数理解析研究所講究録
1152巻 2000年 106-111

局所誘導ヒエラルキーは Lund-Regge 方程式と等価か?

日大理工物理　紺野公明 (Kimiaki Konno)
敦賀短大　角畠浩 (Hiroshi Kakuhata)

1 目的

Fukumoto と Miyajima[1] は局所誘導方程式のつくるヒエラルキー (LIH) が Pohlmeyer-Lund-Regge 方程式 (PLRE)[2, 3] と等価であると主張した. 他方, Imai, Konno と Kakuhata [4] は非線形非分散方程式 (DLE)[5] が, やはり PLRE 等価であることを, 簡単な方法で示した. PLRE をはさんで LIH と DLE の関係を見る事が, この報告の目的である.

得られた結果は, Fukumoto らの結論は, 一般的には正しくなく, LIH の特別の進行波解のみが PLRE の解になっていることが見いだされた.

LIH, DLE と PLRE との関係を見るために, 我々は, LIH と DLE を含む二つのヒエラルキーを持つ可積分方程式系を見いだした [6]. この方程式系を使い LIH の進行波解と DLE の解との関係が示される.

次の章で, Fukumoto 達の議論を紹介し, PLRE との関係を再検討する. 第3章で DLE と PLRE との関係を簡単に示し, 第4章で, LIH と DLE の解の間の関係を, 二つのヒエラルキーを持つ方程式系を使って議論する. 最後にまとめを行う.

2 局所誘導方程式と PLR 方程式

局所誘導方程式は

$$\boldsymbol{X}_t = \boldsymbol{X}_s \times \boldsymbol{X}_{ss} + \alpha\left(\boldsymbol{X}_{sss} + \frac{3}{2}\boldsymbol{X}_{ss} \times (\boldsymbol{X}_s \times \boldsymbol{X}_{ss})\right), \tag{1}$$

で与えられる. $\boldsymbol{X}$ は渦糸の位置ベクトルで, s は, 渦糸に沿っての弧長を表す. ここで, 第一項は, 回転流の効果を表し, 第二項は, 軸方向流の効果を表す [7].

Fukumoto 達は, 次の LIH を考えた.

$$\boldsymbol{X}_t = \boldsymbol{V}^{(1)} + \varepsilon \boldsymbol{V}^{(2)} + \varepsilon^2 \boldsymbol{V}^{(3)} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^{n-1} \boldsymbol{V}^{(n)} \tag{2}$$

ここで,

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{V}^{(1)} = \boldsymbol{X}_s \times \boldsymbol{X}_{ss}, \\
&\boldsymbol{V}^{(2)} = -\boldsymbol{X}_s \times \boldsymbol{V}_s^{(1)} + \mathcal{T}^{(2)} \boldsymbol{X}_s, \\
&\cdots \\
&\boldsymbol{V}^{(n)} = -\boldsymbol{X}_s \times \boldsymbol{V}_s^{(n-1)} + \mathcal{T}^{(n)} \boldsymbol{X}_s, \\
&\cdots .
\end{aligned}
\tag{3}
$$

ヒエラルキーの和を取ると

$$
\boldsymbol{X}_t = \boldsymbol{X}_s \times \boldsymbol{X}_{ss} - \varepsilon \boldsymbol{X}_s \times \boldsymbol{X}_{ts} + \mathcal{T} \boldsymbol{X}_s. \tag{4}
$$

が得られる. $\boldsymbol{X}_s$ と (4) を s につて微分した式の内積を取ると

$$
\mathcal{T} = \frac{\varepsilon}{2} \boldsymbol{X}_t \cdot \boldsymbol{X}_t + C(t), \tag{5}
$$

が得られる. ここで, $C(t)$ は, s について積分して得られた t の任意関数である. (4) と $\boldsymbol{X}_s$ の外積を取ると

$$
\boldsymbol{X}_s \times \boldsymbol{X}_t = -\boldsymbol{X}_{ss} + \varepsilon \boldsymbol{X}_{st}. \tag{6}
$$

が得られる. 変数変換

$$
\begin{aligned}
\zeta &= s, \\
\eta &= \frac{2t}{\varepsilon} + s,
\end{aligned}
\tag{7}
$$

を行うと, (6) は

$$
\boldsymbol{X}_{\zeta\zeta} - \boldsymbol{X}_{\eta\eta} = -\frac{2}{\varepsilon} \boldsymbol{X}_\zeta \times \boldsymbol{X}_\eta. \tag{8}
$$

となる. $\boldsymbol{X}_s^2 = 1$ から

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{X}_\zeta^2 + \boldsymbol{X}_\eta^2 = 1 - \varepsilon C(t), \\
&\boldsymbol{X}_\zeta \cdot \boldsymbol{X}_\eta = \frac{\varepsilon}{2} C(t).
\end{aligned}
\tag{9}
$$

が得られる. Fukumoto 達は, もし, $C(t) = 0$ とすると, (8) と (9) は PLRE[3] であると結論付けた.

しかし, この $C = 0$ に取る操作は, 常に許されるものでないことが分かる. (5) を参照して (4) と $\boldsymbol{X}_s$ の内積を取ると

$$
\begin{aligned}
C &= \boldsymbol{X}_t \cdot \boldsymbol{X}_s - \frac{\varepsilon}{2} \boldsymbol{X}_t \cdot \boldsymbol{X}_t \\
&= \boldsymbol{X}_t \cdot \boldsymbol{X}_\eta.
\end{aligned}
\tag{10}
$$

が得られる. もちろん, $C_s = 0$. 従って, $C(t) = 0$ は $\boldsymbol{X}_\eta = 0$ を意味する. 即ち,

$$
\boldsymbol{X}_s = \frac{\varepsilon}{2} \boldsymbol{X}_t. \tag{11}
$$

$\boldsymbol{X}_s$ は $\boldsymbol{X}_t$ と平行でなければならない. この条件は, 定常波解とか周期解と言う限られた解でのみしか満足しないことが分かった.

結論として, LIH は PLRE とは一般に等価でないと言える.

3 非線形非分散方程式と PLR 方程式

次の方程式を導入する:

$$\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial t} = \begin{pmatrix} 0 & \mu_3 & -\mu_2 \\ -\mu_3 & 0 & \mu_1 \\ \mu_2 & -\mu_1 & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{R}, \tag{12}$$

ここで, $\boldsymbol{R} = (R_1, R_2, R_3)^t$.

$$\begin{aligned} \mu_{1x} &= 2R_2, \\ \mu_{2x} &= -2R_1, \\ \mu_{3x} &= 0, \end{aligned} \tag{13}$$

と

$$\begin{aligned} R_1 &= X_{1s}, \\ R_2 &= X_{2s}, \\ R_3 &= X_{3s}, \end{aligned} \tag{14}$$

を仮定すると DLE

$$\begin{aligned} X_{1st} - 2X_{3s}X_1 &= 0, \\ X_{2st} - 2X_{3s}X_2 &= 0, \\ X_{3st} + 2X_{1s}X_1 + 2X_{2s}X_2 &= 0, \end{aligned} \tag{15}$$

が得られる. この方程式は可積分で逆問題を用いて解くことが出来る [5].

O(3) の回転角 γ, ϕ, ν を使い

$$\boldsymbol{R} = e^{-\gamma J_3}\, e^{-\phi J_2}\, e^{-\nu J_3} \boldsymbol{R}_0, \tag{16}$$

と表す. $\boldsymbol{R}_0 = (0,0,1)^t$ と取り, ν を消去すると

$$\begin{aligned} \phi_{st} - \gamma_s \gamma_t \tan\phi &= 2\sin\phi, \\ \gamma_{st} + \phi_t \gamma_s \cot\phi + \frac{\gamma_t \phi_s}{\sin\phi\cos\phi} &= 0, \end{aligned} \tag{17}$$

が得られる. (ϕ, γ) から (ϕ, θ) に次の変数変換をすると

$$\begin{aligned} \gamma_t &= \frac{\theta_t \cos\phi}{2\cos^2\frac{\phi}{2}}, \\ \gamma_s &= \frac{\theta_s}{2\cos^2\frac{\phi}{2}}, \end{aligned} \tag{18}$$

他の形で表現した次の PLRE が得られる [2, 3].

$$\begin{aligned} \phi_{st} - \frac{\theta_t\theta_s \tan\frac{\phi}{2}}{2\cos^2\frac{\phi}{2}} &= 2\sin\phi, \\ \theta_{st} + \frac{\theta_s\phi_t + \theta_t\phi_s}{\sin\phi} &= 0 \end{aligned} \tag{19}$$

DLE が PLRE に等価であることが分かる.

4 局所誘導方程式と非線形非分散方程式

LIH と DLE の関係を議論するため, 次の逆問題 [6] を考える.

$$\begin{aligned} V_s &= UV, \\ V_t &= WV \end{aligned} \tag{20}$$

ここで,

$$\begin{aligned} U &= \lambda R = \sum_a \lambda R_a T^a, \\ W &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \lambda^n W_n = \sum_n \sum_a \lambda^n W_{an} T^a. \end{aligned} \tag{21}$$

T^a は Lie 代数の要素で R と W_n はベクトルを表す. この系は, 保存量

$$\mathrm{Tr} R^2 \tag{22}$$

を持つ. (20) の可積分条件

$$U_t - W_s + [U, W] = 0 \tag{23}$$

を λ のベキ展開して, 次の方程式系が得られる:

$$\begin{aligned} &\cdots \\ &-W_{3s} + [R, W_2] = 0, \\ &-W_{2s} + [R, W_1] = 0, \\ &R_t - W_{1s} + [R, W_0] = 0, \\ &-W_{0s} + [R, W_{-1}] = 0, \\ &-W_{-1s} + [R, W_{-2}] = 0, \\ &\cdots. \end{aligned} \tag{24}$$

運動方程式 R_t は, 二つのヒエラルキーからつくられている. 一つは, su(2) を仮定すると $n = 1, 2, 3, \ldots$ から成る LIH を含むヒエラルキーで, もう一つは $n = 0, -1, -2, \ldots$ から

出来る DLE を含むヒエラルキーである. 詳細は, 文献 [6] を参照のこと. 運動方程式は

$$\begin{aligned} &R_t - A_1 R_s + \frac{A_2}{2}[R, R_s]_s + A_3(R_{ss} + \frac{3}{8}[R_s, [R, R_s]])_s \cdots \\ &+[R, B_0] + [R, \int^s [R, B_{-1}]\mathrm{d}s'] + [R, \int^s [R, \int^{s'} [R, B_{-2}]\mathrm{d}s'']\mathrm{d}s'] + \cdots = 0, \end{aligned} \tag{25}$$

で与えられる. ここで, A_i は定数で B_i は定数行列である. ベクトル記号 $\boldsymbol{X}_s = \boldsymbol{R}$ を使うと (25) は

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{X}_{st} - A_1 \boldsymbol{X}_{ss} + A_2 \boldsymbol{X}_s \times \boldsymbol{X}_{sss} + A_3[\boldsymbol{X}_{sss} + \frac{3}{2}\boldsymbol{X}_{ss} \times (\boldsymbol{X}_s \times \boldsymbol{X}_{ss})]_s + \cdots \\ &+2\boldsymbol{X}_s \times \boldsymbol{B}_0 + 4\boldsymbol{X}_s \times (\boldsymbol{X} \times \boldsymbol{B}_{-1}) - 8\boldsymbol{X}_s \times (\int^s \boldsymbol{X}_{s'} \times (\boldsymbol{X} \times \boldsymbol{B}_{-2})\mathrm{d}s') + \cdots = 0. \end{aligned} \tag{26}$$

と表される. このでで, $\boldsymbol{B}_i$ は, 定ベクトルである. LIH を含むヒエラルキーの係数 A_1 を持つ第一項は, 渦糸の slipping motion を表し, 第二項は, 速度 A_1 で運動する渦糸を, さらに次の項は回転流を, 次の項は軸方向流を表す. 係数 $\boldsymbol{B}_0$ を持つ項は, 回転流の中での回転速度 $\boldsymbol{B}_0$ での渦糸の運動を表し, 次の, $\boldsymbol{B}_{-1}$ を持つ項 DLE は, 回転速度が $\boldsymbol{B}_0 + \boldsymbol{X} \times \boldsymbol{B}_{-1}$ で表されるときの補正項として解釈できる.

この逆問題を解くとソリトン解が求められる. その詳細は論文 [8] で詳しく議論する. 1 ソリトン解は

$$\boldsymbol{X}_s(s,t) = \boldsymbol{X}_s(\lambda X_0 s - \omega t), \tag{27}$$

の形をしている. λ は, スペクトルパラメータを表し, X_0 は, $\boldsymbol{X}$ の無限遠での振る舞いから決められる定数である. ω は

$$\omega = (-\lambda A_1 + 2A_2\lambda^2 - 4A_3\lambda^3 + \cdots)X_0 + B_0 - \frac{B_{-1}}{\lambda} + \cdots. \tag{28}$$

で与えられる. (2) の LIH は

$$A_1 = 0, \quad A_2 = 1, \quad A_3 = -\varepsilon, \cdots \tag{29}$$

と $\boldsymbol{B}_i = 0$, $(i = 0, -1, -2, \cdots)$ を選ぶことで与えられる. A_i について無限項の和を取ると

$$\omega_{\mathrm{LIH}} = \frac{2\lambda^2}{1 - 2\varepsilon\lambda}, \tag{30}$$

となり, LIH の解は

$$\boldsymbol{X}_s(s,t) = \boldsymbol{X}_s(\lambda X_0 s - \omega_{\mathrm{LIH}} t) \tag{31}$$

の型で与えられる. もし, 和が $-B_{-1}/\lambda$ に等しいなら, LIH の解は DLE の解

$$\boldsymbol{X}_s(s,t) = \boldsymbol{X}_s(\lambda X_0 s + \frac{B_{-1}}{\lambda}t), \tag{32}$$

に等しい. 即ち, PLRE の解とも等しくなることを意味している. これらの関係は, 1 ソリトンの解のみで成り立つ関係で, 多ソリトン解の間では成り立たない.

5 まとめ

この報告では, LIH, PLRE と DLE 三者の間の関係を議論した. PLRE と DLE との等価性は成り立つが, PLRE と LIH の間の等価性は成り立っていないことを示した. ただ, 1 ソリトン解の特別な場合, 二つのヒエラルキーを持つ可積分系を使って, LIH の解が PLRE の解となることが示せ, かつ, その解は DLE の解でもあるこが分かった.

References

[1] Fukumoto Y and Miyajima M 1996 J. Phys. **A29** 8025

[2] Pohlmeyer K 1976 Commun. Math. Phys. **46** 207

[3] Lund F and Regge T 1976 Phys. Rev. **D14** 1524

[4] Imai K, Konno K and Kakuhata H 1998 J. Phys. Soc. Japan **67** 4300

[5] Konno K 1995 Applicable Analysis **57** 209

[6] Imai K, Konno K and Kakuhata H 1999 J. Phys. Soc. Japan **68** (1998) 1115

[7] Fukumoto Y and Miyazaki T 1991 J. Fluid Mech. **222** 369

[8] Konno K, Oono H and Kakuhata H to be published