2 $B(H)$ 上の ℓ^∞-module map は、いつ S_a の形の Schur 積写像で表わせるか。

Module map について知られている結果を列挙すると、M を von-Neumann 環、$K(H)$ をコンパクト作用素全体とし、$B(H)(resp. K(H))$ から $B(H)$ への completely bounded な M'-module map 全体を $CB_{M'}(B(H), B(H)) \quad (resp. CB_{M'}(K(H), B(H)))$ とおくとき、

$$\begin{array}{ccclc}
M \otimes_{\sigma h} M & \cong & CB_{M'}(B(H), B(H)) & & \text{Effros\&Kishimoto [3]} \\
\cup & & \cup & & \\
M \otimes_{eh} M & \cong & CB_{M'}(K(H), B(H)) & & \text{Blecher\&Smith [1]} \\
\cup & & \cup & & \\
M \otimes_{h} M & \hookrightarrow & CB_{M'}(K(H), K(H)) & & \text{Smith [11]}
\end{array}$$

であることが、知られている。

ここで、$\otimes_{\sigma h}, \quad \otimes_{eh}, \quad \otimes_h$ は、それぞれ [3, 4]、[1, 4]、[3] で導入された normal Haagerup norm、extended Haagerup norm、Haagerup norm が入った tensor 積である。 上の二つの同型は、operator space としての同型の意味で、下は、operaor space としての埋め込みの意である。

そしていずれも、tensor 積の代数的部分では、$M \otimes M \ni \sum a_i \otimes b_i$ に対し、$B(H)$ 上もしくは、$K(H)$ 上の写像 $\Phi(\sum a_i \otimes b_i)(x) = \sum a_i x b_i$ として対応が与えられている。

Schur 積写像 $S_a(x) = V^*(a \otimes x)V$ の形から、S_a は completely bounded normal 写像であり、ℓ^∞-module map であることから、Schur 積写像は、$CB_{\ell^\infty}((K(H), B(H))$ の中にあることがわかる。

そこで、V から定まる Ξ を固定したとき、$B(H) \ni a$ に対し、$a_{ij} = (a\xi_j|\xi_i)$ を a の行列成分とすると、

$$\begin{array}{ccccc} B(H) & \longrightarrow & \ell^\infty \otimes_{eh} \ell^\infty & \longrightarrow & CB_{\ell^\infty}(B(H), B(H)) \\ \Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow \\ [a_{ij}] & \longmapsto & \sum a_{ij} e_i \otimes e_j & \longmapsto & \Phi(\sum a_{ij} e_i \otimes e_j) \end{array}$$

という対応を作ることが出来る。

$\ell^\infty \otimes_{eh} \ell^\infty$ には、通常の方法で積を入れ、$*$-operation を $(\sum a_i \otimes b_i)^* = \sum b_i^* \otimes a_i^*$ と定義すると、$\ell^\infty \otimes_{eh} \ell^\infty$ は、positive cone として $\{\sum a_i \otimes a_i^* \in \ell^\infty \otimes_{eh} \ell^\infty | a_i \in \ell^\infty\}$ を持った可換 Banach$*$-環になることがわかる。

そして、$CB_{\ell^\infty}((B(H), B(H))$ に completely positive map の順序を入れ、$B(H)$ を Schur 積の入った可換 Banach $*$-環と見たときに、上記の対応は、全て 順序を保存する忠実な homomorophism であることがわかる。このとき、次のことが得られる。

定理 2 次の 3 つの閉凸集合の間には、アファイン同型が存在する。
(1) $B(H)$ の positive contraction 全体、
(2) $\{x \in \ell^\infty \otimes_{eh} \ell^\infty \mid 0 \leq x \leq \sum e_i \otimes e_i\}$ 、
(3) $\{\varphi \in CB_{\ell^\infty}(K(H), B(H)) \mid 0 \leq \varphi \leq P\}$
ここで、P は、$B(H)$ から ℓ^∞ へのノルム 1 射影である。

さらに、次が成り立つ。

定理 3 任意な $\varphi \in \{\varphi \in CB_{\ell^\infty}(K(H), B(H)) \mid 0 \leq \varphi \leq P\}$ に対し、$\varphi = S_a$ となる $a \geq 0$ が存在する。

$CB_{\ell^\infty}(K(H), B(H))$ の元は、completely positive map の一次結合で表わせることから、定理3より問題2の解答を得た事になる。

系として、次が成り立つ。

系　任意な自己共役作用素 $a \in B(H)$ に対し、

$$\|a\| = \inf\{\lambda \geq 0 \mid -\lambda P \leq S_a \leq \lambda P\}$$

注

(1)　一般に、任意な $\varphi \in CB_{M'}(B(H), B(H))$ は、$\varphi = \varphi^*$ ならば、

$$\|\varphi\|_{cb} = \inf\{\|\psi\|_{cb} \mid -\psi \leq \varphi \leq \psi,\ \psi = \psi^* \in CB_{M'}(B(H), B(H))\}$$

が成立するが [6]、Schur 積写像において、系と同じ a に対し、

$$\|S_a\| = \|S_a\|_{cb} = \inf\{\|S_x\|_{cb} \mid -S_x \leq S_a \leq S_x,\ x = x^* \in B(H)\}$$

が成立する。

(2)　von-Neumann 環 M が巡回ベクトルをもつとき、φ が $B(H)$ から $B(H)$ への M-module positive map ならば、completely positive であることが示せるので、系および (1) の Schur 積写像における順序は、positive map としての順序と見なしても良い。

参考文献

[1] D. P. Blecher and R. R. Smith, *The dual of the Haagerup tensor product,* J. London Math. Soc. 45, (1992), pp. 126–144.

[2] M. Cowling and U. Haagerup, *Completely bounded multipliers of the Fourier algebra of a simple Lie group of real rank one,* Invent. Math. 96, (1989), pp. 507–549.

[3] E. G. Effros and A. Kishimoto, *Module maps and Hochschild-Johnson cohomology,* Indiana Math. J. 36, (1987), pp. 257–276.

[4] E. G. Effros and Z. -J. Ruan, *Operator convolution algebras: An approach to Quantum groups,* preprint.

[5] U. Haagerup, *Decomposition of completely bounded maps on operator algebras,* unpublished manuscript.

[6] U. Haagerup, *Injectivity and decomposition of completely bounded maps,* Lecture notes in Math. Springer-Verlag. 1132, (1983), pp. 170–222.

[7] T. itoh and M. Nagisa, *Schur products and Module maps on $B(H)$,* to appear in Publ. RIMS, Kyoto Univ.

[8] K. Okubo, シュアー積作用素のノルム, 数理解析研究所講究録. 903, (1995), pp. 57–69.

[9] V. I. Paulsen, *Completely bounded maps and dilations,* Pitman Res. Notes in Math. Ser. 146, 1986.

[10] F. Pop and R. R. Smith, *Schur products and completely bounded maps on the hyperfinite type* II_1 *factor,* J. London Math. Soc. 52, (1995), pp. 594–604.

[11] R. R. Smith, *Completely bounded module maps and the Haagerup tensor product,* J. Funct. Anal. 102, (1991), pp. 156–175.