

## 規則的な波浪中における船舶の複雑な非線形運動について

東大・新領域・複雑理工学 村重 淳 (Sunao Murashige)

### 要旨

波浪中の船体運動は、工学における非線形システムの典型例として古くから研究されてきた。しかし、そのほとんどは簡単な常微分方程式で表される数学モデルを用いた理論的・数値的研究であり、実際の船体運動との関係はあまり議論されてこなかった。

本研究では、浸水した船舶の波浪中船体運動に注目し、模型船を用いた実験を行なった。その結果、比較のおだやかで規則的な波の中でも、船内にある程度の水が浸水すると、かなり複雑な非線形現象が見られることがわかった。また、その時系列データを詳しく解析した結果、カオス的な運動も含まれていることがわかった。さらに、実験で観察された非線形現象が発生するメカニズムを調べるために、現象をモデル化した方程式を導き、非線形力学の観点から考察を行なった。その結果、この問題では船の横揺れと船内の水の結合系の運動が支配的で、複雑な非線形現象が発生する原因になっていることがわかった。

### 1. 緒論

北欧で発生したカーフェリーの事故 (*Herald of Free Enterprise* 号 (1987 年)、*Estonia* 号 (1994 年)) 以降、同種の船の安全性が見直されている。いずれの場合も数分で転覆・沈没し、救助が間に合わず多くの方が犠牲になった。事故の最大の原因は車両甲板 (車を収納する場所) 上への浸水であると考えられている。しかし、船はたとえ浸水しても十分な復原力 (傾いても元に戻ろうとする力) が備わっているように設計されている。なぜそのような船が数分で転覆してしまったのか?

著者らはカーフェリーの模型船を用いて、浸水により車両甲板上に滞留した水が波浪中の船体運動に与える影響を調べる実験を行なった<sup>1)</sup>。その結果、波はおだやかで規則的でも、船の横揺れはかなり大振幅でかつ不規則になる場合があることがわかった。また、実験の観察により、この非線形運動では船体と船内の水の連成運動が支配的であると考えた。そこで、その連成運動を詳しく調べるために、箱船の模型船を用いて現象を簡略化した実験を行なった<sup>1)</sup>。その結果、フェリー模型の実験と同じような複雑な横揺れが観察され、さらにその揺

これはカオス的であることがわかった。これまで、波浪中の船の横揺れ運動でカオスが発生することは、理論と数値計算で指摘されているが<sup>2)</sup>、実験で示された例はほとんど無い。著者らはさらに、浸水した船の波浪中の運動をモデル化した方程式を導き、実験で観察された複雑な非線形運動が発生するメカニズムを非線形力学の観点から調べている<sup>3)4)</sup>。

本稿は、実験データの時系列解析と、数学モデルを用いた非線形解析、特に分岐解析の結果の一部をまとめている。

## 2. フェリー模型を用いた実験

### 実験方法

カーフェリーの車両甲板に海水が滞留し、船体が横波を受けている場合を想定した実験を行なった。模型船（実船の1/23.5）と水槽実験の概要を Fig.1 に示す。模型船の主要目等は長さ  $L_{pp}=4.3\text{m}$ 、幅  $B=0.681\text{m}$ 、底から車両甲板までの高さ  $D=0.236\text{m}$ 、喫水  $d=0.186\text{m}$ 、乾舷  $f_r=0.05\text{m}$ 、排水量  $W=272.69\text{kg}$ 、底から重心までの高さ  $\overline{KG}=0.25\text{m}$ 、重心からメタセンター（横揺れの回転中心）までの高さ  $\overline{GM}=0.069\text{m}$ 、横揺れ固有周期  $T_{nr}=1.94\text{sec.}$  である。模型船の中には、車両甲板に対応する空間（Fig.1(a) のグレーの部分）を設けた。この甲板上に適当な量の水を入れた状態で、規則波（高さ  $H$  と周期  $T$  が一定の波）中の模型船の運動を傾斜計と加速度計により調べた。

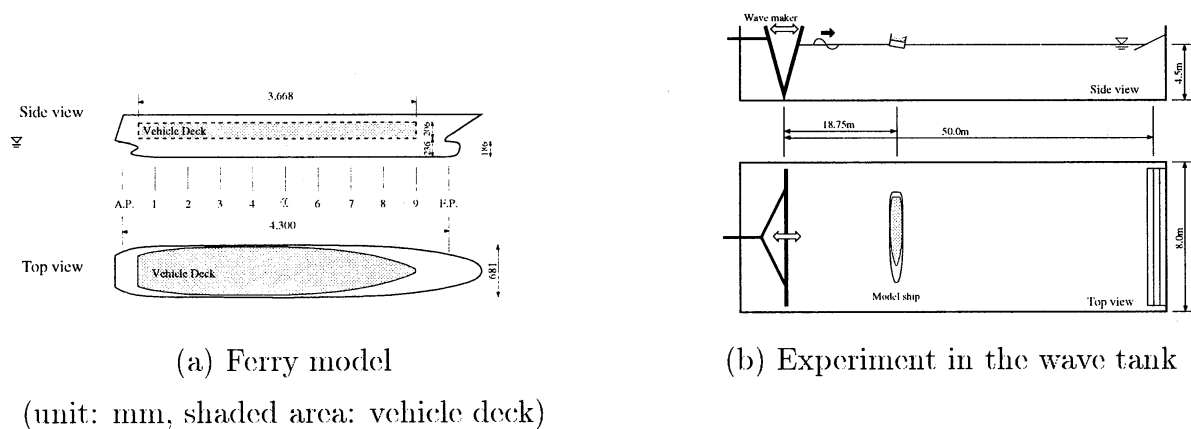


Fig.1 Ferry model and experimental setup

(フェリー模型と実験装置)

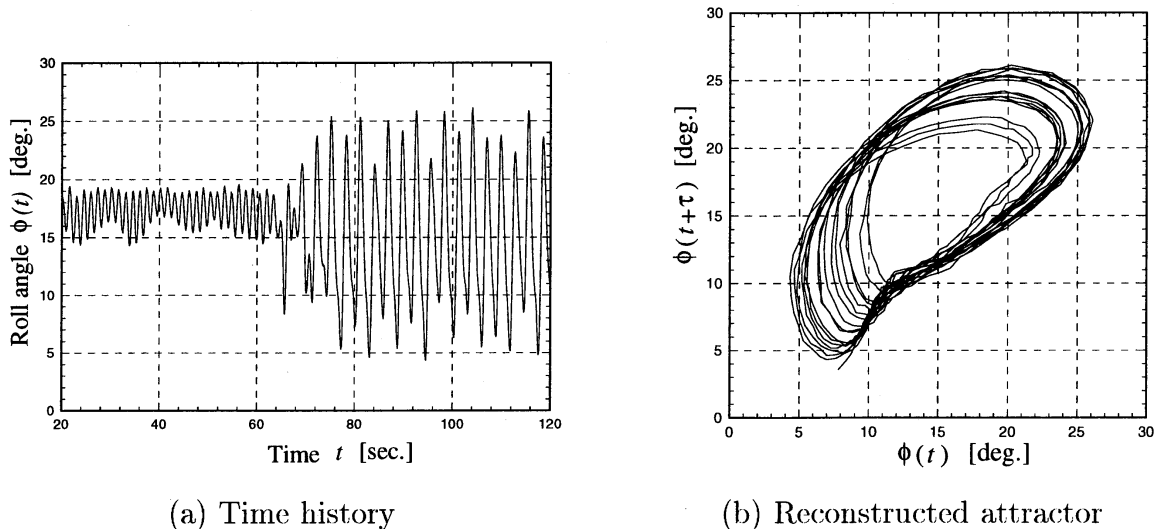
### 実験結果

Fig.2(a) は、船内に船の排水量  $W$  の20%の水を入れた場合の、横揺れ角  $\phi$  の時系列データの一例を表す（横揺れ角の定義は Fig.7 参照）。波の高さ  $H$ 、周波数  $f$  はそれぞれ  $H=13.0\text{cm}$ 、 $f=0.69\text{Hz}$  である。実験は模型船を波下側の静的な釣合点（傾斜角  $\phi(t=0)=19.0\text{deg.}$ ）に静止させてから開始した。また、船体運動に外乱を与えるために、 $t \simeq 65\text{sec.}$

で模型船の船側部を軽く突いた。このグラフから (i)  $t < \text{約 } 65\text{sec.}$  では、横揺れの両振幅は約  $5\text{deg.}$  で平均周期は入射波の周期と同じである、(ii)  $t \simeq 65\text{sec.}$  で模型船の船側部を軽く突いたあと、横揺れの両振幅は約  $20\text{deg.}$  で平均周期は入射波の周期の2倍になった、(iii) 波（入力）は規則的であるのに対し、横揺れ（出力）は不規則で複雑な挙動をしている、ということがわかる。したがって、船内に滞留水が存在すると、わずかな外乱により船体の横揺れが約4倍になる可能性がある。また、同じ入力（波）に対して複数の出力（横揺れ）が共存することは非線形運動の特徴のひとつである。

Fig.2(b) は、振幅の大きい方の揺れ ( $t > \text{約 } 65\text{sec.}$ ) の時系列データを、時間遅れ座標 ( $\phi(t), \phi(t + \tau)$ ) を用いて2次元の擬状態空間に再構成したアトラクターを表す ( $\tau = T/4, T$ : 波周期)。この軌道はストレンジ・アトラクターのように見えるので、この揺れは単純な分數調波振動ではないことが予想される。もしカオスであるならば、これは不安定なモードを内在する大振幅運動であるので、船の安全性を考える上で非常に重要な現象である。

実験の観察により、この問題では船の横揺れと船内の水の連成運動が支配的であると考えられる。そこで、本研究ではその連成運動による非線形現象を詳しく調べることにした。



**Fig.2 Measured roll angle  $\phi(t)$  of the ferry model**

(フェリー模型の横揺れ角の計測結果)

The wave height  $H=13.0\text{cm}$ , the wave period  $T=1.44\text{sec.}$ , and the ratio of the amount of flooded water  $w$  to the displacement of the model  $W$ ,  $w/W=0.2$ .

At  $t \simeq 65\text{sec.}$ , the model was lightly impinged by a stick.  $\tau=T/4$ .

### 3. 箱船の模型を用いた実験

#### 実験方法

船の横揺れと船内の水の連成運動を調べるために、箱船を用いて現象を簡略化した実験を行なった。実験はフェリー模型の実験と同じ水槽で行なった。箱船模型と計測装置の概要を

Fig.3 に示す。模型は上部と下部の二つからなり、上部模型は車両甲板を想定している。実験は上部模型に適当な量の水を入れて行なった。模型の主要目等は  $L=0.92\text{m}$ ,  $B=0.45\text{m}$ ,  $D=0.13\text{m}$ , 喫水  $d=0.11\text{m}$ , 乾舷  $f_r=0.02\text{m}$ , 排水量  $W=45.54\text{kg}$ ,  $\overline{KG}=0.158\text{m}$ ,  $\overline{GM}=0.050\text{m}$ , 横揺れ固有周期  $T_{nr}=1.54\text{sec.}$  である。流場が波の進行方向の鉛直断面内で二次元的になるように、模型を二枚の板 ( $0.6\text{m}\times 1.5\text{m}$ ) で挟まれた領域に配置した (Fig.3(a))。この実験装置では、模型は横揺れ (roll), 左右揺 (sway), 上下揺 (heave) のみが可能であり、それぞれポテンシオメーターを利用して計測した。また、装置の計測範囲の制約上、模型が波下側へ漂流しないようにするために弱いバネ (バネ定数  $k=3.92\text{N/m}$ ) で左右揺 (sway) を拘束している (Fig.3(b))。

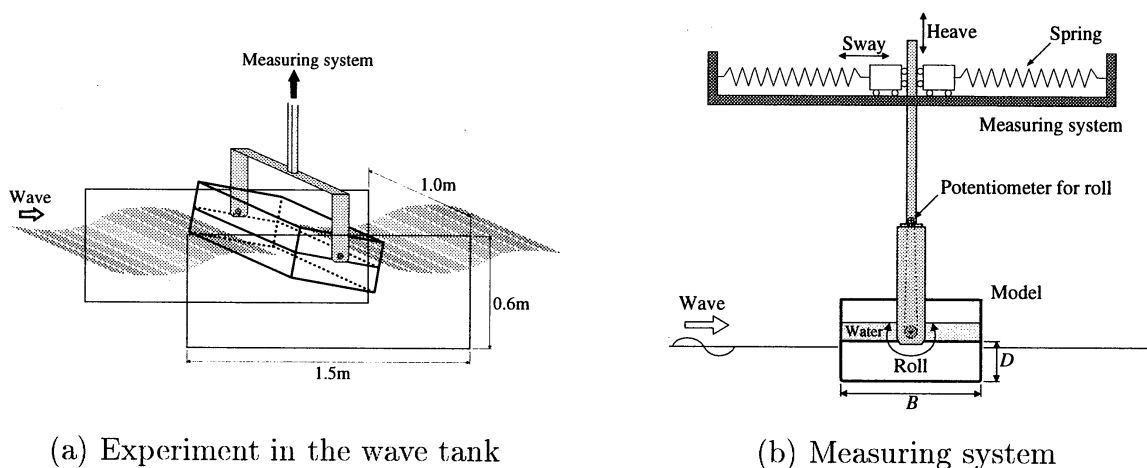
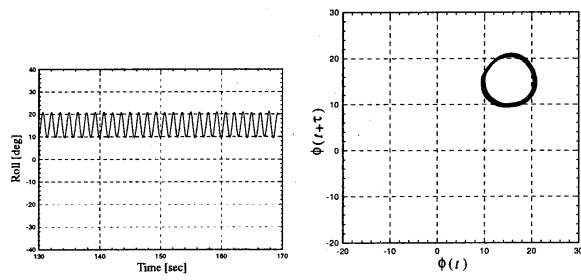
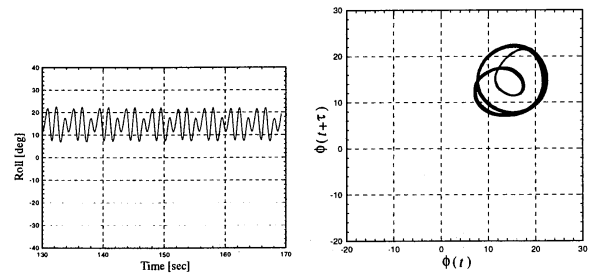
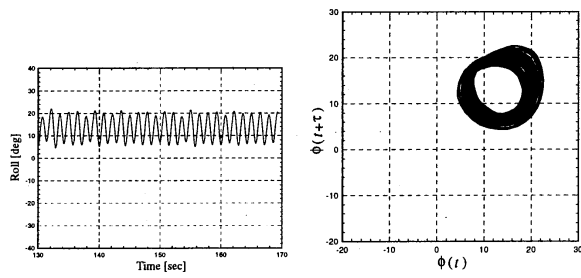
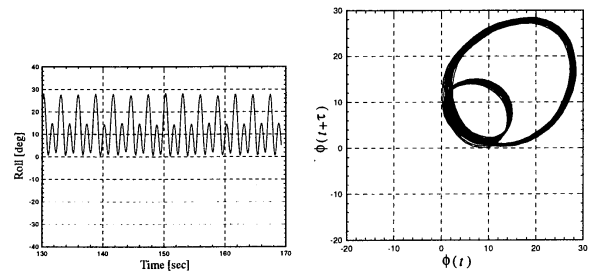
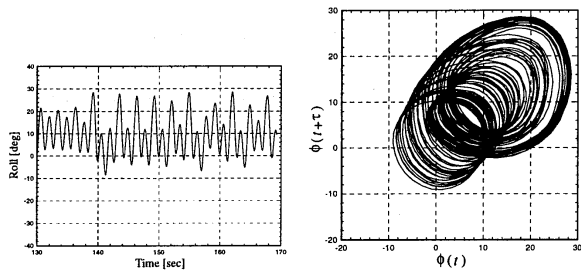
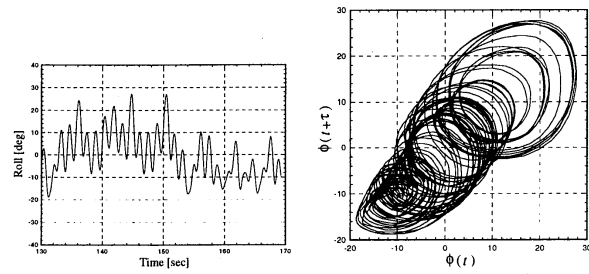


Fig.3 Simplified two-dimensional motion of a box-shaped ship in beam sea  
(箱船模型実験)

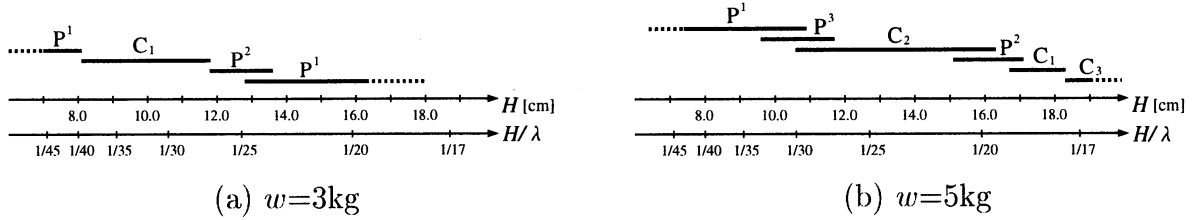
### 実験結果

波は規則波を用いた。波周波数を  $f=0.7\text{Hz}$  に固定し、波高の増減に伴う横揺れの変化を検討した。計測時間は約3分である。本研究では定常状態のみを考察する。Fig.4 は、模型内の水の量が  $w=5\text{kg}$  の場合の代表的な横揺れ角の時系列、二次元の時間遅れ座標系 ( $\phi(t)$ ,  $\phi(t+\tau)$ ) を用いて再構成されたアトラクターを表す ( $\tau=T/4$ ,  $T=1/f$ )。

(a)  $H=9.3\text{cm}$  ( $P^1$ )(b)  $H=10.3\text{cm}$  ( $P^3$ )(c)  $H=14.6\text{cm}$  ( $C_2$ )(d)  $H=15.1\text{cm}$  ( $P^2$ )(e)  $H=18.2\text{cm}$  ( $C_1$ )(f)  $H=18.6\text{cm}$  ( $C_3$ )**Fig.4 Measured roll motion of the box-shaped model**

(箱船模型の横揺れ角の計測結果)

Left: the time series of the roll angle  $\phi$ , right: the reconstructed attractor, the wave freq.  $f=0.7\text{Hz}$ , the amount of water inside the box-shaped ship  $w=5\text{kg}$ ,  $H$ ; the wave height,  $\tau=T/4$ ,  $T=1/f$ . See caption of fig.5.



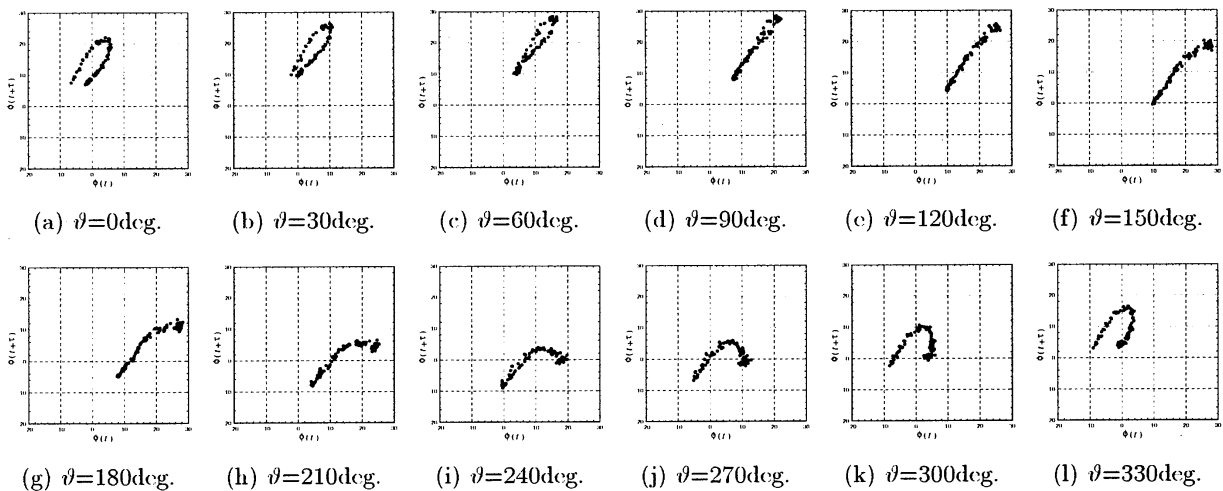
**Fig.5 Variation of roll motion of the box-shaped model with wave height**  
 (箱船模型の横揺れ運動の分岐現象)

$w$ ; the amount of water in the model ship,  $H$ ; the wave height,  $\lambda$ ; the wave length.  $P^1$ ; Period 1,  $P^2$ ; Period 2,  $P^3$ ; Period 3,  $C_1$ ; Chaos of type 1,  $C_2$ ; Chaos of type 2,  $C_3$ ; Chaos of type 3.

Fig.5 は、模型内の水の量が  $w=3\text{kg}$  と  $5\text{kg}$  の場合の、波高の変化にともなう横揺れのパターンの変化をまとめた図である。図中、横軸は波高  $H$ 、あるいは波傾斜  $H/\lambda$  ( $\lambda$ : 波長) で、 $P^1$ : 横揺れの周期が波周期と同じ、 $P^2$ : 横揺れの周期に波周期の 2, 4, ... 倍の成分が現れる、 $P^3$ : 横揺れの周期に波周期の 3 倍の成分が現れる、 $C_1, C_2, C_3$ : 横揺れがカオス的である (タイプ 1, 2, 3)、ことを表す。領域が重なっているところは、同じ波の条件でも複数の揺れ方が存在していることを表している。

4. カオス的な横揺れ運動について

カオス的な横揺れ運動の時系列データをさらに詳しく調べた。特に、カオス的な現象に共通してみられる、カオスの生成機構と初期値鋭敏性を調べるために、ストロボ・プロットとリアプノフ指数を調べた。

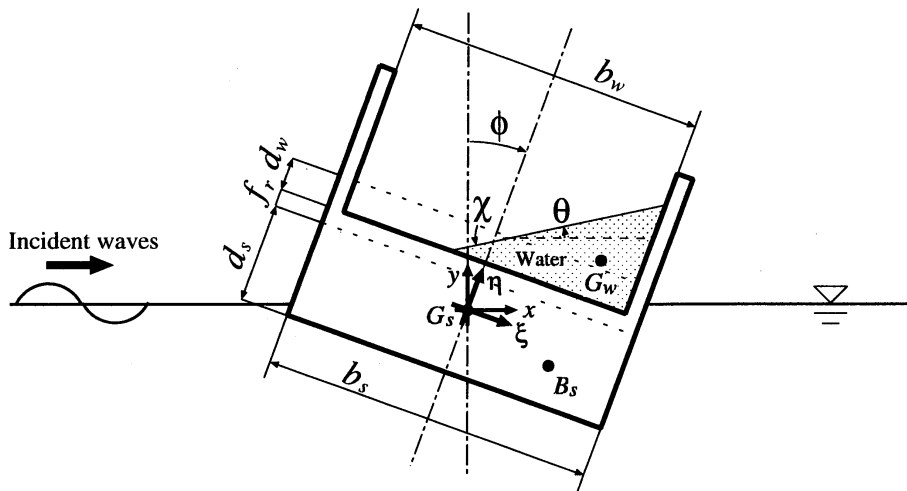


**Fig.6 Stroboscopic plots (ストロボ・プロット)**  
 ( $\vartheta$ ; phase of incident waves,  $w=5\text{kg}$ ,  $H=18.2\text{cm}$ )

Fig.6 は船内水の量  $w=5\text{kg}$ , 波の高さ  $H=18.2\text{cm}$  のときの、ストロボ・プロット ( $\phi(t)$ ,  $\phi(t+\tau)$ ) at  $\vartheta=2\pi \times j/12$  ( $j=0\sim11$ ,  $\vartheta$ ; 波の位相) を表している。この場合、ストロボ・プロットとは波の一周期ごとの横揺れ角  $\phi$  のプロットのことを表す。波は規則的な正弦波に近い波であるのでその位相  $\vartheta$  は  $0\sim360$  度まで定義できる。Fig.6 は  $30$  度おきの波の位相に対するストロボプロットが並べられている。この図から、アトラクターが位相とともに引き伸ばされ、次に折り畳まれ、最終的に縮んで元の形にもどる、という低次元カオスの生成機構がはっきり表れていることがわかる。

また、不規則で複雑な運動の中から三つ (a)  $w=3\text{kg}$ ,  $H=8.9\text{cm}$ 、(b)  $w=5\text{kg}$ ,  $H=18.2\text{cm}$ 、(c)  $w=5\text{kg}$ ,  $H=18.6\text{cm}$ 、を選び、そのリアプノフ指数を計算した。その結果、リアプノフ指数の最大値  $\lambda_{\max}$  は (a)  $\lambda_{\max}=0.203\pm0.009$ , (b)  $\lambda_{\max}=0.224\pm0.012$ , (c)  $\lambda_{\max}=0.330\pm0.018$  でいずれも正であり、これらの横揺れ運動はカオス的であることがわかった。

## 5. 波浪中で浸水した船の横揺れの数学モデル



**Fig.7 Illustration of two-dimensional motion of a flooded box-shaped ship in regular waves (波浪中で浸水した箱船の断面図)**

$\phi$ ; roll angle of a ship,  $\chi$ ; slope of the surface of flooded water,  $b_s$ ; breadth of a ship,  $b_w$ ; breadth of a vehicle deck,  $d_s$ ; draft,  $f_r$ ; freeboard,  $d_w$ ; depth of flooded water,  $G_s$ ; center of gravity of a ship,  $G_w$ ; center of gravity of flooded water,  $B_s$ ; center of buoyancy of a ship.

Fig.7 のような箱船の横揺れと船内の水の連成運動に注目したモデル方程式を考える。そのために次のような五つの仮定をした：

- (i) 横揺れ (roll) と中の水の連成運動が支配的で、左右揺 (sway) と上下揺 (heave) との干渉は無視できる。
- (ii) 中の水の表面は平ら (傾き  $\chi$ ) である。
- (iii) 中の水の運動はその重心とともに動く質量  $w$  の質点の運動に置き換えられる。
- (iv) 横揺れの強制モーメントは波と同じ周期で正弦的に変化する。
- (v) 横揺れと中の水の減衰力はそれぞれ  $\dot{\phi}$  と  $\dot{\chi}$  ( $\dot{\quad} = d/dt$ ) に関して線形である。

座標系、船の代表寸法等は Fig.7 のように定義する。そのとき、船の横揺れと中の水、それぞれの系の運動エネルギー  $K$ 、ポテンシャル・エネルギー  $P$ 、エネルギーの散逸率  $D$  は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} K_s &= \frac{1}{2}(I + \delta I)\dot{\phi}^2 = \frac{1}{2}M\kappa^2\dot{\phi}^2, & K_w &= \frac{1}{2}m(x_{G_w}^2 + y_{G_w}^2), \\ P_s &= -\rho V g y_{B_s} = -(M + m)g y_{B_s}, & P_w &= m g y_{G_w}, \\ P_e &= -\phi\{\tilde{A}_0 + \tilde{A}_1 \sin(\Omega t + \psi)\}, & D &= \frac{1}{2}\tilde{\nu}_s\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}\tilde{\nu}_w\dot{\chi}^2. \end{aligned} \quad (1)$$

ここで、下付きの  $s, w, e$  は船、中の水、強制モーメント、 $I$  と  $\delta I$  は横揺れの回転中心まわりの慣性モーメントと付加慣性モーメント、 $M$  と  $m$  は船と中の水の質量、 $g$  は重力加速度、 $V$  は船の水面下の体積、 $\kappa$  は横揺れの慣動半径、 $\mathbf{x}_{G_w} = (x_{G_w}, y_{G_w})$  は中の水の重心位置、 $\mathbf{x}_{B_s} = (x_{B_s}, y_{B_s})$  は船の浮心 (水面下の体積中心) 位置、 $\tilde{A}_0 + \tilde{A}_1 \sin(\Omega t + \psi)$  は横揺れの強制モーメント、 $\Omega$  は波の角周波数、 $\tilde{\nu}$  は減衰係数をそれぞれ表す。以降、質量は  $M$ 、長さは  $\kappa$  で無次元化する。これらを以下のようなラグランジュの運動方程式に代入することにより、浸水した船体運動の数学モデルが得られる。

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \phi} + \frac{\partial D}{\partial \dot{\phi}} = 0, \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\chi}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \chi} + \frac{\partial D}{\partial \dot{\chi}} = 0. \quad (2)$$

ここで、 $L = K - P$  はラグランジアンで、 $K = K_s + K_w$ 、 $P = P_s + P_w + P_e$  である。したがって、 $\mathbf{x}_{G_w}$  と  $\mathbf{x}_{B_s}$  が与えられれば、数学モデルを導くことができる。上記の仮定から、 $\mathbf{x}_{G_w}$  と  $\mathbf{x}_{B_s}$  は幾何学的に求めることが可能である。しかし、そのまま (1)(2) 式に代入すると、解の安定性解析に必要なヤコビ行列に不連続性が表れ、分岐解析が困難になる<sup>3)</sup>。そこで、位置エネルギー  $P = P_s + P_w$ 、船内水の運動エネルギー  $K_w$  を次のように近似することにした<sup>4)</sup>。



$$\begin{aligned}
P(\phi, \theta) &\simeq \sigma^2 \{ (\alpha_0 + \alpha_2 \phi^2) \theta^2 + \gamma_2 \phi^2 + \gamma_4 \phi^4 \}, \\
K_w(\phi, \theta) &\simeq \frac{1}{2} \rho q_0(\phi, \theta) (\dot{\phi}^2 + \dot{\theta}^2).
\end{aligned}
\tag{3}$$

ここで、 $q_0(\phi, \theta)$  は

$$q_0(\phi, \theta) = \frac{c_2}{1 + c_1(\phi + \theta)^2}, \tag{4}$$

で、 $\theta = \chi - \phi$  (Fig.7 参照),  $\sigma = \sqrt{g/\kappa}$ ,  $\alpha_0, \alpha_2, \gamma_2, \gamma_4, c_1, c_2$  は定数である。このようにして近似した位置エネルギーと運動エネルギーをラグランジュの運動方程式 (2) 式に代入すると次式を得る。

$$\mathbf{M}_1 \ddot{\Phi}_1 + \mathbf{N}_1 \dot{\Phi}_1 + \mathbf{h}_1 + \mathbf{r}_1 = \mathbf{f}. \tag{5}$$

ここで、

$$\begin{aligned}
\mathbf{M}_1 &= \begin{pmatrix} 1 + \rho q_0 & \rho q_0 \\ \rho q_0 & \rho q_0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{N}_1 = \begin{pmatrix} \nu_\phi & 0 \\ 0 & \nu_\theta \end{pmatrix}, \quad \mathbf{h}_1 = \frac{1}{2} \rho \frac{\partial q_0}{\partial \phi} (\dot{\phi} + \dot{\theta})^2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \\
\mathbf{r}_1 &= \sigma^2 \begin{pmatrix} 2\alpha_2 \phi \theta^2 + 2\gamma_2 \phi + 4\gamma_4 \phi^3 \\ 2(\alpha_0 + \alpha_2 \phi^2) \theta \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f} = \begin{pmatrix} A_0 + A_1 \sin(\Omega t + \psi) \\ 0 \end{pmatrix},
\end{aligned}
\tag{6}$$

で、 $\Phi_1 = (\phi, \theta)^\top$ ,  $\rho = m/M$  である。さらに、(5) 式は次のように書き換えることができる。

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \mathbf{F}(t, \mathbf{u}). \tag{7}$$

ここで、 $\mathbf{u} = (\phi, \theta, \dot{\phi}, \dot{\theta})^\top$  で

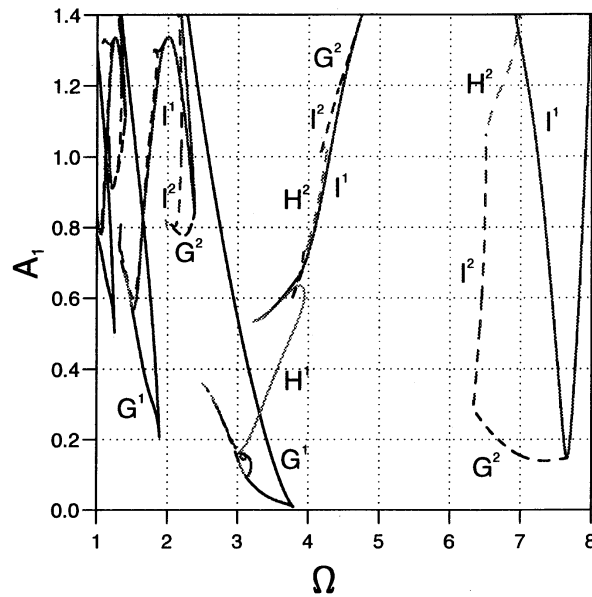
$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \dot{\Phi}_1 \\ \mathbf{M}_1^{-1}(-\mathbf{N}_1 \dot{\Phi}_1 - \mathbf{h}_1 - \mathbf{r}_1 + \mathbf{f}) \end{pmatrix}, \tag{8}$$

である。上式のベクトル場  $\mathbf{F}$  は十分滑らかであるので、解の安定性解析を比較的容易に行なうことができる。

## 6. 船の数学モデルの分岐解析

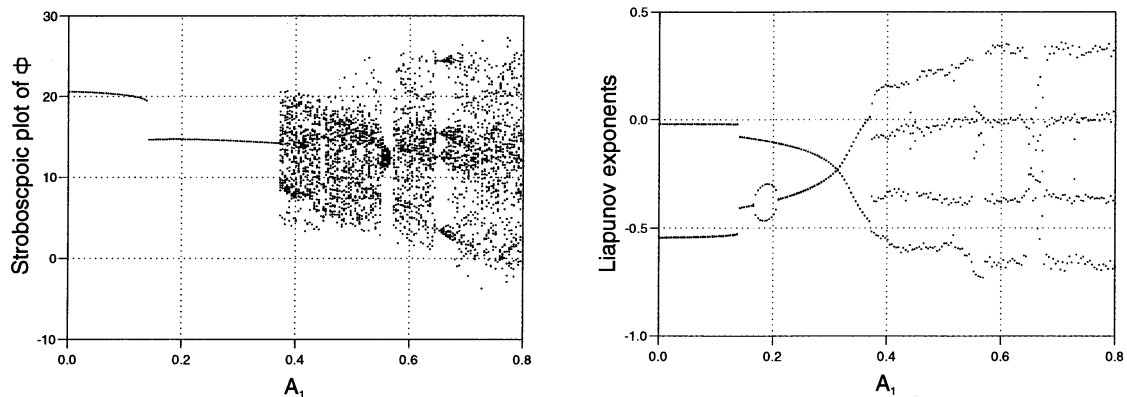
本研究では、波という周期的な外力を受ける船と船内水の結合系のダイナミクスを問題にしているため、周期解が基本的な解である。したがって、周期解の安定性を調べることであり、実験で観察された複雑な分岐現象（解の定性的性質が変化する現象）を解明することが可能になると考えられる。便宜上、(7)式で初期値が  $\mathbf{u}(t = t_0) = \mathbf{u}_0$  のときの解を  $\mathbf{u} = \varphi(t, \mathbf{u}_0, \lambda)$  で表す ( $\lambda$ : パラメーター)。  $N$  周期解（基本周期が波の周期の  $N$  倍の解）の安定性を考えるために、ポアンカレ写像  $\mathbf{T}: \mathbf{u}_0 \mapsto \mathbf{T}(\mathbf{u}_0) = \varphi(t = t_0 + \frac{2\pi}{\Omega}, \mathbf{u}_0, \lambda)$  を考える ( $\Omega$ : 波の角周波数)。  $N$  周期解は不動点の条件  $\mathbf{u}_0 = \mathbf{T}^N(\mathbf{u}_0, \lambda)$  を満足する。したがって、その安定性は  $\frac{\partial \mathbf{T}^N}{\partial \mathbf{u}_0}$  の固有値  $\mu_i$  ( $i=1\sim 4$ ) を用いて調べることができる。固有値  $\mu_i$  は特性方程式  $\left| \mu \mathbf{I} - \frac{\partial \mathbf{T}^N}{\partial \mathbf{u}_0} \right| = 0$  の解である ( $\mathbf{I}$ :  $4 \times 4$  の単位行列)。固有値の絶対値の最大値  $|\mu_{max}|$  が 1 以下であれば注目している周期解は安定、1 以上であれば不安定である。一般的に固有値  $\mu = \mu_R + i\mu_I$  は複素数なので、全ての固有値が複素平面 ( $\mu_R, \mu_I$ ) の単位円内にあれば安定、外にあれば不安定である。また、 $|\mu_{max}|=1$  のときに分岐が起きるが、そのときの  $\mu_{max}$  の単位円上の位置によって分岐の基本的なタイプを次の三つに分けることができる: (a) サドル・ノード分岐 ( $\mu_{max}=+1$ , 周期解が発生あるいは消滅する)、(b) 周期倍分岐 ( $\mu_{max}=-1$ ,  $N$  周期解が  $2N$  周期解に変化する)、(c) ネイマルク・サッカ分岐 ( $\mu_{max}=e^{i\Theta}$ ,  $\Theta \neq 0, \pi$ , 周期解が準周期解（互いに無理数比の周期を含む）に変化する)。

Fig.8 は  $(\Omega, A_1)$  平面の 2 パラメータ分岐図の一例 ( $\rho=0.1, A_0=1.0$ ) を表す。他のパラメータの値は、箱型模型実験の条件に近い値に設定している。分岐曲線の数値的追跡法は Kawakami の方法<sup>3)4)5)</sup>にしたがった。



**Fig.8.** Two parameter bifurcation diagrams in the  $(\Omega, A_1)$  plane ( $\rho=0.1, A_0=1.0, \nu_\phi=0.05,$  and  $\nu_\theta=0.05$ ). (2パラメータ分岐図の一例)

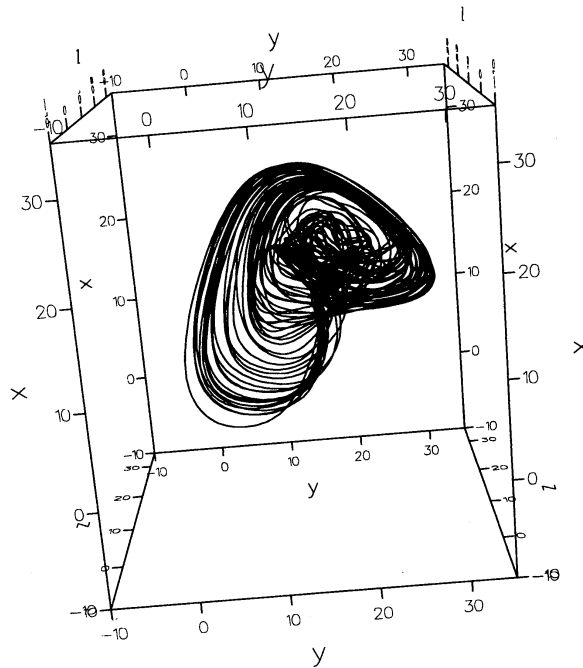
The other parameter values are closely set to the experiments using the box-shaped model. The wave exciting moment  $A_1$  [ $\text{sec}^{-2}$ ] and the wave frequency  $\Omega$  [ $\text{rad/sec}$ ] are represented in the experimental scale. Solid line : bifurcation curves of the period-1 solution. Dashed line : bifurcation curves of the period-2 solution.  $G^N$  : the saddle-nodel bifurcation.  $I^N$  : the period-doubling bifurcation.  $H^N$  : the Neimark-Sacker bifurcation.  $N$  : the period  $N$  solution.



(a) Stroboscopic plots of the roll angle  
 $\phi(t_0 + k2\pi/\Omega), k=0,1,2,\dots,30.$

(b) Liapunov exponents

**Fig 9.** One parameter bifurcation diagrams with increase of  $A_1$  ( $\rho=0.1, A_0=1.0$ ). (Fig.8 における 1 パラメータ分岐図の一例)



**Fig 10. An attractor of a chaotic solution of the mathematical model ( $\rho=0.1$ ,  $A_0=1.0$ ,  $A_1=0.6$ ,  $\Omega=3.5$ ). This attractor is reconstructed using the delay coordinates  $(x,y,z)=(\phi(t), \phi(t+\tau), \phi(t+2\tau))$  where  $\tau=\frac{1}{4}\frac{2\pi}{\Omega}$ . Unit: degree.) (Fig.9 のカオス解のアトラクタの一例)**

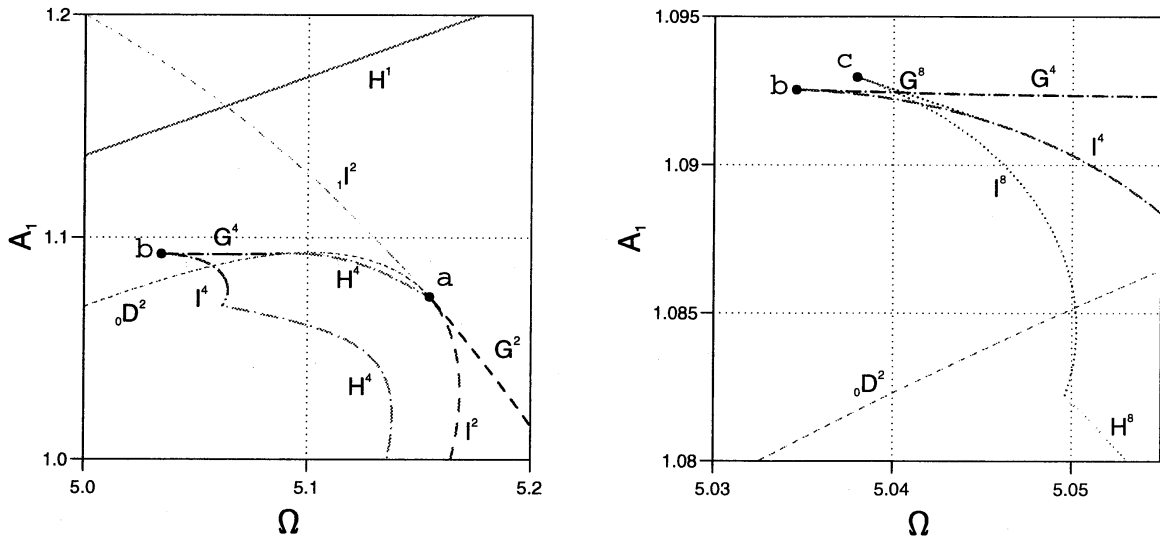
本研究で導いた数学モデルの分岐解析を行なった結果、実験と同様にかかなり広いパラメータの範囲でカオス解がみられた。Fig.9 はその一例を示した 1 パラメータ分岐図である。この図では、実験と同じように、波の高さに対応するパラメータ  $A_1$  のみを増加させたときの、横揺れ運動の変化を表している。パラメータ値は Fig.8 と同じに設定している。Fig.9(a) は横揺れ角  $\phi$  のストロボ・プロット（波の一周ごとの  $\phi$  の値のプロット）の  $A_1$  の増加に伴う変化を、Fig.9(b) は (a) に対応するリアプノフ指数の変化を表している。これらより、最大リアプノフ指数が正、すなわちカオス的な解が  $A_1 > 0.365$  で発生していることがわかる。Fig.10 は Fig.9 で  $A_1=0.6$  のカオス解の三次元状態空間におけるアトラクタを表している。Fig.4(e) の実験結果とよく似ていることがわかる。

## 6. 考察

波浪中で浸水した船の運動の数学モデル (5) 式の解が、実験で観察された非線形現象と定性的に合うことはわかった。カオスを含む複雑な現象が発生するメカニズムを完全に解明するまでには至っていないが、分岐解析の結果から明らかになったことを以下にまとめる。

まず、数学モデル (5) 式はダフィング方程式の結合系とみなすことができる。その特徴は、

(i) 二つの安定平衡点を持つこと、(ii) 慣性項の係数行列  $M_1$  が非線形であること、の二つである。これらの特徴をもつ結合系のダイナミクスは、まだ体系的に調べられていない。しかし、非線形結合系の特徴として、余次元 2 の分岐点、すなわち余次元 1 の分岐（サドル・ノード分岐、周期倍分岐、ネイマルク・サッカ分岐）のうち二つのタイプが同時に起きる分岐点付近の解の構造が、複雑な非線形現象の大きな原因の一つになっていると考えられる。Figs.10(a)(b) は周期 2 の解のサドル・ノード分岐と周期倍分岐が同時に起きる余次元 2 の分岐点付近の解の構造を詳しく調べた結果の一例を表している ( $\rho=0.1$ ,  $A_0=0.0$ ,  $\nu_\phi=0.05$ ,  $\nu_\theta=0.05$ )。これらより、余次元 2 の分岐点付近では、2 周期解, 4 周期解, 8 周期解, ... のサドル・ノード分岐、周期倍分岐、ネイマルク・サッカ分岐、それぞれの連鎖がみられることがわかる。このことはカオスの発生と深く関係していると予想される。



(a) The enlarged diagram near 'a'

(b) The enlarged diagram near 'b'

**Fig.10 Two parameter bifurcation diagrams near the codimension two bifurcation points ( $\rho=0.1$  and  $A_0=0$ ). (余次元 2 の分岐点付近の 2 パラメータ分岐図)**

The point 'a' in (a) denotes the codimension two bifurcation point at which the saddle-node and the period-doubling bifurcations occur. Solid line : bifurcation curves of the period-1 solution. Dashed line : bifurcation curves of the period-2 solution. Dot-dashed line: bifurcation curves of the period-4 solutions. Dotted line: bifurcation curves of the period-8 solutions.  $^N$  : the period  $N$  solution.  ${}_0D^2$  :  $\mu_1 > 1, \mu_2 = -1, \mu_{3,4} < 1$ .  ${}_1I^2$  :  $\mu_1 < -1, \mu_2 = 1, \mu_{3,4} < 1$ . The  $\mu_i$ 's are the eigenvalues of  $\partial T^2 / \partial u_0$ . See caption of fig.8.

## 6. 結論

浸水した船の横波中の船体運動を、模型実験と数学モデルにより調べた。その結果、以下のようなことが明らかになった。

- 船内に滞留水があると、比較のおだやかな波の中でも、かなり大きな振幅の非線形横揺れが発生する場合がある。
- この非線形運動では、船体の横揺れと船内の水の連成運動が支配的である。
- 波高や浸水量が変わると、横揺れのパターンはかなり大きく変化し、かつ複雑である。
- カオス的な複雑な横揺れが見られる場合がある。リアプノフ指数とストロボ・プロットによりカオスの特徴が明瞭に示された。
- 船の横揺れと船内の水の連成運動をモデル化した方程式を導いた。この数学モデルの解は、実際の現象と定性的に良く合っている。
- 数学モデルの周期解の安定性を調べることにより、分岐の構造を考察した。その結果、実験で観察された複雑な非線形現象が発生するメカニズムが明らかになりつつある。

今後は、数学モデルの理論的・数値的解析をさらに進め、強制力を受ける結合系のダイナミクスを明らかにしていきたい。そのためには余次元の高い分岐点付近の詳細な解析が不可欠であると考えている。

## 参考文献

1. Murashige, S. & Aihara, K. : “Experimental Study on Chaotic Motion of a Flooded Ship in Waves”, Proc. R. Soc. Lond. A, Vol.454, 1998, pp.2537–2553.
2. Thompson, J.M.T. : “Designing against Capsize in Beam Seas: Recent Advances and New Insights”, Appl. Mech. Rev., Vol.50, 1997, pp.307–325.
3. Murashige, S., Komuro, M. & Aihara, K. : “Bifurcation and resonance of a mathematical model for non-linear motion of a flooded ship in waves”, J. Sound and Vibration, Vol.220, 1999, pp.155–170.
4. Murashige, S., Yamada, T. & Aihara, K. : “Nonlinear Analyses of Roll Motion of a Flooded Ship in Waves”, Phil. Trans. R. Soc. Lond. A, 2000, [to be published].

5. Kawakami, H. : "Bifurcation of Periodic Responses in Forced Dynamic Nonlinear Circuits: Computation of Bifurcation Values of the System Parameters", IEEE Trans. Circuits and Systems, Vol.CAS-31, 1984, pp.248-260.