数理解析研究所講究録
1154巻 2000年 175-181

Large fields について (Pop, Colliot-Thélène らの仕事の紹介)

玉川安騎男 (AKIO TAMAGAWA)

京都大学数理解析研究所 (RIMS, Kyoto Univ.)

§0. Introduction.

「large」とは, 体のある性質で, 1990年代半ばに F.Pop によって導入されたものです. 大ざっぱに言うと, その体の上の多様体に有理点がたくさんありがちという意味で「大きい」のですが, 正確な定義は §1 に回して, ここでは, このような体の性質を考える動機付けになった二つの問題について復習し, large field に対してどのような定理が成り立つかを紹介します.

動機1: Inverse Galois Problem

体 K に対する Inverse Galois Problem $(\mathrm{IGP})_K$ とは, 次のような問題です.

$(\mathrm{IGP})_K$: 任意の有限群 G に対して, $\mathrm{Gal}(L/K) \simeq G$ となるような Galois 拡大 L/K が存在するか?

$(\mathrm{IGP})_K$ は, 任意の体 K に対して肯定的なわけではありません (例: 代数閉体) が, 例えば K が素体上有限生成な体の時には成立すると予想されています. 特に, K が有理数体 $\mathbf{Q}$ の場合は, 整数論の古典的未解決問題として有名です.

一方, K に対する Regular Inverse Galois Problem $(\mathrm{RIGP})_K$ とは, 次のような問題です.

$(\mathrm{RIGP})_K$: 任意の有限群 G に対して, $\mathrm{Gal}(\mathcal{L}/K(T)) \simeq G$ となるような Galois 拡大 $\mathcal{L}/K(T)$ で $\mathcal{L} \cap \overline{K} = K(\iff \mathcal{L}/K$: regular) を満たすものが存在するか?

こちらは, 任意の体 K に対して成立することが予想されています. (そのためには, K が素体の時に証明できればじゅうぶんです.) また, $(\mathrm{IGP})_K$ と $(\mathrm{RIGP})_K$ の関係は次の通りです.

Lemma. K: hilbertian の時, $(\mathrm{RIGP})_K \implies (\mathrm{IGP})_K$.

ここで, 「hilbertian」とは, Hilbert の既約性定理が成立するという意味です. (正確な定義は [FJ], [S] などを参照して下さい.) 証明は, $\mathcal{L}/K(T)$ を適当な $T = a \in \mathbf{P}^1(K)$ で特殊化して K 上の Galois 拡大を構成します.

さて, この Regular Inverse Galois Problem が, large field に対しては成立することが知られています:

Theorem A (Harbater, Pop). K: large $\Longrightarrow$ $(\mathrm{RIGP})_K$: OK.

Corollary. K: large, hilbertian $\Longrightarrow$ $(\mathrm{IGP})_K$: OK. $\square$

更に, Theorem A の別証や一般化が, Pop, Haran, Jarden, Colliot-Thélène, ... らによって得られています ([P2],[HJ1,2],[C-T],...).

なお, (Regular) Inverse Galois Problem については, 本講究録中の伊原氏, 橋本氏の記事も参照下さい.

動機 2 : Shafarevich Conjecture

Shafarevich 予想 (SC) とは,

(SC): $\mathrm{Gal}(\mathbf{Q}^{\mathrm{ab}}) \simeq \widehat{F}_\omega$? すなわち, $\mathrm{Gal}(\mathbf{Q}^{\mathrm{ab}})$ は可算階数自由 profinite 群か?

という未解決問題です. (ここで, $\mathrm{Gal}(K)$ は体 K の絶対 Galois 群 $\mathrm{Gal}(K^{\mathrm{sep}}/K)$ を表します.)

large field の概念を用いた, 次のような (SC) へのアプローチがあります:

Theorem B (Pop).
K: large, hilbertian, $\mathrm{cd}(K) \le 1$, $\sharp(K) = \omega$ $\Longrightarrow$ $\mathrm{Gal}(K) \simeq \widehat{F}_\omega$.
特に, もし $\mathbf{Q}^{\mathrm{ab}}$ が large ならば, (SC) が成立する.

(ここで, $\mathrm{cd}(K)$ は profinite 群 $\mathrm{Gal}(K)$ のコホモロジー次元を表します. 「large」以外の条件を $\mathbf{Q}^{\mathrm{ab}}$ が満たすことはよく知られています.)

以下, §1 で large field の定義と例を述べた後, §2 で Pop の仕事 [P2] (Theorem A のある一般化と Theorem B), §3 で Colliot-Thélène の仕事 [C-T] (Theorem A の別の一般化) を解説します.

§1. Definition and examples of large fields.

以下ずっと K は体を表します. K 上 geometrically integral, separated, of finite type な scheme を K 上の多様体と呼び, K 上の 1 次元多様体を K 上の曲線と呼ぶことにします.

Definition. K: large $\overset{\mathrm{def}}{\Longleftrightarrow}$ 次の同値な条件の内の一つが成立.
(I) K 上の任意の smooth 多様体 V に対して, $V(K) \neq \emptyset \Longrightarrow V(K)$: V 内で Zariski dense.
(I)$'$ K 上の任意の smooth 曲線 V に対して, $V(K) \neq \emptyset \Longrightarrow V(K)$: V 内で Zariski dense.
(II) K は形式 Laurent 級数体 $K((t))$ の中で existentially closed. すなわち, K 上の任意の多様体 V に対して, $V(K((t))) \neq \emptyset \Longrightarrow V(K) \neq \emptyset$.

[同値性の証明の方針: (I) $\Longrightarrow$ (I)$'$ は自明. (I)$'$ $\Longrightarrow$ (I) は, 与えられた有理点を通る曲線を (たくさん) 考える. (II) $\Longrightarrow$ (I)$'$ は, 有理点が有限個と仮定して, それらを全

て取り除いてできる曲線を考える. (I)$'$ $\Longrightarrow$ (II) は, 近似により, まず henselization $K(t)^h$ 上の有理点があることを示す.]

Remark. 「large」の代わりに ample, AMPLE (= Automatique Multiplication des Points Lisses Existants), épais, fertile などと呼ぶ人もいます.

Lemma.(大きいものより大きいものは大きい！)
K: large, K'/K: 代数拡大 $\Longrightarrow$ K': large.

Proof. 有限次拡大の場合に帰着して, Weil restriction を用いる. □

以下, いくつか例を挙げます.

0. 素体上有限生成な体は large でない.

1. 代数閉体 (より一般に分離閉体) $\Longrightarrow$ large.

2. (非自明な) 完備付値を持つ体 (archimedean or non-archimedean) $\Longrightarrow$ large.
より一般に, 実閉体あるいは henselian 付値体 $\Longrightarrow$ large.

3. PAC (pseudo algebraically closed) $\Longrightarrow$ large.

Definition. K: PAC
$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ K 上の任意の多様体 $V(\neq \emptyset)$ に対して, $V(K) \neq \emptyset$
$\Longleftrightarrow$ K 上の任意の多様体 V に対して, $V(K)$: V 内で Zariski dense.

特に, $\mathbf{F}_p$ の任意の無限次代数拡大は, PAC ゆえ large.

3$'$. PRC (pseudo real closed), PpC (pseudo p-adically closed) $\Longrightarrow$ large.
(略. [P2] 参照.)

4. k を有限次代数体とし, S を k の素点の有限集合とする時,

$$k^S \overset{\text{def}}{=} \{a \in \overline{k} \mid \forall v \in S, \forall \iota : \overline{k} \underset{k}{\hookrightarrow} \overline{k}_v, \iota(a) \in k_v\}$$

は large. 特に, $\mathbf{Q}^{\mathrm{tr}}(k = \mathbf{Q}, S = \{\infty\})$, $\mathbf{Q}^{\mathrm{t}p}(k = \mathbf{Q}, S = \{p\})$ は large.

Open Problem.
$\mathbf{Q}^{\mathrm{ab}}$ は large か？ $\mathbf{Q}^{\mathrm{sol}}$ は large か？ $\mathbf{Q}^{\mathrm{sol}}$ は PAC か？

Remark. G.Frey により, $\mathbf{Q}^{\mathrm{ab}}$ は PAC でないことが証明されています.

§2. Pop's work ([P2]).

この § では, F.Pop による次の定理について解説します.

Theorem (Pop).
K: large ならば, $K(T)$ 上の任意の finite, split, constant embedding problem は proper, regular solution を持つ. すなわち, 有限群 N, G, H を含む, 行・列が完全な図式

$$
(*) \qquad
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & & \mathrm{Gal}(K) & & & \\
 & & & & & \downarrow & & & \\
1 & \to & N & \to & G & \to & H & \to & 1 \\
 & & & & & & \downarrow & & \\
 & & & & & & 1 & &
\end{array}
\qquad (\text{split, i.e., } G \simeq N \rtimes H)
$$

は, 必ず, 行・列が完全な可換図式

$$
\begin{array}{ccccccccc}
1 & \to & \mathrm{Gal}(K^{\mathrm{sep}}(T)) & \to & \mathrm{Gal}(K(T)) & \to & \mathrm{Gal}(K) & \to & 1 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
1 & \to & N & \to & G & \to & H & \to & 1 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 1 & & 1 & & 1 & &
\end{array}
$$

に拡張できる.
特に $(H = \{1\})$, Theorem A: OK.

この定理の証明の紹介に進む前に, 系を見ておきましょう.

Corollary 1.
K: large, hilbertian ならば, K 上の任意の finite, split embedding problem は proper solution を持つ. すなわち, 図式 $(*)$ は, 必ず, 行・列が完全な可換図式

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & \mathrm{Gal}(K) & = & \mathrm{Gal}(K) & & \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\
1 & \to & N & \to & G & \to & H & \to & 1 \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & & & 1 & & 1 & &
\end{array}
$$

に拡張できる.

Proof. Theorem の $\mathrm{Gal}(K(T)) \twoheadrightarrow G$ に対応する $K(T)$ の G- 拡大を, hilbertian property を用いて, 適当な $T = a \in \mathbf{P}^1(K)$ で 特殊化する. □

Corollary 2. Theorem B: OK.

Proof. Corollary 1 と $\widehat{F}_\omega$ の特徴付けに関する岩澤の定理による. □

以下, Pop の定理の特殊な場合 $(H = \{1\})$ である Theorem A の証明の概略を説明します. (一般の場合の証明も同様です.) large field の定義 (II) に基礎をおく証明です. $K(T)$ の G- 拡大は, 幾何学的に考えれば $\mathbf{P}^1_K$ の G- 被覆に対応することに注意します.

Step 1. G が巡回群の場合. Kummer 理論または Artin-Schreier 理論を用いて具体的に G- 拡大を構成する.

Step 2. $G = \langle C_i \rangle_{i=1,\ldots,r}$, C_i: 巡回群, と表しておく. $K((t))$ 上で考えて, C_i- 被覆たちを rigid analytic geometry の意味ではりあわせて G- 被覆を構成する. より具体的には, 互いに disjoint な rigid analytic discs $D_1, \ldots, D_r \subset \mathbf{P}^1_{K((t))}$ を取り, Step 1 を利用して, 各 i に対して D_i の C_i- 被覆 E_i を用意しておく. (但し, 適当に座標を取り替えるなどして, D_i の「縁」の上で E_i が自明な被覆を与えるようにしておく.) 後は, D_i 上の induced G- 被覆 $\mathrm{Ind}_{C_i}^G E_i (i = 1, \ldots, r)$ と, $\mathbf{P}^1 - \cup_{i=1}^r D_i^\circ$ 上の自明な G- 被覆をはりあわせて, $\mathbf{P}^1_{K((t))}$ 上の G- 被覆を得る. (GAGA 原理により, 代数的な被覆となる.)

Step 3. Step 2 で構成した $K((t))$ 上の対象の, 適当な有限生成 K-subalgebra $A \subset K((t))$ の上の model を取る. large field の定義 (II) により $V = \mathrm{Spec}(A)$ にはじゅうぶん K- 有理点があるので, 特殊化して, K 上の対象, すなわち $\mathbf{P}^1_K$ 上の G- 被覆を得る. □

§3. Colliot-Thélène's work ([C-T]).

この § では, J.-L.Colliot-Thélène による次の定理について解説します.

Theorem (Colliot-Thélène).
K を標数 0 の large field, G を有限群とする. この時, 任意の (必ずしも連結とは限らない)G-Galois 拡大 L/K に対して, (連結な)G-Galois 拡大 $\mathcal{L}/K(T)$ が存在して, 次を満たす: (i) $\mathcal{L}/K$ は regular (すなわち, $\mathcal{L} \cap \overline{K} = K$); (ii) $a_0 \in \mathbf{P}^1(K)$ が存在して, $\mathcal{L}/K(T)$ は $T = a_0$ で不分岐かつ $\mathcal{L}$ の $T = a_0$ における特殊化 $\mathcal{L}|_{T=a_0}$ は K 上の G-拡大として L と同型.

特に (例えば L を自明な G- 拡大 $\prod_{\sigma \in G} K$ として), Theorem A: OK.

Theorem A では, 単に $K(T)$ 上の G- 拡大があるというだけでしたが, この Colliot-Thélène の定理では, 1 点 $T = a_0$ での fiber の与える G- 拡大を指定できるという点が重要です.

Remark. (i) Colliot-Thélène によれば, Moret-Bailly による拡張が更にあるそうで, そこでは, K の標数も任意, $K(T)$ も任意の一変数代数関数体, G も K 上の任意の finite, étale 群 scheme, でよいそうですが, この原稿を書いている段階では私はまだ見ていません. (任意の代数関数体といっても, (対応する代数曲線が) 有理点を持つことは仮定するのでしょうか.)
(ii) Colliot-Thélène の定理では, 1 点での G- 拡大を指定できることが重要でしたが, 一般には, 2 点以上の点で同時に G- 拡大を指定することはできないことが, やはり Colliot-Thélène により示されています. より正確には, 標数 0 の large field K, 有限群 G, G-Galois 拡大 $L_0, L_1/K$ であって, どんな G-Galois 拡大 $\mathcal{L}/K(T)$ を取っても, 2 つの不分岐点 $T = a_0, a_1 \in \mathbf{P}^1(K)$ で $\mathcal{L}|_{T=a_i} \underset{K}{\simeq} L_i$ とはならないものが存在します.(例えば, $K = \mathbf{Q}_2$, $G = \mathbf{Z}/8\mathbf{Z}$, L_0: 自明な G- 拡大, L_1: (連結) 不分岐 G- 拡大がこのような例を与えます.)

一方, K が単に large というだけでなく PAC だと仮定すると, 状況が一変します. この場合, 任意の G- 拡大 $\mathcal{L}/K(T)$ で $\mathcal{L} \cap \overline{K} = K$ を満たすもの (Theorem A より少

なくとも一つは存在) を取れば, 任意の G- 拡大 L/K に対し, $a \in \mathbf{P}^1(K)$ が存在して, $\mathcal{L}/K(T)$ は $T = a$ で不分岐かつ $\mathcal{L}|_{T=a} \underset{K}{\simeq} L$ を満たすことが知られています (Fried, Völklein, Dèbes).

以下, Colliot-Thélène の定理の証明の概略を説明します. large field の定義 (I) に基礎をおく証明です.

Step 1. Noether の方法. K 上の smooth 多様体の間の finite, étale G- 被覆 $V \to U$ で, V が有理多様体 (すなわち, 関数体 $K(V)$ が K の純超越拡大) であり, 次の versal property を持つものが存在する: K の拡大体 K' とその上の G- 拡大 L'/K' が与えられた時, $P \in U(K')$ があって $V|_P \underset{K'}{\simeq} L'$ となる. (忠実な表現 $G \to GL_N(K)$ を取り, $\mathbf{A}^N_K \to G\backslash\mathbf{A}^N_K$ から分岐 locus を除いたものを $V \to U$ とすればよい.) X を U の smooth コンパクト化とする (広中 resolution).

$V \to U$ の versal property により, 特に, L/K を与えるような $P \in U(K)$ が存在する. そこで, 次の 2 条件を満たすような K- 射 $\varphi : \mathbf{P}^1_K \to X$ を構成できればよい: (i) $\varphi(0) = P$; (ii) $V|_{\varphi_{\overline{K}}}$: 連結.

Step 2. Kollár- 宮岡 - 森の有理連結多様体の理論と古典的結果 ($K = \overline{K}$ に対する Theorem A) を組み合わることにより, 次の 3 条件を満たすような $\overline{K}$- 射 $\overline{f} : \mathbf{P}^1_{\overline{K}} \to X_{\overline{K}}$ が構成できる: (o) 接束の引き戻し $\overline{f}^*(T_{X_{\overline{K}}})$ は ample; (i) $\overline{f}(0) = P$; (ii) $V|_{\overline{f}}$: 連結.

Step 3. $\overline{f} : \mathbf{P}^1_{\overline{K}} \to X_{\overline{K}}$ は, ある有限次拡大 K'/K に対する $f_{K'} : \mathbf{P}^1_{K'} \to X_{K'}$ に descent する. (もし $K' = K$ ならばこれで証明が終わるが, 一般にはそうはいかない.) $f_{K'}$ と自然な projection $X_{K'} \to X$ を合成したものを $f' : \mathbf{P}^1_{K'} \to X$ とする.

一方, 別に $\mathbf{P}^1_K$ を用意し, $\alpha : \mathrm{Spec}(K') \hookrightarrow \mathbf{P}^1_K$ を選んでおく. (K'/K は単生成なのでこのような α が取れる.)

$\mathbf{P}^1_{K'}$ の subscheme $\{\infty\} \simeq \mathrm{Spec}(K')$ と $\mathbf{P}^1_K$ の subscheme $\mathrm{Im}(\alpha) \simeq \mathrm{Spec}(K')$ を同一視して $\mathbf{P}^1_{K'}$ と $\mathbf{P}^1_K$ を合併することによって生じる K-scheme を Y_0 とおく. (Y_0 は comb と呼ばれる. $(Y_0)_{\overline{K}}$ の絵を描くとその理由がわかる.) $\mathbf{P}^1_{K'}$ 上では f', $\mathbf{P}^1_K$ 上では P への定値写像と定義して, well-defined な K- 射 $f_0 : Y_0 \to X$ が得られる. 特に, $\mathbf{P}^1_K$ の方の K- 有理点 0 を $0 \in Y_0$ とすれば, $f_0(0) = P$ となる.

Step 4. $f_0 : Y_0 \to X, f_0(0) = P$ の smoothing により, 求める $\varphi : \mathbf{P}^1_K \to X, \varphi(0) = P$ を構成する. Step 2 の条件 (o) は, f_0 の変形空間 M(ある種の Hom-scheme として実現される) が, $[f_0] \in M(K)$ において smooth であることを保証する. そこで, $[f_0]$ を含む M の既約成分を M_0 とすれば, large field の定義 (I) により, $M_0(K)$ は M_0 内で Zariski dense となるので, 「よい」点 $[\varphi] \in M_0(K)$ を選ぶことができるのである.

(Step 3, 4 については, [K] も参照のこと.) □

References

[C-T] J.-L. Colliot-Thélène, *Rational connectedness and Galois covers of the projective line*, Ann. of Math. **151** (2000), 359–373.

[FJ] M. D. Fried and M. Jarden, *Field arithmetic*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3), 11, Springer-Verlag, 1986.

[HJ1] D. Haran and M. Jarden, *Regular split embedding problems over complete valued fields*, Forum Math. **10** (1998), 329–351.

[HJ2] ———, *Regular split embedding problems over function fields of one variable over ample fields*, J. Algebra **208** (1998), 147–164.

[K] J. Kollár, *Rationally connected varieties over local fields*, Ann. of Math. **150** (1999), 357–367.

[P1] F. Pop, $\frac{1}{2}$*Riemann existence theorem with Galois action*, in Algebra and Number Theory (G. Frey and J. Ritter, eds.), de Gruyter, 1994, pp. 193–218.

[P2] ———, *Embedding problems over large fields*, Ann. of Math. **144** (1996), 1–34.

[S] J.-P. Serre, *Lectures on the Mordell-Weil theorem*, Aspects of Mathematics, E15, Friedr. Vieweg & Sohn, 1989.

Research Institute for Mathematical Sciences, Kyoto University, Kyoto 606-8502, Japan

E-mail address: tamagawa@kurims.kyoto-u.ac.jp