

非線形発展方程式のカオス解と定常解の多重性

京大院工学研究科 馮 宝峰(FENG Bao-Feng)
川原琢治(KAWAHARA Takuji)

1 はじめに

液膜流の長波長不安定を記述する Benney 方程式は不安定性と散逸性を伴うソリトン方程式の典型例であり種々の観点から研究されてきた [1-5]。この方程式の初期値問題の解は、分散性が強い場合にはソリトンの局在パルス列の平衡解となり、逆に不安定性と散逸性が強い場合には、その極限である Kuramoto-Sivashinsky 方程式に至るまでカオス的挙動を示す [1,4]。初期値問題の振舞いのこのような違いは、Benney 方程式の定常解の相互作用の違いによるものとされていたが [5]、最近の研究では、発展方程式の初期値問題におけるカオス的挙動が定常解の多重性と関連していることを示唆する結果が得られている。Chang et al.[2] は、分散性が相対的に弱い場合には、Benney 方程式の定常解として多くのピークをもつ孤立波解が存在するが、分散性が強くなると内部構造をもつ解は存在しなくなり 1 ピークの孤立波解だけとなること、そして、この場合には、初期値問題は 1 ピークの孤立波が等間隔で配列した平衡解となることを示した。また、多ピークをもつ孤立波解が存在し定常解に多重性があるときには、対応する初期値問題がカオス的挙動を示すことを示唆する結果が得られている。

本報告では、Benney 方程式と類似の長波長不安定波動方程式を取り上げ、定常解の多重性と初期値問題との関係を調べ、その結果を対比して、非線形発展方程式の初期値問題におけるカオス解と定常解の多重性との関係を考察する。ここで取り上げる方程式は具体的な波動現象を記述する近似方程式である次の 4 つの非線形発展方程式である。

(A) Benney 方程式 :

$$u_t + uu_x + \delta u_{xxx} + \eta(u_{xx} + u_{xxxx}) = 0 \quad (A)$$

(B) 不安定 KdV-Burgers 方程式 :

$$u_t + uu_x + \delta u_{xxx} - \eta(u + u_{xx}) = 0 \quad (B)$$

(C) Hilbert 変換項を含む KdV 方程式 :

$$u_t + uu_x + \delta u_{xxx} + \eta(Hu_x + Hu_{xxx}) = 0 \quad (C)$$

(D) 散逸 Benjamin-Ono 方程式 :

$$u_t + uu_x + \delta Hu_{xx} + \eta(Hu_x - u_{xx}) = 0 \quad (D)$$

ここで

$$Hu(x) \equiv \frac{1}{\pi} \text{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(y)}{y-x} dy$$

はヒルベルト変換であり、P は主値、添字の x, t などは偏微分を表すものとする。

各方程式の線形分散関係式は、 $u \propto \exp(ikx + \sigma t)$ として

$$(A) \sigma = i\delta k^3 + \eta(k^2 - k^4) \quad (B) \sigma = i\delta k^3 + \eta(1 - k^2)$$

$$(C) \sigma = i\delta k^3 + \eta(|k| - |k|^3) \quad (D) \sigma = i\delta k|k| + \eta(|k| - k^2)$$

のように与えられる。これらは何れも長波長 (k : small) で不安定(増幅)、短波長 ($|k| > 1$) で安定(減衰)であるが、(B) では0波数 ($k \sim 0$) のとき成長率が最大となるのに対して、他の場合には有限波数で成長率最大となる。パラメータ δ と η は、それぞれ分散性と不安定性・散逸性を表すが、以下では比較の便宜上、極限の場合を除き $\delta = 1$ となるようにパラメータ η をとったとして議論する。したがって、 η が小さいときは、分散性が不安定性・散逸性に比べて相対的に強い場合を、 η が大きいときは、その逆を表す。

以下それぞれの発展方程式の定常解と初期値問題について、これまでに得られている結果の概要を述べ、最後に全体を総合して検討する。

2 Benney 方程式

Benney 方程式の定常解 (進行波解) は、(A) 式に $u(x, t) = u(x - ct) = u(z)$ を代入し、 z に関する常微分方程式を解くことによって得られる。 $l \equiv \frac{d}{dz}$ とし、無限遠で $u = u' = u'' = u''' = 0$ となる孤立波解は、結局3階の常微分方程式を解くことに帰着される。これは3元連立方程式

$$\eta w' = \delta w - \eta v + cu - \frac{u^2}{2}, \quad v' = w, \quad u' = v$$

で表され、解は3次元位相空間 (u, v, w) 内の軌道となる。この方程式の固定点 (fixed point) は $(u, v, w) = (0, 0, 0)$ および $(2c, 0, 0)$ の2点であり、同一の固定点を結ぶ軌道 (homoclinic orbit) は孤立波 (solitary wave) を、異なる固定点を結ぶ軌道 (heteroclinic orbit) は衝撃波 (shock wave) を与える。

これらの解は、固定点から出発して微分方程式を数値的に解き固定点に収まるように固有値 c (波の速度) を決定する、「ねらい打ち法」によって求められる。その結果、定常解は

(a) 分散性が強い場合 (small η) :

$\eta < 0.9$ のとき一方の裾が振動しながら減衰する単一ピークの孤立波解のみ存在し、 $\eta < 0.27$ ではその孤立波の裾は単調減少となる。

(b) 分散性が弱い場合 ($\eta > 0.9$):

多数のピークをもつ孤立波解が同一のパラメータに対して存在(多重解が存在)する。 $\delta = 0$ (large η) の極限は、カオス挙動を示す発展方程式としてよく知られた Kuramoto-Sivashinsky 方程式であるが、この場合には、孤立波解、通常の衝撃波 (regular shock) 解、振動型衝撃波 (oscillatory shock) 解が存在し、それぞれが多数のピークをもつ多重解を含んでいることが示されている [1,6,7]。

一方、Benney 方程式の初期値問題では、分散性が強い場合には1ピークの孤立波が周期的に配列した状態が平衡解となり、そのパラメータ領域は、定常解が1ピークの孤立波解のみとなる (a) の条件 $\eta < 0.9$ に対応している。分散性が弱い場合には、極限の Kuramoto-Sivashinsky 方程式に至るまで初期値問題はカオスの挙動を示す。

3 不安定 KdV-Burgers 方程式

不安定 KdV-Burgers 方程式 (B) には u に比例する項が含まれているため、定常解は3次元位相空間内の軌道となるが、固定点は $(u, v, w) = (0, 0, 0)$ の1点だけとなり、許される解は孤立波解のみである。以前の研究では、単一ピークの孤立波のみが、ねらい打ち法によって求められていた [8]。また、初期値問題については、

(a) 分散性が強い場合 ($0.05 \leq \eta < 0.2$):

カオス的であり多ピークのパルス解と思われる波形が時間発展の途中に現れたり消えたりするのが見える。

(b) 分散性が弱い場合 ($0.3 \leq \eta \leq 1.5$):

初期段階でパルス解が見られるが、最終的には数値計算を行っている系の大きさ (システム・サイズ) が許す最大波長の定常な衝撃波解に落ち着く。

という結果が得られていた [8]。この場合、最大の線形成長率を与えるのは0波数、すなわち、最大波長である。最大波長が最も不安定となり大きなスケールの変動を生じることから、分散性が強い場合にも初期値問題はカオスの挙動を示し、分散性が弱い場合に最大波長の衝撃波に落ち着くというのが従来結論であった。

最近の研究によって、small η ($0.01 \leq \eta \leq 0.1$) において多ピークをもつ多重解が存在すること、large η ($1.0 \leq \eta \leq 1.5$) の場合にも多重解の存在が確認され、定常解は広範囲にわたって多重性をもつことが判明した [9]。

この結果は、分散性が強い場合における初期値問題のカオスの挙動と定常解の多重性が対応することを示している。時間発展の途中で、多重な解の何れかがアトラクターとなって一時的に出現し、時間発展としてはカオス的になると考えられる。

$\eta = 0.1$ と $\eta = 1.0$ の場合の多重孤立波解を図1に示す。図2は $\eta = 0.1$ のときの初期値問題の結果 (Ref.[8]) である。変動は不規則であるが波形中に多ピーク孤立波が出現したり消えたりしているように見える。

4 Hilbert 変換項を含む KdV 方程式

方程式(C)は Hilbert 変換を含んでおり、微積分方程式であるため、位相空間の方法で定常解を得ることができない。初期値問題については、small η ($0.001 \leq \eta \leq 0.1$) の場合にパルス列が形成されるものの、分散性がかなり強い場合でも平衡解とはならず、カオス的になることが示されていた [10]。

ねらい打ち法が使えないため、関数近似の方法 [11] を用いて定常解を求めた結果、多重解の存在が明らかになった [12]。

small η ($0.05 \leq \eta \leq 0.1$) で多重定常解、large η ($\eta = 1.0$) でも波形は異なるが多重定常解の存在が確認された。その後、さらに大きな η の場合についても多重定常解の存在が判明し、初期値問題も η の広い範囲にわたってカオスの挙動を示すことが分かった。

図3は $\eta = 0.1$ と $\eta = 1.0$ のときの多ピーク孤立波解である。それぞれに対応する初期値問題の結果（波形と全エネルギーの時間変化）を図4、図5に示す。いずれの場合も変動は不規則であるが、多ピーク孤立波的な波形が認められる。

5 散逸 Benjamin-Ono 方程式

散逸 Benjamin-Ono 方程式 (D) の $\eta = 0$ の極限での孤立波解は、その裾が $|x|^{-2}$ で減衰する点で、指数関数的減衰を示す KdV ソリトンとは異なる代数ソリトン解となる。分散項が Hilbert 変換で表される点で、KdV 方程式の分散項をもつ (A)~(C) とは異なることが予想されるが、この方程式も物理現象を記述する発展方程式であり [13,14]、初期値問題がカオスの挙動を示すので、詳細な解析を行った [15]。

結果の一部を図6~図8に示す。図6は定常解であり、 $\eta = 0.1$ のときには単一ピークの孤立波解のみが存在し、 $\eta = 0.3$ と $\eta = 1.0$ では多ピーク解が可能である。図7は $\eta = 0.1$ のときの初期値問題の時間発展であり、最終的にはパルス列の平衡解に落ち着いている。図8は $\eta = 0.3$ の場合であり、カオスの挙動を示す例である。

定常周期解から定常孤立波解への移行、多重解の存在、周期解の安定性、初期値問題などを調べたが、定常解の多重性とカオスとの関連にかかわる結果のみをまとめると次のようである。

定常解：

small η ($\eta < 0.15$) : 1 ピーク解のみ
 ($0.15 \leq \eta \leq 3.5$) : 多重解
 large η ($\eta > 3.5$) : 多重解

初期値問題：

small η ($\eta < 0.15$) : 1 ピーク解の周期配列
 ($0.15 \leq \eta \leq 3.5$) : 非定常 (カオスの)
 large η ($\eta > 3.5$) : 定常衝撃波 (異なる衝撃波)

この結果は、分散性が強い場合に、定常解として1ピークの孤立波のみが存在し、それに対応する初期値問題は等間隔配列のパルス列の平衡解となることを示しており、Benney 方程式で分散性が強い場合と同様な結果である。ただし、 η が大きい場合の振舞いはKuramoto-Sivashinsky 方程式の場合と異なっているが、これは(D)式の散逸項が通常の拡散項であることによると思われる。

6 まとめと考察

これまでの結果から初期値問題と定常解の対応をまとめると次ぎのようである。

分散的 (small η) \iff 散逸的 (large η)

(A) Benney 方程式

定常解:	1 ピーク孤立波 ($\eta < 0.9$)	多重解 ($\eta > 0.9$)	
初期値問題:	定常パルス列 ($\eta < 0.9$)	カオス ($\eta > 0.9$)	KSカオス

(B) 不安定 KdV-Burgers 方程式

定常解:	← 多重解 → ($0.01 \leq \eta \leq 1.5$)	
初期値問題:	カオス ($0.01 \leq \eta \leq 0.1$)	衝撃波 ($0.3 \leq \eta \leq 1.5$)

(C) Hilbert 変換を含む KdV 方程式

定常解:	← 多重解 → ($0.05 \leq \eta \leq 1.0$)	
初期値問題:	← カオス的 → ($0.001 \leq \eta \leq 5.0$)	

(D) 散逸 Benjamin-Ono 方程式

定常解:	1 ピーク孤立波 ($\eta < 0.15$)	多重解 ($\eta > 0.15$)	
初期値問題:	定常パルス列 ($\eta < 0.15$)	カオス ($0.15 \leq \eta \leq 3.5$)	衝撃波 ($\eta > 3.5$)

以上の結果から、‘推測’として、次のようなことが言えよう。

- (1) 強分散 (small η) で定常解として1ピークの孤立波解だけが存在する場合には、初期値問題漸近状態 ($t \rightarrow \infty$) は定常パルス列の平衡解(周期解)となる。
- (2) 初期値問題がカオスの挙動を示す場合には、対応する定常解は多重性をもっている。
- (3) 強散逸 (large η) の場合に定常解として多重解が存在するとき、初期値問題はカオス的になる場合と定常な衝撃波解に移行する場合とがある。これは多重解の安定性と関連すると思われる。
- (4) 2階微分の散逸項 (通常の拡散項) は、強散逸の場合の多重解を安定化し、初期値問題の漸近状態における衝撃波形成に寄与すると思われる。

以上は、確定的な結論ではなく、現在までの結果に基づく推論に過ぎない。非線形方程式ではその項の僅かな違いにより解の挙動が大きく変わることがしばしば起こることを考慮すると、一般的結論を導くことは難しいが、本報で取り上げたような非線形発展方程式については少なくとも定常解の多重性と初期値問題のカオスの挙動との間に、関連があることは言えそうである。このことをさらに明確にするためには、個々のパルスのスケール (パルス幅、裾の構造や減衰の仕方)、最大成長率を与えるスケール、システム・サイズなどが初期値問題の振舞い (時間発展) を決めるのにどのような役割を果たすかを明らかにする必要がある。また、Hilbert変換のような積分項 (非局所項) を含み、位相空間での解析ができない場合の多重解についての理論的解釈、多重解の安定性の問題など数値的な結果に対する理論的裏付けが必要と思われるが、これらは今後の課題として残されている。

参考文献：

- [1] H.-C.Chang: Wave evolution on a falling film, *Ann.Rev.Fluid Mech.***26** (1994) 103-136.
- [2] H.-C.Chang, E.A.Demekhin, D.I.Kopelevich: Laminarizing effects of dispersion in an active dissipative nonlinear medium, *Physica D***63** (1993) 299-320.
- [3] Y.A.Demekhim, G.Yu.Tokarev, V.Ya.Shkadov: Hierarchy of bifurcations of space-periodic structures in a nonlinear model of active dissipative media, *Physica D* **52** (1991) 338-361.

- [4] T.Kawahara, S.Toh: Pulse interaction in an unstable dissipative-dispersive nonlinear system, *Phys.Fluids* **31** (1988) 2103-2111.
- [5] T.Kawahara: Formation of saturated solitons in a nonlinear dispersive system with instability and dissipation, *Phys.Rev.Lett.* **51** (1983) 381-383.
- [6] D.Michelson: Steady solutions of the Kuramoto-Sivashinsky equation, *Physica D* **19** (1986) 89-111.
- [7] A.P.Hooper, R.Grimshaw: Travelling wave solutions of the Kuramoto-Sivashinsky equation, *Wave Motion* **10** (1988) 405-420.
- [8] T.Kawahara, S.Toh: On some properties of solutions to a nonlinear equation including long-wavelength instability, in: A.Jeffrey(Ed.), *Contributions to Nonlinear Wave Motion*, Longman, New York, (1988) pp.95-117.
- [9] B.-F. Feng, T.Kawahara: Stationary travelling-wave solutions of an unstable KdV-Burgers equation, *Physica D* (in press).
- [10] S.Hosoda, T.Kawahara: Numerical solutions and pole expansion for perturbed Korteweg-de Vries equation, *J.Phys.Soc.Jpn.* **63** (1994) 111-120.
- [11] J.P.Boyd: Spectral methods using rational basis functions on an infinite interval, *J.Compt.Phys.* **25** (1987) 113-143.
- [12] B.-F. Feng, T.Kawahara: Multi-hump stationary waves for Korteweg-de Vries equation with nonlocal perturbations, *Physica D* (in press).
- [13] S.Qian, Y.C.Lee, H.H.Chen: A study of nonlinear dynamical models of plasma turbulence, *Phys.Fluids B1* (1989) 87-98.
- [14] S.Qian, H.H.Chen, Y.C.Lee: A turbulence model with stochastic soliton motion, *J.Math.Phys.* **31** (1990) 506-516.
- [15] B.-F.Feng, T.Kawahara: Temporal evolution and stationary waves for dissipative Benjamin-Ono equation, *Physica D* (in press).

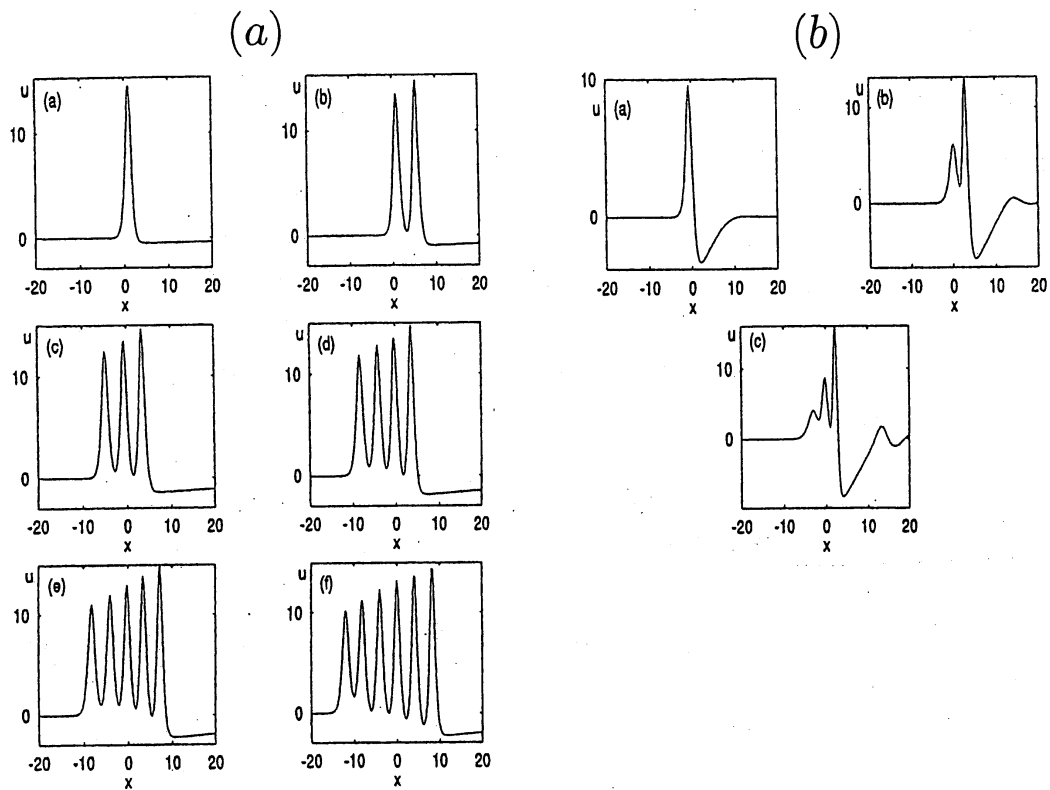


図 1 : 不安定 KdV-Burgers 方程式の多ピーク孤立波解
 (a) $\eta = 0.1$ (b) $\eta = 1.0$

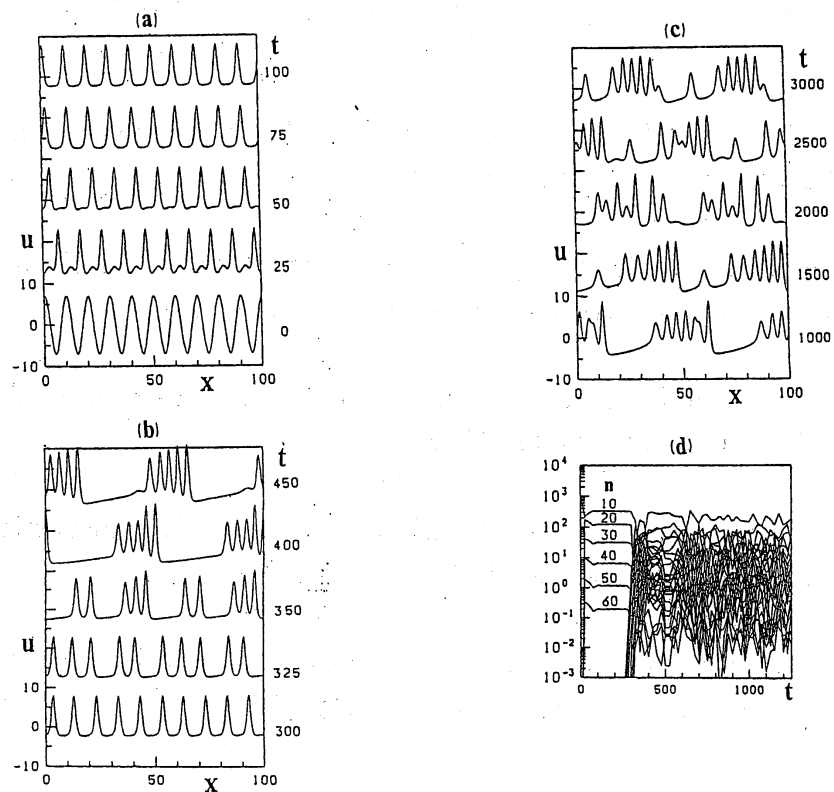


図 2 : 不安定 KdV-Burgers 方程式の初期値問題の解
 $u(v, 0) = 7 \cos 0.2\pi x, \quad \eta = 0.1$
 (a) 初期段階、(b) 遷移段階、(c) 長時間挙動、(d) パワースペクトル (Ref.[8])

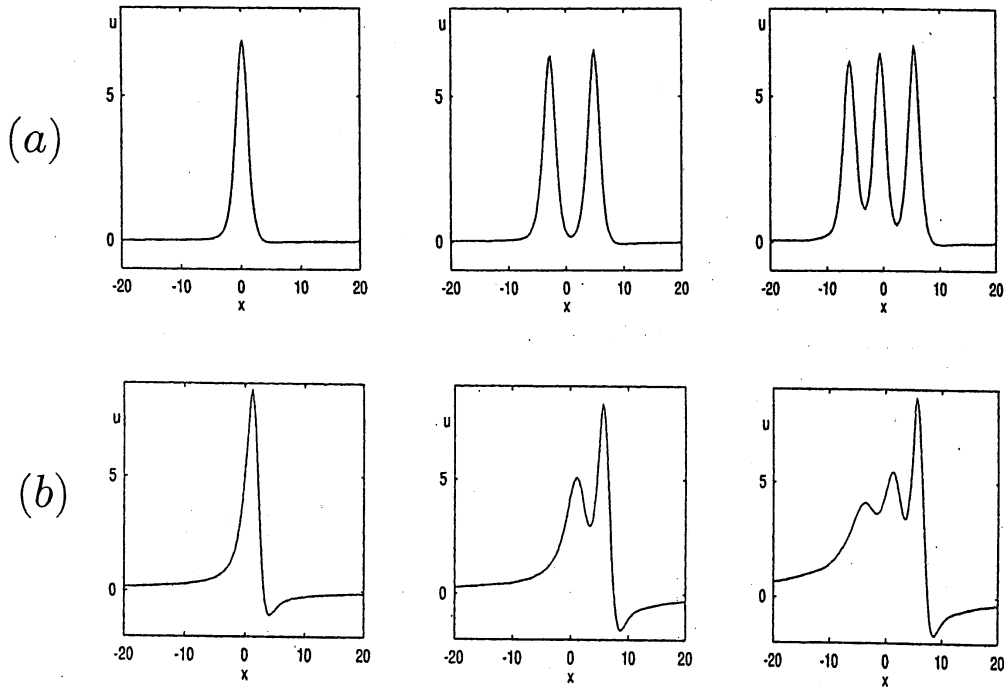


図 3 : Hilbert 変換項を含む KdV 方程式の多ピーク孤立波解
 (a) $\eta = 0.1$ (b) $\eta = 1.0$

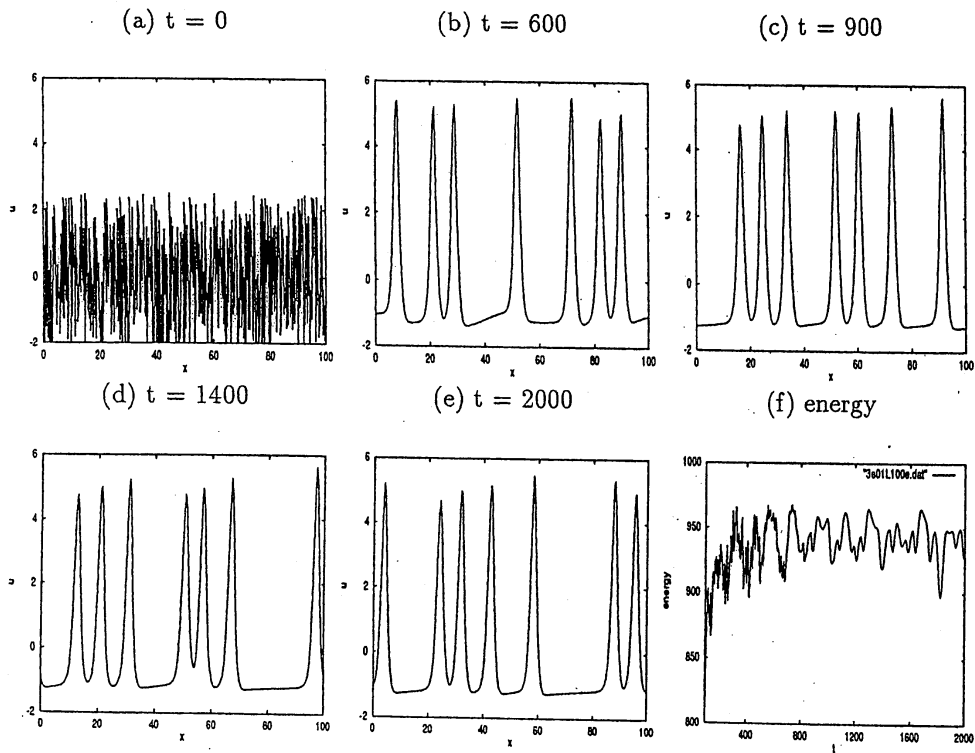


図 4 : Hilbert 変換項を含む KdV 方程式の初期値問題の解
 $u(x, 0) = 5 \cos 0.2\pi x$ $\eta = 0.1$ $L = 100$

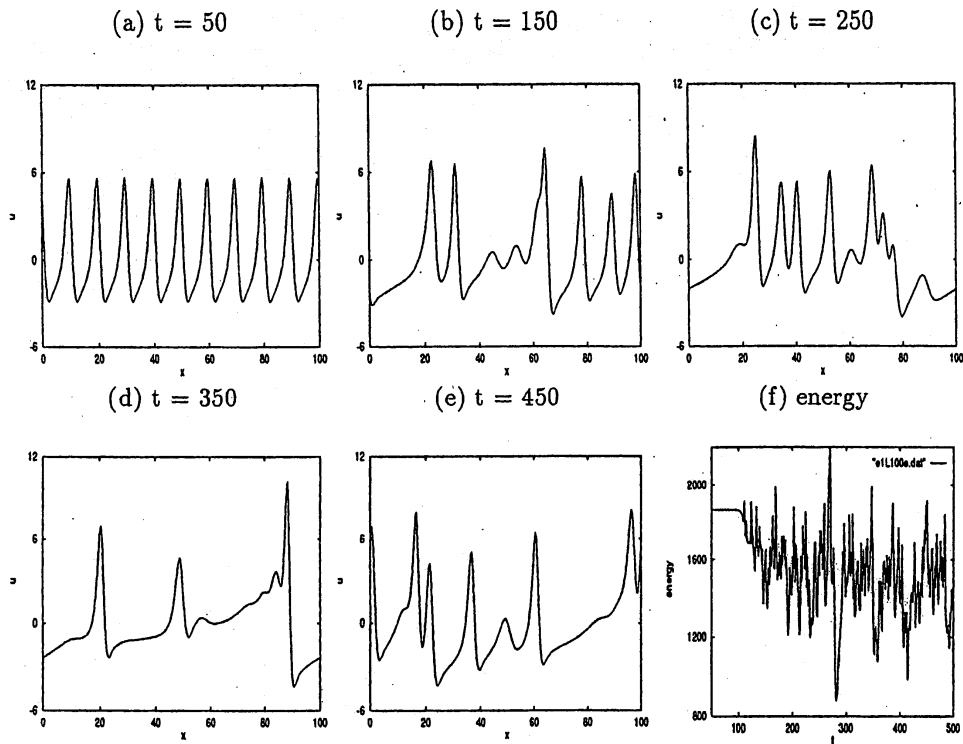


図 5 : Hilbert 変換項を含む KdV 方程式の初期値問題の解
 $u(x, 0) = 5 \cos 0.2\pi x \quad \eta = 1.0 \quad L = 100$

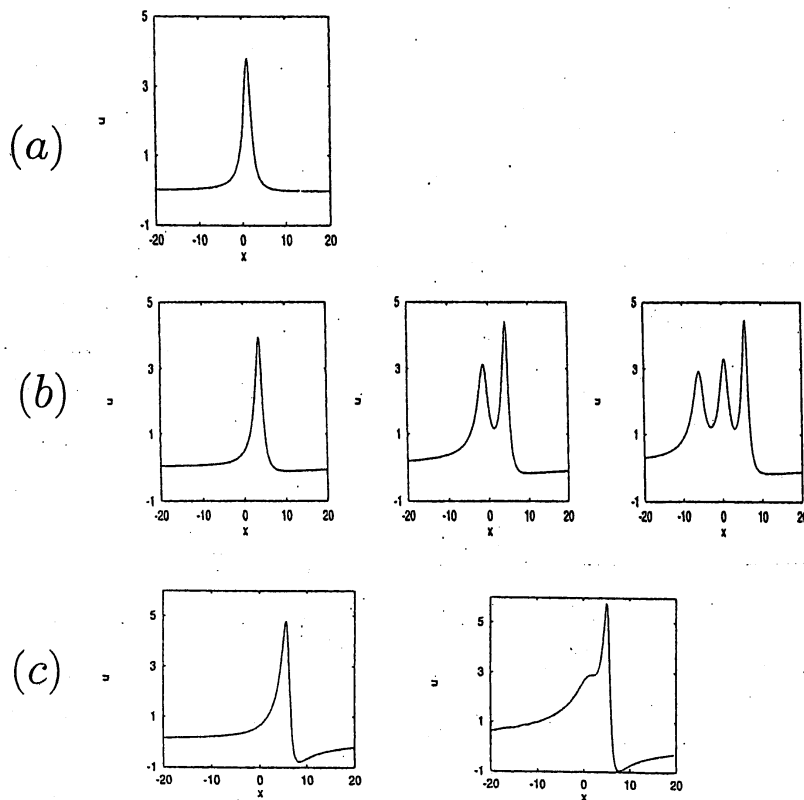


図 6 : 散逸 Benjamin-Ono 方程式の孤立波解
 (a) $\eta = 0.1$ (b) $\eta = 0.3$ (c) $\eta = 1.0$

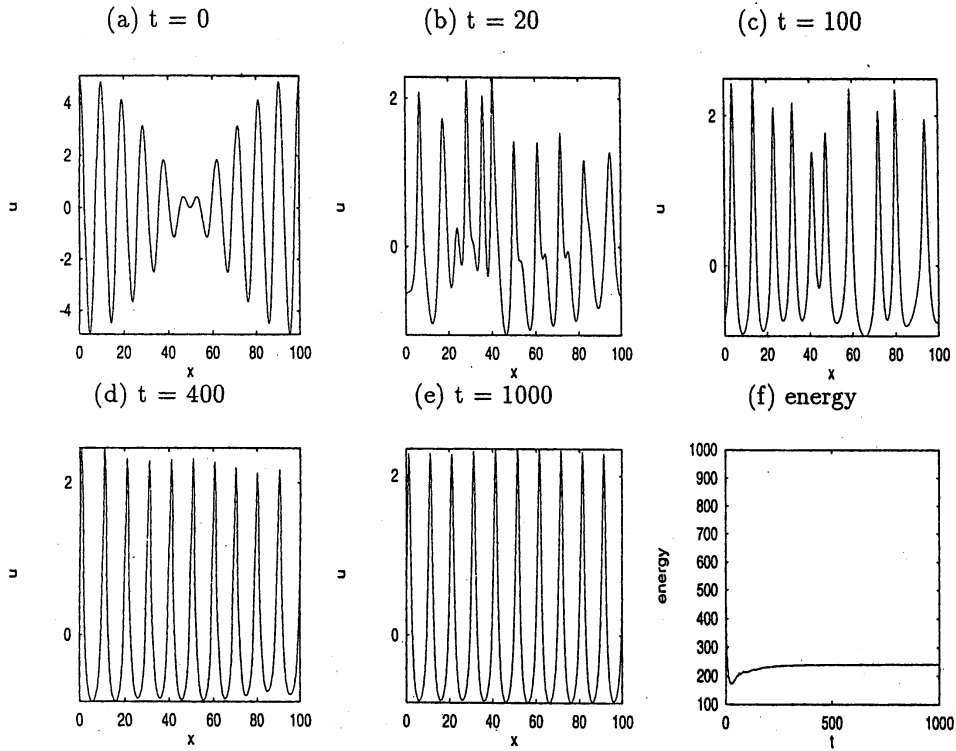


図 7 : 散逸 Benjamin-Ono 方程式の初期値問題の解

$$u(x, 0) = 2.5(\cos 0.2\pi x + \cos 0.22\pi x) \quad \eta = 0.1 \quad L = 100$$

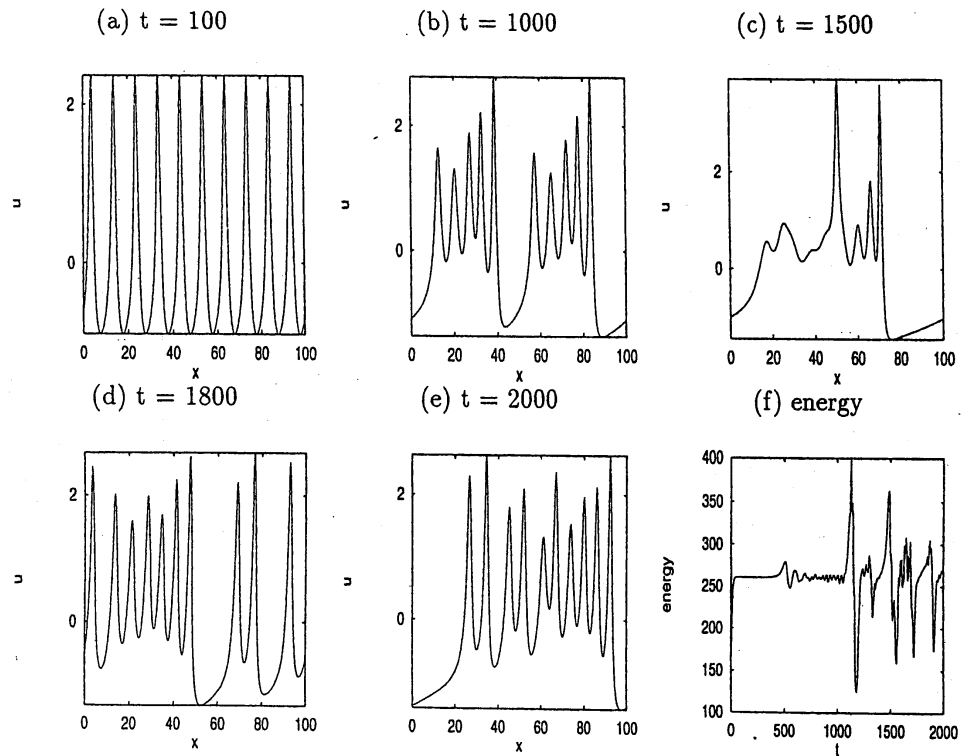


図 8 : 散逸 Benjamin-Ono 方程式の初期値問題の解

$$u(x, 0) = 5 \cos 0.2\pi x \quad \eta = 0.3 \quad L = 100$$