数理解析研究所講究録
1154 巻 2000 年 191-202

The stable derivation algebras for higher genera (Galois 表現に関連する高種数の安定導分環)

上智理工 (Sophia Univ.) 角皆 宏 (TSUNOGAI Hiroshi)

1. 組紐群への Galois 表現

C を有理数体 $\boldsymbol{Q}$ 上の代数曲線で、完備非特異で種数 g の曲線 C^{cpt} から n 個の $\boldsymbol{Q}$ 有理点 S を除いたものとし、$\overline{C}=C\times_{\boldsymbol{Q}}\overline{\boldsymbol{Q}}$ とする。素数 l を固定し、副 l 外 Galois 表現 (非 abel Galois 表現などとも)

$$\varphi_C : G_{\boldsymbol{Q}}=\mathrm{Gal}(\overline{\boldsymbol{Q}}/\boldsymbol{Q})\longrightarrow \mathrm{Out}\pi_1(\overline{C})^{\text{pro-}l} \tag{1.1}$$

を考える。$\pi_1(\overline{C})^{\text{pro-}l}$ が可換群の場合、$(g,n)=(0,2)$ 即ち $C\simeq\mathbf{P}^1\setminus\{0,\infty\}$ なら φ_C は l 冪円分指標であり、$(g,n)=(1,0)$ 即ち C が楕円曲線なら φ_C は l 進表現である。そこで以下 $\chi(C)=2-2g-n<0$ 即ち $\pi_1(\overline{C})^{\text{pro-}l}$ が非可換群の場合、特にその次数 Lie 環化について考える。外 Galois 表現の次数 Lie 環化は、伊原 [I1] による $C=\mathbf{P}^1\setminus\{0,1,\infty\}$ の場合の考察を端緒として、織田・朝田・金子・中村・角皆・高尾・上野ら ([AK, K, NTs, NTaU]) によって次第に一般の曲線 C やその上の点の配置空間の場合の考察を行なう道具立てが整備され、それに基づいて様々な結果が得られている。本稿では、φ_C の次数 Lie 環化の像をより精密に評価する為に、曲線上の点の配置空間の基本群 (組紐群) への Galois 作用を考える立場から生ずる問題として、C が $(g,1)$ 型 $(g\geq 1)$ の時に、点の数を増やしていった時の安定性 (停留性) に関する結果を示す。これは、種数 0 の場合の伊原 [I3] による結果の一般化である。

C 上の r 点の配置空間

$$C^{(r)}=\underbrace{C\times\cdots\times C}_{r\text{ケ}}\setminus\Delta=\{(P_1,\ldots,P_r)\,|\,P_i\in C, P_i\neq P_j(i\neq j)\} \tag{1.2}$$

を考えよう。この幾何的副 l 基本群 $\pi_1(\overline{C^{(r)}})^{\text{pro-}l}$ は、C 上の r 本糸純組紐群の副 l 基本群と同型である。これは g,n,r にのみ依り $\Pi_{g,n}^{(r)}$ と書かれる。以下、本稿では $g\geq 1, n=1$、即ち C を種数 $g>0$ の完備な曲線から 1 点を除いたものとし、$\Pi_{g,1}^{(r)}$ を単に $\Pi_g^{(r)}$ と書くことにしよう。群 $\Pi_g^{(r)}$ は図 1 の $x_{ik},y_{ik},z_{jk}(1\leq i\leq g, 0\leq j\leq r, 1\leq k\leq r)$ 達によって生成され (便宜上 C の抜けている点の周りを回る道を z_{0k} としておく)、これらの生成元による群の表示は 1960 年代の Birman [Bi] ら位相幾何の研究者によって決定されているが、かなり複雑なものである。

点を 1 つづつ忘れることにより、$\boldsymbol{Q}$ 上定義される射の列

$$\cdots\longrightarrow C^{(r)}\longrightarrow C^{(r-1)}\longrightarrow\cdots\longrightarrow C^{(2)}\longrightarrow C^{(1)}=C \tag{1.3}$$

Date: April 22, 2000.
京大数研講究録原稿。.

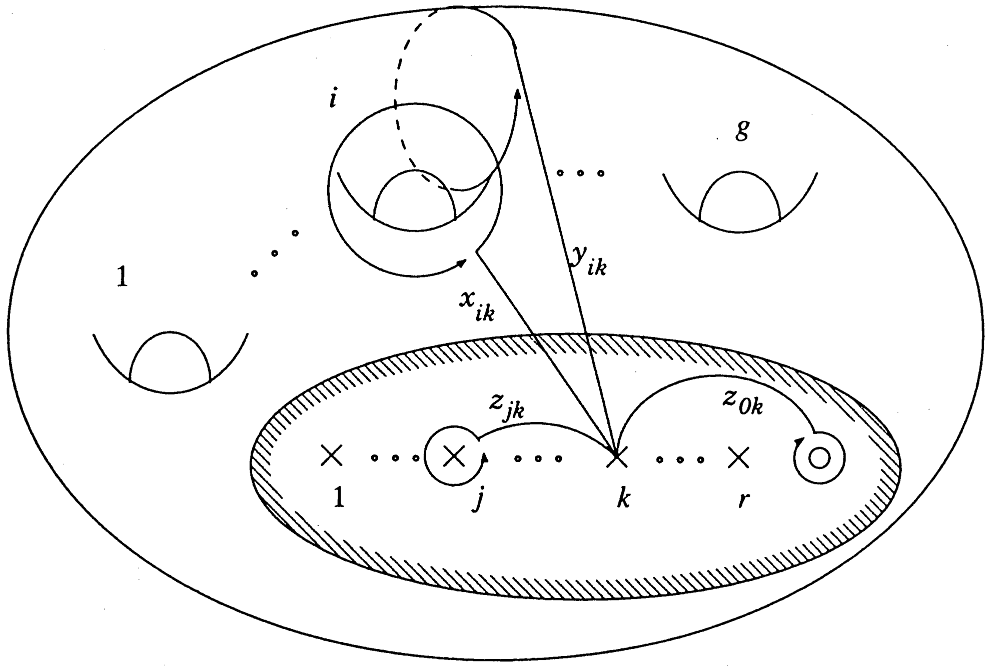

図 1. $\Pi_g^{(r)}$ の生成元

が定まり、これから基本群の列

$$\cdots \longrightarrow \Pi_g^{(r)} \longrightarrow \Pi_g^{(r-1)} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \Pi_g^{(2)} \longrightarrow \Pi_g^{(1)} = \Pi_g \tag{1.4}$$

が生ずる。組紐的に言うと紐忘れ射である。$C^{(r)}$ に付随する副 l 外 Galois 表現

$$\varphi_{C^{(r)}} : G_{\boldsymbol{Q}} \longrightarrow \mathrm{Out}\Pi_g^{(r)} \tag{1.5}$$

を考えるのだが、$G_{\boldsymbol{Q}}$ の像を含む適切な $\mathrm{Out}\Pi_g^{(r)}$ の部分群を考えておくのがよい。実際には次の条件 (♭1–3) を満たすものを組紐的 (special,braid-like) と呼び、その全体を $\mathrm{Out}^\flat\Pi_g^{(r)}$ と書く。

(♭1) 紐忘れ射の核を保つ。
(♭2) 境界の因子の成分の惰性群 $\langle z_{jk}\rangle$ の共役類を保つ。
(♭3) その共役は図 1 の斜線円内の組紐で与えられる。

(従来は専ら (♭1) (♭2) のみを考えていたが、今回の話では (♭3) の条件をきちんと考えに入れることが必要であった。Galois 像がこの条件を満たすことは松本 [M] による。) 更に、成分の入れ換えによる r 次対称群 $\mathfrak{S}_r$ の $C^{(r)}$ への作用と Galois 作用とは可換なので、この作用から定まる射 $\mathfrak{S}_r \to \mathrm{Out}\Pi_g^{(r)}$ の像の $\mathrm{Out}^\flat\Pi_g^{(r)}$ 内での中心化群 $(\mathrm{Out}^\flat\Pi_g^{(r)})^{\mathfrak{S}_r}$ に Galois 像は含まれる。

さて、組紐的外部自己同型群 $\mathrm{Out}^\flat\Pi_g^{(r)}$ を考えることにより、紐忘れ射の列

$$\cdots \to (\mathrm{Out}^\flat\Pi_g^{(r)})^{\mathfrak{S}_r} \to (\mathrm{Out}^\flat\Pi_g^{(r-1)})^{\mathfrak{S}_{r-1}} \to \cdots \to (\mathrm{Out}^\flat\Pi_g^{(2)})^{\mathfrak{S}_2} \to \mathrm{Out}^\flat\Pi_g \tag{1.6}$$

と、これと可換な Galois 表現の系

$$\varphi_{C^{(r)}} : G_{\boldsymbol{Q}} \longrightarrow (\mathrm{Out}^\flat\Pi_g^{(r)})^{\mathfrak{S}_r} \tag{1.7}$$

を得た。従って、φ_C の像は $\mathrm{Out}^\flat\Pi_g$ のみならず、任意の r に対して $(\mathrm{Out}^\flat\Pi_g^{(r)})^{\mathfrak{S}_r}$ の $\mathrm{Out}^\flat\Pi_g$ 内での像に含まれることが判る。

$$\varphi_C(G_{\boldsymbol{Q}}) \subset \bigcap_{r\geq 1}\left((\mathrm{Out}^\flat\Pi_g^{(r)})^{\mathfrak{S}_r}\text{の像}\right) \subset \mathrm{Out}^\flat\Pi_g \tag{1.8}$$

ここで次の 3 つの点が問題として浮上しよう。

(1) 高次配置空間を考えることで Galois 像を特徴付けられるか。即ち $\varphi_C(G_{\boldsymbol{Q}}) = \bigcap_{r\geq 1}\left((\mathrm{Out}^\flat\Pi_g^{(r)})^{\mathfrak{S}_r}\text{の像}\right)$ か？

(2) 高次配置空間を考えることは Galois 像をより精密に評価するのに貢献しているか。即ち、$\bigcap_{r\geq 1}\left((\mathrm{Out}^\flat\Pi_g^{(r)})^{\mathfrak{S}_r}\text{の像}\right) \subsetneq \mathrm{Out}^\flat\Pi_g$ か？

(3) 点の数 r は何処かまで考えれば充分か。即ち、或る N に対し $\bigcap_{r\geq 1}\left((\mathrm{Out}^\flat\Pi_g^{(r)})^{\mathfrak{S}_r}\text{の像}\right) = (\mathrm{Out}^\flat\Pi_g^{(N)})^{\mathfrak{S}_N}\text{の像}$ か？

(1) の Galois 群を特徴付けるかどうかという問題は難しい数論的問題である。しかし (2) (3) はそれ自体は Galois 群とは無関係に定式化される純代数的な問題であり、特にこれを次数 Lie 環化した問題については、計算機による実験的な計算により色々な観察をすることも出来る。実際 (2) については、例えば $(g,n)=(1,1)$ の時に Galois 像の可能性を幾らかは実際に狭めていることが確かめられる [T1]。本稿では (3) の「$(\mathrm{Out}^\flat\Pi_g^{(r)})^{\mathfrak{S}_r}$ が r 充分大で停留するか」の次数 Lie 環化を考え、次のような結果を得たことを報告する。

<u>主定理</u>．次数 Lie 環版で $g\geq 1, n=1$ の時 $r\geq 3$ で停留する。∎

2. 次数 Lie 環化

本節では外 Galois 表現 $\varphi_{C^{(r)}} : G_{\boldsymbol{Q}} \to \mathrm{Out}\Pi_g^{(r)}$ の次数 Lie 環化の定式化を述べる。

2.1. $\Pi_g^{(r)}$ の次数 Lie 環化. 群 $\Pi_g^{(r)}$ に<u>重み filtration</u> を導入して、それに付随する次数 Lie 環を作る。重み filtration とは、図 1 の生成元のうち x_{ik}, y_{ik} 達を 1 次、z_{jk} 達を 2 次の元とするような中心的 filtration で、具体的には次で定まる。

$$\Pi_g^{(r)}(1) = \Pi_g^{(r)} \tag{2.1}$$

$$\Pi_g^{(r)}(2) = \left[\Pi_g^{(r)}, \Pi_g^{(r)}\right]\langle z_{jk} | 0\leq j\leq r, 1\leq k\leq r\rangle \tag{2.2}$$

$$\Pi_g^{(r)}(m) = \left\langle \left[\Pi_g^{(r)}(m'), \Pi_g^{(r)}(m'')\right] \middle| m'+m''=m \right\rangle \qquad (m\geq 3) \tag{2.3}$$

(実は今の場合は降中心列に一致する。) 隣接商

$$\mathrm{gr}^m\Pi_g^{(r)} := \Pi_g^{(r)}(m)/\Pi_g^{(r)}(m+1) \tag{2.4}$$

は自然に $\boldsymbol{Z}_l$ 加群となり、その直和

$$\mathrm{Gr}\Pi_g^{(r)} := \bigoplus_{m\geq 1}\mathrm{gr}^m\Pi_g^{(r)} \tag{2.5}$$

には次のように次数 Lie 環の構造が入る。

$$S = s \bmod \Pi_g^{(r)}(m+1) \in \mathrm{gr}^m \Pi_g^{(r)}, T = t \bmod \Pi_g^{(r)}(n+1) \in \mathrm{gr}^n \Pi_g^{(r)}$$

$(s \in \Pi_g^{(r)}(m), t \in \Pi_g^{(r)}(n))$ に対し、

$$[S,T] := [s,t] \bmod \Pi_g^{(r)}(m+n+1) \in \mathrm{gr}^{m+n}\Pi_g^{(r)}. \tag{2.6}$$

この次数 Lie 環を $\mathcal{L}_g^{(r)}$ と書く。$\mathcal{L}_g^{(r)}$ は次の表示を持つ (中村-高尾-上野 [NTaU]) :

生成元: $X_{ik} = x_{ik} \bmod \Pi_g^{(r)}(2),\quad Y_{ik} = y_{ik} \bmod \Pi_g^{(r)}(2)\quad (1 \le i \le g, 1 \le k \le r)$,

$Z_{jk} = z_{jk} \bmod \Pi_g^{(r)}(3)\quad (0 \le j \le r, 1 \le k \le r)$;

次数付け: $\deg X_{ik} = \deg Y_{ik} = 1, \deg Z_{jk} = 2$;

関係式:

$$Z_{kk} = 0,\quad Z_{jk} = Z_{kj}\quad (1 \le j,k \le r), \tag{2.7}$$

$$\sum_{i=1}^{g}[X_{ik}, Y_{ik}] + \sum_{j=0}^{r} Z_{jk} = 0\quad (1 \le k \le r), \tag{2.8}$$

$$[Z_{jk}, Z_{j'k'}] = 0\quad (\{j,k\} \cap \{j',k'\} = \emptyset), \tag{2.9}$$

$$[X_{ik}, Z_{jl}] = [Y_{ik}, Z_{jl}] = 0\quad (k \ne j, l), \tag{2.10}$$

$$[X_{ik}, X_{jl}] = [Y_{ik}, Y_{jl}] = 0\quad (k \ne l), \tag{2.11}$$

$$[X_{ik}, Y_{jl}] = 0\quad (i \ne j, k \ne l), \tag{2.12}$$

$$[X_{ik}, Y_{il}] = Z_{kl}\quad (k \ne l). \tag{2.13}$$

必要なら r を明示して $X_{ik}^{(r)}$ のように書くことにする。後のため、部分 Lie 環

$$\mathcal{L}_g^{(r)\circ} = \langle Z_{jk} | 0 \le j \le r, 1 \le k \le r\rangle \tag{2.14}$$

$$\mathcal{N}_k^{(r)} = \langle X_{ik}, Y_{ik}, Z_{jk} | 1 \le i \le g, 0 \le j \le r\rangle\quad (1 \le k \le r) \tag{2.15}$$

を導入しておく。$\mathcal{N}_k^{(r)}$ は $\mathcal{L}_g^{(r)}$ の Lie ideal にもなる。

2.2. $\mathrm{Out}^\flat\Pi_g^{(r)}$ **の次数 Lie 環化.** Galois 像が満たす条件を反映させて、$\mathrm{Out}\Pi_g^{(r)}$ の部分群 $\mathrm{Out}^\flat\Pi_g^{(r)}$ を定義する。k 番目の点を忘れる射 $C^{(r)} \to C^{(r-1)}$ により定まる基本群の射 $\Pi_g^{(r)} \to \Pi_g^{(r-1)}$ の核を $N_k^{(r)}$ とすると、$N_k^{(r)}$ は $x_{ik}, y_{ik}, z_{jk} (1 \le i \le g, 0 \le j \le r)$ により $\Pi_g^{(r)}$ で正規生成される部分群である。又、図 1 の斜線円内の組紐で表される元からなる部分群 $\Pi_g^{(r)\circ} := \langle z_{jk} \big| 0 \le j \le r, 1 \le k \le r\rangle$ を考える。

(2.16)

$$\mathrm{Aut}^\flat\Pi_g^{(r)} := \left\{ \sigma \in \mathrm{Aut}\Pi_g^{(r)} \;\middle|\; \begin{array}{c} \forall k : \sigma(N_k^{(r)}) \subset N_k^{(r)} \\ \forall j,k : \exists t_{ij} \in \Pi_g^{(r)\circ}, \exists \lambda \in \boldsymbol{Z}_l^\times : \sigma(z_{jk}) = t_{jk} z_{jk}^{\lambda} t_{jk}^{-1} \end{array} \right\}$$

(2.17)

$$\mathrm{Out}^\flat\Pi_g^{(r)} := \mathrm{Aut}^\flat\Pi_g^{(r)}\mathrm{Int}\Pi_g^{(r)}/\mathrm{Int}\Pi_g^{(r)}$$

(λ は自動的に全ての j,k について等しくなる。) $G_{\boldsymbol{Q}}$ の $\varphi_{C^{(r)}}$ による像は $\mathrm{Out}^\flat\Pi_g^{(r)}$ に含まれる。特に、共役を与える元 t_{jk} が $\Pi_g^{(r)\circ}$ 内に取れることは松本 [M] により示された。又、$\sigma\in G_{\boldsymbol{Q}}$ の像 $\varphi_{C^{(r)}}(\sigma)$ に対しては $\lambda=\chi(\sigma)$ (χ は l 進円分指標) である。

さて、$\mathrm{Aut}^\flat\Pi_g^{(r)}$ の $\Pi_g^{(r)}$ への作用はその重み filtration を保つ。

(2.18) $$\mathrm{Aut}^\flat\Pi_g^{(r)}(m):=\{\sigma\in\mathrm{Aut}^\flat\Pi_g^{(r)}\,|\,\Pi_g^{(r)}(i)/\Pi_g^{(r)}(i+m)\text{ に自明に作用 }(\forall i)\}$$

とおくと、$\{\mathrm{Aut}^\flat\Pi_g^{(r)}(m)\}_{m\geq 0}$ は中心的 filtration となる。従って付随する次数 Lie 環 $\mathrm{GrAut}^\flat\Pi_g^{(r)}:=\bigoplus_{m\geq 1}\mathrm{gr}^m\mathrm{Aut}^\flat\Pi_g^{(r)}, \mathrm{gr}^m\mathrm{Aut}^\flat\Pi_g^{(r)}:=\mathrm{Aut}^\flat\Pi_g^{(r)}(m)/\mathrm{Aut}^\flat\Pi_g^{(r)}(m+1)$ が定まる。$\mathrm{Aut}^\flat\Pi_g^{(r)}(m)$ の元 σ に対し、次数を m 増す $\mathcal{L}_g^{(r)}=\mathrm{Gr}\Pi_g^{(r)}$ の導分 D_σ が次で定まる。

(2.19) $$\begin{aligned}\mathrm{gr}^i\Pi_g^{(r)}&\longrightarrow\mathrm{gr}^{i+m}\Pi_g^{(r)}\\ s\bmod\Pi_g^{(r)}(i+1)&\longmapsto\sigma(s)s^{-1}\bmod\Pi_g^{(r)}(i+m+1)\end{aligned}$$

これにより $\mathrm{GrAut}^\flat\Pi_g^{(r)}$ は $\mathrm{Der}\mathcal{L}_g^{(r)}$ に次数 Lie 環として埋込める。上記の filtration を押出して $\mathrm{Out}^\flat\Pi_g^{(r)}$ にも中心的 filtration が定まり、それに付随する次数 Lie 環は外部導分環 $\mathrm{Out}\mathcal{L}_g^{(r)}:=\mathrm{Der}\mathcal{L}_g^{(r)}/\mathrm{Int}\mathcal{L}_g^{(r)}$ ($\mathrm{Int}\mathcal{L}_g^{(r)}$ は内部導分 $\mathrm{Int}(V)=[V,*]$ ($V\in\mathcal{L}_g^{(r)}$) 全体からなる Lie ideal) に埋込める。ここまでの構成は型 $(g,1,r)$ のみに依り、C には依らないことに注意しよう。

2.3. $\varphi_{C^{(r)}}$ とそれに関する $G_{\boldsymbol{Q}}$ の次数 Lie 環化. $\mathrm{Out}^\flat\Pi_g^{(r)}$ の filtration を $\varphi_{C^{(r)}}$ で引戻して $G_{\boldsymbol{Q}}$ に filtration を入れる。

(2.20) $$G_{\boldsymbol{Q}}(m)_{C^{(r)}}:=\varphi_{C^{(r)}}^{-1}(\mathrm{Out}^\flat\Pi_g^{(r)}(m))$$

$G_{\boldsymbol{Q}}(m)_{C^{(r)}}$ の固定体を $\boldsymbol{Q}(m)_{C^{(r)}}$ として定まる体の塔

(2.21) $$\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{Q}(0)_{C^{(r)}}\subset\boldsymbol{Q}(1)_{C^{(r)}}\subset\boldsymbol{Q}(2)_{C^{(r)}}\subset\cdots\subset\boldsymbol{Q}(m)_{C^{(r)}}\subset\cdots$$

を考えると、$\boldsymbol{Q}(1)_{C^{(r)}}=\boldsymbol{Q}(\mu_{l^\infty})$ であり、その上は $\boldsymbol{Q}(1)_{C^{(r)}}$ 上の累中心拡大である。上の filtration によって $G_{\boldsymbol{Q}}$ を次数 Lie 環化したもの $\mathcal{G}_{C^{(r)}}$ はこの累中心拡大に対応する。これを $\varphi_{C^{(r)}}$ から定まる Galois Lie 環と呼ぼう。

(2.22) $$\mathcal{G}_{C^{(r)}}:=\bigoplus_{m\geq 1}\mathrm{gr}^m\mathcal{G}_{C^{(r)}},\quad \mathrm{gr}^m\mathcal{G}_{C^{(r)}}:=G_{\boldsymbol{Q}}(m)_{C^{(r)}}/G_{\boldsymbol{Q}}(m+1)_{C^{(r)}}$$

$\varphi_{C^{(r)}}$ から引起こる次数 Lie 環の単射準同型 $\mathcal{G}_{C^{(r)}}\hookrightarrow\mathrm{Out}\mathcal{L}_g^{(r)}$ を外 Galois 表現 $\varphi_{C^{(r)}}$ の次数 Lie 環化と呼ぶ。我々の大きな関心事の一つは $\mathcal{G}_{C^{(r)}}$ の像を捉えることである。

2.4. $\mathcal{D}_g^{(r)}$ の定義. 組紐条件 ($\flat$) を考えると、$\mathcal{G}_{C^{(r)}}$ の像は次なる部分 Lie 環 $\mathrm{Out}^\flat\mathcal{L}_g^{(r)}$ に含まれることが判る。

(2.23) $$\mathrm{Der}^\flat\mathcal{L}_g^{(r)}:=\left\{D\in\mathrm{Der}\mathcal{L}_g^{(r)}\;\middle|\;\begin{array}{c}\forall k: D(\mathcal{N}_k^{(r)})\in\mathcal{N}_k^{(r)}\\ \forall j,k:\exists U_{jk}\in\mathcal{L}_g^{(r)\circ}: D(Z_{jk})=[U_{jk},Z_{jk}]\end{array}\right\}$$

(2.24) $$\mathrm{Out}^\flat\mathcal{L}_g^{(r)}:=\mathrm{Der}^\flat\mathcal{L}_g^{(r)}\mathrm{Int}\mathcal{L}_g^{(r)}/\mathrm{Int}\mathcal{L}_g^{(r)}$$

更に、$C^{(r)}$ の点の入換により定まる r 次対称群 $\mathfrak{S}_r$ の作用を考える。$\mathfrak{S}_r$ は $\mathcal{L}_g^{(r)}$ に添字 j,k の置換で作用する：$\sigma(X_{ik}) = X_{i\sigma(k)}, \sigma(Y_{ik}) = Y_{i\sigma(k)}, \sigma(Z_{jk}) = Z_{\sigma(j)\sigma(k)}$ (但し便宜上 $j=0$ については $\sigma(0)=0$ とする)。導分 D に対し $\sigma D := \sigma \circ D \circ \sigma^{-1}$ として、$\mathrm{Der}^b\mathcal{L}_g^{(r)}, \mathrm{Out}^b\mathcal{L}_g^{(r)}$ に $\mathfrak{S}_r$ の作用が定まる。即ち、$\bar{D} = D \bmod \mathrm{Int}\mathcal{L}_g^{(r)} \in \mathrm{Out}^b\mathcal{L}_g^{(r)}$ が $\sigma \in \mathfrak{S}_r$ で不変とは、$\sigma \circ D \circ \sigma^{-1} = D + \mathrm{Int}(a(\sigma))$ $(\exists a(\sigma) \in \mathcal{L}_g^{(r)\circ})$ を意味する。$\mathrm{Out}^b\mathcal{L}_g^{(r)}$ の $\mathfrak{S}_r$-不変部分環を $\mathcal{D}_g^{(r)}$ と書く。$C^{(r)}$ の点の入換と Galois 群の作用とは可換であるから、$\mathcal{G}_{C^{(r)}}$ の像は $\mathcal{D}_g^{(r)}$ に含まれる。そこで $\mathcal{G}_{C^{(r)}}$ を調べる手掛かりとして、その入れ物である $\mathcal{D}_g^{(r)}$ を調べようというのである。

2.5. 紐忘れ射による次数 Lie 環の系. k 番目の点を忘れる射 $C^{(r)} \to C^{(r-1)}$ から引起こる紐忘れ射 $p_k^{(r)} : \mathcal{L}_g^{(r)} \to \mathcal{L}_g^{(r-1)}$ を考える。例えば

$$(2.25) \qquad p_r^{(r)} : \mathcal{L}_g^{(r)} \longrightarrow \mathcal{L}_g^{(r-1)}$$
$$X_{ik}^{(r)}, Y_{ik}^{(r)}, Z_{jk}^{(r)} \longmapsto \begin{cases} X_{ik}^{(r-1)}, Y_{ik}^{(r-1)}, Z_{jk}^{(r-1)} & (j,k \neq r) \\ 0 & (j = r \text{ 又は } k = r) \end{cases}$$

である。$p_k^{(r)}$ の核は $\mathcal{N}_k^{(r)}$ であって、それが $\mathcal{D}_g^{(r)}$ の元で保たれることなどから、$\mathcal{D}_g^{(r)} \to \mathcal{D}_g^{(r-1)}$ が引起こる (同じ記号 $p_k^{(r)}$ で表すことにする)。こうして出来た次数 Lie 環の系

$$(2.26) \qquad \cdots \longrightarrow \mathcal{D}_g^{(r)} \longrightarrow \mathcal{D}_g^{(r-1)} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \mathcal{D}_g^{(2)} \longrightarrow \mathcal{D}_g^{(1)} = \mathcal{D}_g$$

についての考察が本稿の主題である。

3. 導分環の系の安定性

3.1. $C = \mathbf{P}^1 \setminus \{0,1,\infty\}$ の場合. 3 点抜き射影直線 $C = \mathbf{P}^1 \setminus \{0,1,\infty\}$ の場合に関する伊原 [I3] の結果は本稿の主結果の源であり、その証明でも急所で用いている。$\mathcal{M}_{0,n} = ((\mathbf{P}^1)^n \setminus \Delta)/\mathrm{PGL}(2)$ を n 標点 $\mathbf{P}^1$ の moduli とすると、$C^{(r)} = \mathcal{M}_{0,r+3}$ と見做せる。そこで $C^{(r)}$ 上にこの同一視による $\mathfrak{S}_{r+3}$ 対称性を考えることが多い。幾何的副 l 基本群 $\pi_1(\overline{\mathcal{M}_{0,r+3}})^{\text{pro-}l}$ は、r 本糸球面純組紐群をその中心で割ったものの副 l 基本群と同型である。この群に降中心 filtration を入れて作った次数 Lie 環を $\mathcal{P}^{(r+3)}$ とし、その組紐的外部導分環 $\mathrm{Out}^b\mathcal{P}^{(r+3)}$ の $\mathfrak{S}_{r+3}$-対称部分を $\mathcal{D}^{(r+3)}$ とする。($C^{(r)}$ から出来るものに番号 $r+3$ が振られるので注意。)

<u>定理</u> (伊原 [I2, I3]). $\mathcal{D}^{(r)} \to \mathcal{D}^{(r-1)}$ は

(1) $r \geq 5$ 即ち全ての段階で単射。

(2) $r \geq 6$ で全射。従って $\mathcal{D}^{(5)}$ で停留する。∎

$\mathcal{D}^{(5)}$ は<u>安定導分環 (stable derivation algebra)</u> と呼ばれ、Grothendieck-Teichmüller 群 GT の<u>次数 Lie 環類似</u>とも見做される。

3.2. 正種数の場合. 1 点抜きとは限らない一般の型 (g,n) の場合に対し、基本群の次数 Lie 環化 $\mathrm{Gr}\Pi_{g,n}^{(r)} = \mathcal{L}_{g,n}^{(r)}$ とその組紐的外部導分環 $\mathrm{Out}^{\flat}\mathcal{L}_{g,n}^{(r)}$、及びその $\mathfrak{S}_r$-対称な部分環 $\mathcal{D}_{g,n}^{(r)}$ が同様に定式化され (但し、組紐条件のうち ($\flat$3) は考慮されていない)、単射性に関する次の結果が得られている。

<u>定理</u> (伊原-金子 [IK], 中村-高尾-上野 [NTaU]). $\mathcal{D}_{g,n}^{(r)} \to \mathcal{D}_{g,n}^{(r-1)}$ は、
(1) $g \geq 1, n \geq 1$ ならば $r \geq 2$ 即ち全ての段階で単射。
(2) $g \geq 2, n = 0$ ならば $r \geq 3$ で単射 (一番下の段階 $r = 2$ の時は未解決)。∎

これより型 (g,n) $(g \geq 1, n \geq 1)$ の曲線 C について、$\mathcal{G}_{C^{(r)}} = \mathcal{G}_C$ $(r \geq 1)$ となることが判る。実際、体の塔 $\{\boldsymbol{Q}(m)_{C^{(r)}}\}$ そのものが一致する。
本稿の主結果は $g \geq 1, n = 1$ の場合の全射性に関するものである。

<u>主定理</u>. $g \geq 1, n = 1$ のとき $\mathcal{D}_{g,1}^{(r)} = \mathcal{D}_g^{(r)}$ 達の間に定まる射 $\mathcal{D}_g^{(r)} \to \mathcal{D}_g^{(r-1)}$ は、$r \geq 4$ で全射。従って $\mathcal{D}_g^{(3)}$ で停留する。∎

このことから、種数 0 の場合に倣って、$\mathcal{D}_g^{(3)}$ を <u>型 $(g,1)$ の安定導分環</u>と呼びたい。

3.3. 単射性と対称性について. 上の単射性の結果は、実は対称性を仮定せずに得られている。この「対称性の仮定無しの単射性」から、多くの場合に組紐的導分が自動的に対称性を持つことが判る。詳しくは次が成り立つ。

<u>命題</u>. (1) k 番目の紐忘れ射 $p_k^{(r)} : \mathrm{Out}^{\flat}\mathcal{P}^{(r)} \to \mathrm{Out}^{\flat}\mathcal{P}^{(r-1)}$ を考え、$\mathfrak{S}_{r-1}$ を $\mathfrak{S}_r$ 内の文字 k の固定群と同一視する時、$\bar{D} \in \mathrm{Out}^{\flat}\mathcal{P}^{(r)}$ に対し、$p_k^{(r)}(\bar{D})$ が $\sigma \in \mathfrak{S}_{r-1}$ で不変なら、$\bar{D}$ は $\sigma \in \mathfrak{S}_{r-1} \subset \mathfrak{S}_r$ で不変。
(2) $\mathrm{Out}^{\flat}\mathcal{P}^{(5)}$ の元は自動的に $\mathfrak{A}_5$-対称性を持つ。
(3) 2 段階のどの紐忘れ射 $\mathrm{Out}^{\flat}\mathcal{P}^{(r)} \to \mathrm{Out}^{\flat}\mathcal{P}^{(r-2)}$ も単射なら、$\mathrm{Out}^{\flat}\mathcal{P}^{(r)}$ の元は自動的に $\mathfrak{S}_r$-対称性を持つ。正種数の場合も同様。
(4) $\mathrm{Out}^{\flat}\mathcal{P}^{(r)}$ $(r \geq 6)$ の元は自動的に $\mathfrak{S}_r$-対称性を持つ。
(5) $g \geq 1, n \geq 1, r \geq 3$ 又は $g \geq 2, n = 0, r \geq 4$ の時、$\mathrm{Out}^{\flat}\mathcal{L}_{g,n}^{(r)}$ の元は自動的に $\mathfrak{S}_r$-対称性を持つ。∎

<u>証明</u>. (1) 上のような対称群の同一視により $p_k^{(r)}$ は $\mathfrak{S}_{r-1}$-同変的である。従って、$\sigma \in \mathfrak{S}_{r-1}$ に対し、$p_k^{(r)}(\bar{D})$ が $\sigma \in \mathfrak{S}_{r-1}$ で不変なら、$p_k^{(r)}(\bar{D}) = \sigma(p_k^{(r)}(\bar{D})) = p_k^{(r)}(\sigma((\bar{D}))$ となり、$p_k^{(r)}$ の単射性から $\bar{D} = \sigma\bar{D}$ となる。

(2) $\mathcal{P}^{(4)}$ への $\mathfrak{S}_4$-作用は、その Klein 四元部分群 V_4 による商 $\mathfrak{S}_4/V_4 \simeq \mathfrak{S}_3$ を経由する。(実際この作用は $\mathrm{Aut}(\mathbf{P}^1 \setminus \{0,1,\infty\}) \simeq \mathfrak{S}_3$ の作用から定まるものと一致する。) 従って、V_4 は $\mathrm{Out}^{\flat}\mathcal{P}^{(4)}$ に自明に作用する。忘れる点を替えて紐忘れ射を 2 通り考えると、V_4 は 2 通りに $\mathfrak{S}_5$ に埋込まれ、(1) によりその両方とも $\mathrm{Out}^{\flat}\mathcal{P}^{(5)}$ に自明に作用するので両者が生成する 5 次交代群 $\mathfrak{A}_5$ の作用も自明である。

(3) 任意の互換 $\sigma = (k_1\ k_2)$ で不変なことを示せばよい。k_1, k_2 を共に忘れる射 $p_{k_1,k_2}^{(r)} : \mathrm{Out}^{\flat}\mathcal{P}^{(r)} \to \mathrm{Out}^{\flat}\mathcal{P}^{(r-2)}$ を考えると、$p_{k_1,k_2}^{(r)} = p_{k_1,k_2}^{(r)} \circ \sigma$ であり、$p_{k_1,k_2}^{(r)}$ の単射性から σ の作用は自明となる。

(4)(5) 上の定理及び (3) より従う。 □

4. 証明の概略

外部導分のままでは扱い辛いので、標準的な代表を取ることにする。そのため、

$$W_k = W_k^{(r)} = \sum_{j=k+1}^{r} Z_{jk}^{(r)} + Z_{0k}^{(r)} \quad (1 \le k \le r) \tag{4.1}$$

とおく (特に $W_r = W_r^{(r)} = Z_{0r}^{(r)}$)。これらは互いに可換である。$\mathrm{Out}^\flat \mathcal{L}_g^{(r)}$ の各類に対し、$D(W_k^{(r)}) = 0$ $(1 \le k \le r)$ となる代表 $D \in \mathrm{Der}^\flat \mathcal{L}_g^{(r)}$ (W-正規化) が、$\langle W_k^{(r)} \big| 1 \le k \le r \rangle (= \bigoplus_{k=1}^{r} \boldsymbol{Z}_l W_k^{(r)})$ の元による内部導分を除いて一意に存在する。そこで以下では外部導分の代わりに常に W-正規化された代表を考えることにする。

$\mathcal{L}_g^{(1)}$ は $X_{i1}^{(1)}, Y_{i1}^{(1)}$ $(1 \le i \le g)$ 上の自由 Lie 環なので、その元は $2g$ 変数の Lie 多項式と見做せる。そこで記法 $\boldsymbol{X}_k^{(r)} = (X_{1k}^{(r)}, \ldots, X_{gk}^{(r)}), \boldsymbol{Y}_k^{(r)} = (Y_{1k}^{(r)}, \ldots, Y_{gk}^{(r)})$ を用いて、$D = D^{(1)} \in \mathcal{D}_g^{(1)}$ に対し、$S_{i1}^{(1)} = \mathcal{S}_i(\boldsymbol{X}_1^{(1)}, \boldsymbol{Y}_1^{(1)}) = D^{(1)}(X_{i1}^{(1)}), T_{i1}^{(1)} = \mathcal{T}_i(\boldsymbol{X}_1^{(1)}, \boldsymbol{Y}_1^{(1)}) = D^{(1)}(Y_{i1}^{(1)})$ $(1 \le i \le g)$ と置く。正規化条件 $D(Z_1^{(1)}) = 0$ により $\sum_{i=1}^{g}([S_{i1}^{(1)}, Y_{i1}^{(1)}] + [X_{i1}^{(1)}, T_{i1}^{(1)}]) = 0$ である。

<u>補題</u>. $D^{(1)}$ が $D^{(2)} \in \mathcal{D}_g^{(2)}$ に持ち上がるなら、$D^{(2)}$ は次の形：

$$\begin{aligned}
X_{i1}^{(2)} &\longmapsto S_{i1}^{(2)} = \mathcal{S}_i(\boldsymbol{X}_1^{(2)}, \boldsymbol{Y}_1^{(2)}),\\
Y_{i1}^{(2)} &\longmapsto T_{i1}^{(2)} = \mathcal{T}_i(\boldsymbol{X}_1^{(2)}, \boldsymbol{Y}_1^{(2)}),\\
X_{i2}^{(2)} &\longmapsto S_{i1}^{(2)} = \mathcal{S}_i(\boldsymbol{X}_2^{(2)}, \boldsymbol{Y}_2^{(2)}) + [U_{01}^{(2)}, X_{i2}^{(2)}],\\
Y_{i2}^{(2)} &\longmapsto T_{i1}^{(2)} = \mathcal{T}_i(\boldsymbol{X}_1^{(2)}, \boldsymbol{Y}_1^{(2)}) + [U_{01}^{(2)}, Y_{i2}^{(2)}],\\
Z_{12}^{(2)} &\longmapsto [U_{12}^{(2)}, Z_{12}^{(2)}],\\
Z_{01}^{(2)} &\longmapsto [U_{01}^{(2)}, Z_{01}^{(2)}],\\
Z_{02}^{(2)} &\longmapsto 0.
\end{aligned}$$

ここに $U_{01}^{(2)}, U_{12}^{(2)} \in \mathcal{L}_g^{(2)\circ}$ で $U_{01}^{(2)} = U_{12}^{(2)} - \sigma(U_{12}^{(2)})$ $(\sigma = (1\ 2) \in \mathfrak{S}_2)$ を満たす。∎

$D_0^{(2)}$ を $D^{(2)}$ の $\mathcal{L}_g^{(2)\circ}$ への制限とする。実際に示すのは次のことである。

<u>命題</u>. $D = D^{(2)} \in \mathcal{D}_g^{(2)}$ について、$\mathcal{L}_g^{(2)\circ}$ への制限を $D_0 = D_0^{(2)}$ とする。$r \ge 3$ に対し $D_0^{(2)}$ が $\mathfrak{S}_r$-対称な $\mathcal{L}_g^{(r)\circ}$ 上の組紐的導分 $D_0^{(r)}$ に持ち上がるならば、$D^{(2)}$ は $D^{(r)} \in \mathcal{D}_g^{(r)}$ に持ち上がる。∎

<u>証明</u>. $\mathcal{L}_g^{(r)\circ}$ 上の導分 $D_0^{(r)}$ を $D_0^{(2)}$ の持ち上げとし、$D_0^{(r)}(Z_{jk}^{(r)}) = [U_{jk}^{(r)}, Z_{jk}^{(r)}]$ $(0 \le j \le r, 1 \le k \le r)$ とする。$D_0^{(r)}$ の $\mathfrak{S}_r$-対称性により 1-cocycle $a^{(r)} : \mathfrak{S}_r \to \mathcal{L}_g^{(r)\circ}$ で $\sigma \circ D_0^{(r)} \circ \sigma^{-1} = D_0^{(r)} + \mathrm{Int}(a^{(r)}(\sigma))$ $(\sigma \in \mathfrak{S}_r)$ なるものが存在する。これを用いて $\mathcal{D}_g$ 上の導分 $D^{(r)}$ で、$\mathcal{L}_g^{(r)\circ}$ への制限が $D_0^{(r)}$ と一致し、$D^{(2)}$ の持ち上げとなるものが実際具体的に次の主張により構成される。 □

<u>主張</u>．次で定まる $D^{(r)}\in\mathcal{D}_g$ が求めるものである。

$$
\begin{aligned}
X_{ik}^{(r)} &\longmapsto S_{ik}^{(r)}=\mathcal{S}_i(\boldsymbol{X}_k^{(r)},\boldsymbol{Y}_k^{(r)})-[a^{(r)}(\tau_k),X_{ik}^{(r)}],\\
Y_{ik}^{(r)} &\longmapsto T_{ik}^{(r)}=\mathcal{T}_i(\boldsymbol{X}_k^{(r)},\boldsymbol{Y}_k^{(r)})-[a^{(r)}(\tau_k),Y_{ik}^{(r)}],\\
Z_{jk}^{(r)} &\longmapsto D_0^{(r)}(Z_{jk}^{(r)})=[U_{jk}^{(r)},Z_{jk}^{(r)}].
\end{aligned}
$$

ここに τ_k は $\tau_k(1)=k$ なる $\mathfrak{S}_r$ の元の 1 つで、$S_{ik}^{(r)},T_{ik}^{(r)}$ はその選び方に依らない。∎

<u>証明</u>．まず $S_{ik}^{(r)},T_{ik}^{(r)}$ が τ_k の取り方に依らないことは $\sigma(1)=1$ なる $\sigma\in\mathfrak{S}_r$ に対し、$a^{(r)}(\sigma)$ が $X_{i1}^{(r)},Y_{i1}^{(r)}$ $(i=1,\ldots,g)$ と可換になることから従う。

r に関する帰納法で主張を証明する。$p_r^{(r)\circ}=p_r^{(r)}|_{\mathcal{L}_g^{(r)\circ}}:\mathcal{L}_g^{(r)\circ}\to\mathcal{L}_g^{(r-1)\circ}$ により $D_0^{(r)}$ から引起こる $\mathcal{L}_g^{(r-1)\circ}$ 上の導分を $D_0^{(r-1)}$ とすると、帰納法の仮定により $\mathcal{L}_g^{(r-1)}$ 上の導分 $D^{(r-1)}$ に上の形で延長される。

<u>補題</u>．(i) $\mathfrak{S}_r$ 内の文字 r の固定部分群と $\mathfrak{S}_{r-1}$ とを同一視する時、$\sigma\in\mathfrak{S}_{r-1}$ に対し、$p_r^{(r)}(a^{(r)}(\sigma))=a^{(r-1)}(\sigma)$ となる。

(ii) $\{j,k\}\cap\{r,0\}=\emptyset$ の時、$S_{ik}^{(r)}=\iota(S_{ik}^{(r-1)}),T_{ik}^{(r)}=\iota(T_{ik}^{(r-1)}),U_{ik}^{(r)}=\iota(U_{ik}^{(r-1)})$ となる。ここに $\iota=\iota^{(r-1)}:\mathcal{L}_g^{(r-1)}\to\mathcal{L}_g^{(r)}$ は、$X_{ik}^{(r-1)},Y_{ik}^{(r-1)},Z_{jk}^{(r-1)}\mapsto X_{ik}^{(r)},Y_{ik}^{(r)},Z_{jk}^{(r)}$ $(1\le i\le g;1\le j,k\le r-1),Z_{0k}^{(r-1)}\mapsto Z_{rk}^{(r)}+Z_{0k}^{(r)}$ $(1\le k\le r-1)$ で定める。(これは紐忘れ射 $p_r^{(r)}$ の分裂射の一つであり、C の抜けた点の隣に紐を 1 本加えることに対応する。)

(iii) $\sigma\in\mathfrak{S}_r$ に対し次が成り立つ。

$$
\begin{aligned}
\sigma(S_{ik}^{(r)})&=S_{i\sigma(k)}^{(r)}+[a^{(r)}(\sigma),X_{i\sigma(k)}^{(r)}],\\
\sigma(T_{ik}^{(r)})&=T_{i\sigma(k)}^{(r)}+[a^{(r)}(\sigma),Y_{i\sigma(k)}^{(r)}],\\
\sigma(U_{jk}^{(r)})&=U_{\sigma(j)\sigma(k)}^{(r)}+a^{(r)}(\sigma).
\end{aligned}
$$ ∎

この補題を用いて、$D^{(r)}$ が $\mathcal{L}_g^{(r)}$ の定義関係式を全て保つことを確かめることによって、主張が証明される。関係式 (2.7),(2.9) については、仮定により $D_0^{(r)}$ が既に well-defined であるからよい。

$D^{(r)}$ が関係式 (2.8)

$$
\sum_{i=1}^{g}[X_{ik}^{(r)},Y_{ik}^{(r)}]+\sum_{j=0}^{r}Z_{jk}^{(r)}=0\quad(1\le k\le r)\tag{(2.8)}
$$

を保つことを見るには、

$$
\sum_{i=1}^{g}\Big([X_{ik}^{(r)},T_{ik}^{(r)}]+[S_{ik}^{(r)},Y_{ik}^{(r)}]\Big)+\sum_{j=0}^{r}[U_{jk}^{(r)},Z_{jk}^{(r)}]=0\tag{4.2}
$$

を示せばよい。$k=1$ の時は

$$\sum_{i=1}^{g}\left([X_{i1}^{(r)},T_{i1}^{(r)}]+[S_{i1}^{(r)},Y_{i1}^{(r)}]\right)=\sum_{i=1}^{g}\left([X_{i1}^{(r)},\mathcal{T}_i(\boldsymbol{X}_1^{(r)},\boldsymbol{Y}_1^{(r)})]+[\mathcal{S}_i(\boldsymbol{X}_1^{(r)},\boldsymbol{Y}_1^{(r)}),Y_{i1}^{(r)}]\right)$$
$$=\iota^{(r-1)}\circ\cdots\circ\iota^{(1)}\left(\sum_{i=1}^{g}\left([X_{i1}^{(1)},\mathcal{T}_i(\boldsymbol{X}_1^{(1)},\boldsymbol{Y}_1^{(1)})]+[\mathcal{S}_i(\boldsymbol{X}_1^{(1)},\boldsymbol{Y}_1^{(1)}),Y_{i1}^{(1)}]\right)\right)=0$$

及び

$$\sum_{j=0}^{r}[U_{j1}^{(r)},Z_{j1}^{(r)}]=D_0^{(r)}(\sum_{j=0}^{r}Z_{j1}^{(r)})=D_0^{(r)}(W_1^{(r)})=0$$

から従う。一般の k に対しては、$\sigma(k)=1$ なる $\sigma\in\mathfrak{S}_r$ を取れば、次のように $k=1$ の場合に帰着して示せる。

$$\sigma\left(\sum_{i=1}^{g}\left([X_{ik}^{(r)},T_{ik}^{(r)}]+[S_{ik}^{(r)},Y_{ik}^{(r)}]\right)+\sum_{j=0}^{r}[U_{jk}^{(r)},Z_{jk}^{(r)}]\right)$$
$$=\sum_{i=1}^{g}\left(\left[X_{i1}^{(r)},T_{i1}^{(r)}+[a^{(r)}(\sigma),Y_{i1}^{(r)}]\right]+\left[S_{i1}^{(r)}+[a^{(r)}(\sigma),X_{i1}^{(r)}],Y_{i1}^{(r)}\right]\right)+\sum_{j=0}^{r}[U_{j1}^{(r)}+a^{(r)}(\sigma),Z_{j1}^{(r)}]$$
$$=\sum_{i=1}^{g}\left([X_{i1}^{(r)},T_{i1}^{(r)}]+[S_{i1}^{(r)},Y_{i1}^{(r)}]\right)+\sum_{j=0}^{r}[U_{j1}^{(r)},Z_{j1}^{(r)}]+\left[a^{(r)}(\sigma),\sum_{i=1}^{g}[X_{ik}^{(r)},Y_{ik}^{(r)}]+\sum_{j=0}^{r}Z_{jk}^{(r)}\right]$$
$$=0$$

また例えば関係式 (2.13)

$$[X_{ik},Y_{il}]=Z_{kl}\quad(k\neq l)\tag{(2.13)}$$

については、

$$[S_{ik}^{(r)},Y_{il}^{(r)}]+[X_{ik}^{(r)},T_{il}^{(r)}]=[U_{kl}^{(r)},Z_{kl}^{(r)}]\tag{4.3}$$

を示せばよい。$(k,l)=(1,2)$ の場合は帰納法の仮定を用いて

$$[S_{i1}^{(r)},Y_{i2}^{(r)}]+[X_{i1}^{(r)},T_{i2}^{(r)}]-[U_{12}^{(r)},Z_{12}^{(r)}]$$
$$=\iota^{(r-1)}\left([S_{i1}^{(r-1)},Y_{i2}^{(r-1)}]+[X_{i1}^{(r-1)},T_{i2}^{(r-1)}]-[U_{12}^{(r-1)},Z_{12}^{(r-1)}]\right)=0$$

となる。一般の k,l に対しては $\sigma(k)=1,\sigma(l)=2$ なる $\sigma\in\mathfrak{S}_r$ を取って先程と同要領で示される。

他の関係式についても同様で、関係式 (2.10) で $j\neq 0$ の場合だけが少しだけ厄介であるが、正規化条件 $D_0^{(r)}(W_{r-1}^{(r)})=0$ と $j=0$ の場合 (先に示しておく) の式をうまく用いて示せる。このように全ての関係式を保つことにより $D^{(r)}$ が well-defined に定まることが判った。$D^{(2)}$ の持ち上げであること、$D_0^{(r)}$ の延長であること、$\mathfrak{S}_r$-対称性は作り方より明らか。 □

最後にこの命題から主定理が次のように示される。$\mathcal{L}_g^{(r)\circ}$ の中心は $\langle\sum_{k=1}^r W_k^{(r)}\rangle$ であり、$\mathcal{L}_g^{(r)\circ}/\langle\sum_{k=1}^r W_k^{(r)}\rangle \simeq \mathcal{P}^{(r+2)}$ であることに注意すると、$D(\sum_{k=1}^r W_k^{(r)})=0$ なる $\mathcal{L}_g^{(r)\circ}$ 上の組紐的導分は $\mathcal{P}^{(r+2)}$ 上の組紐的導分と同一視できる。さて、$D^{(3)}\in\mathcal{D}_g^{(3)}$ に対し、$\mathcal{L}_g^{(3)\circ}$ への制限 $D_0^{(3)}$ を上の同一視で $\mathcal{P}^{(5)}$ 上の組紐的導分と見ると、前節末の命題より自動的に内部導分を法として $\mathfrak{A}_5$-不変である。又、元々内部導分を法として $\mathfrak{S}_3$-不変であるから、特に或る互換でも不変となり、併せて $\mathfrak{S}_5$-不変、従って $\mathcal{D}_0^{(5)}$ の元を与える。種数 0 の場合の結果により $\mathcal{D}_0^{(5)}$ は安定導分環であるから、任意の $r\geq 3$ に対して $\mathcal{D}_0^{(r+2)}$ の元に持ち上がる。これを上の同一視で戻して $\mathcal{L}_g^{(r)\circ}$ 上の組紐的導分と見たものを $D_0^{(r)}$ として本節の命題を適用すればよい。

5. 更なる問題

(g,n) 型の曲線 C に対し、普遍 monodromy 表現 [O] により、$\mathcal{G}_C$ はその型のみに依る商 $\mathcal{G}_{g,n}$ を共通に持つ。更に $\mathcal{G}_{g,n}$ は型 (g,n) にも依らない (織田予想) ことが知られている ([N, NTaU, M, IN])。従って特に $\mathcal{G}_C \twoheadrightarrow \mathcal{G}_{g,n}=\mathcal{G}_{0,3}=\mathcal{G}_{\mathbf{P}^1\setminus\{0,1,\infty\}}$ である。C が $(g,1)$ 型の場合に、上の状況を導分環の中への埋込と併せて考えよう。

$\mathcal{D}_g^{(r)0} := \{D\in\mathcal{D}_g^{(r)} \,\big|\, D|_{\mathcal{L}_g^{(r)\circ}}=0\}$ とすると、$\mathcal{L}_g^{(r)\circ}$ への制限により、全射 $\mathcal{D}_g^{(r)} \to \mathcal{D}_g^{(r)}/\mathcal{D}_g^{(r)0}$ が得られるが、松本 [M] の結果を見ると、合成 $\mathcal{G}_C \hookrightarrow \mathcal{D}_g^{(r)} \to \mathcal{D}_g^{(r)}/\mathcal{D}_g^{(r)0}$ が $\mathcal{G}_C \twoheadrightarrow \mathcal{G}_{g,n}$ を経由することが判る。これを上述の織田予想と併せて考えると、次の図式が得られる。ここに、下段の $\mathcal{D}_g^{(r)}/\mathcal{D}_g^{(r)0} \to \mathrm{Out}^\flat\mathcal{P}^{(r+2)}$ は前節の終わりに用いた同一視による単射で、$r\geq 3$ では自動的対称性によりその像が $\mathcal{D}^{(r+2)}$ に含まれる。

$$
(5.1)\qquad
\begin{array}{ccccccc}
\mathcal{G}_C & \subset & \mathcal{D}_g^{(3)} & \hookrightarrow & \mathcal{D}_g^{(2)} & \hookrightarrow & \mathcal{D}_g^{(1)} \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\mathcal{G}_{g,1} & \subset & \mathcal{D}_g^{(3)}/\mathcal{D}_g^{(3)0} & \hookrightarrow & \mathcal{D}_g^{(2)}/\mathcal{D}_g^{(2)0} & \longrightarrow & 0 \\
\| & & \downarrow & & & \searrow & \\
\mathcal{G}_{0,3} & \subset & \mathcal{D}^{(5)} & \hookrightarrow & \mathcal{D}^{(4)} & \hookrightarrow & \mathrm{Out}^\flat\mathcal{P}^{(4)}
\end{array}
$$

この状況で次のようなことが問題となるであろう。

5.1. $\mathcal{D}_g^{(3)} \to \mathcal{D}_g^{(2)}$ **は全射か？** これは主定理に於いて $r=3$ が最良かということである。$\mathcal{D}_g^{(2)} \to \mathcal{D}_g^{(1)}$ に関しては、$g=1$ の時に全射でない (実際 8 次以上の部分で違いが見られる) ことが、自由 Lie 環の計算を実行することによって判っている ([T1])。又、12 次以下の部分では、$\otimes_{\mathbf{Z}_l}\bar{\mathbf{Q}}_l$ の下で、generic な曲線 C に対し知られている Galois 像によって $\mathcal{D}_g^{(2)}$ が尽くされているので、この範囲では $\mathcal{D}_g^{(3)}$ と $\mathcal{D}_g^{(2)}$ とは一致している。$\mathcal{D}_g^{(3)} \to \mathcal{D}_g^{(2)}$ が全射だとすると、$\mathcal{D}^{(5)}$ と $\mathcal{D}^{(4)}$ との違いである "5-cycle relation" が $\mathcal{D}^{(4)}$ から $\mathcal{D}_g^{(2)}$ への延長可能性から得られることになるので、"5-cycle relation" の影響が最初に現れる 14 次の成分を計算するのは興味深い問題であるが、この種の計算は次数が上がると急激に計算量が増加するので現状ではなかなか困難である。

202

5.2. $\mathcal{D}_g^{(3)} \to \mathcal{D}^{(5)}$ の全射性. $\mathcal{G}_{0,3}$ は $\mathcal{D}^{(5)}$ 内で $\mathcal{D}_g^{(3)}$ の像に含まれるので、これは「$G_{\mathbf{Q}} \subsetneq \mathrm{GT}$ か？」という問題の次数 Lie 環版である「$\mathcal{G}_{0,3} \subsetneq \mathcal{D}^{(5)}$ か？」という問題に関連する。$\mathcal{G}_{0,3} = \mathcal{D}^{(5)}$ とすると、$\mathcal{D}_g^{(3)} \to \mathcal{D}^{(5)}$ は全射ということになるが、これは自明なことには見えない。一方 $\mathcal{G}_{0,3} \subsetneq \mathcal{D}^{(5)}$ であれば既に大騒ぎだが、その場合 $\mathcal{D}^{(5)}$ から $\mathcal{D}_g^{(3)}$ への延長可能性が影響しているのか、又このことが Galois 像を特徴付けるか、という問題が浮上する。いづれにせよこれ自身は Galois 群と独立に定式化される純代数的な問題であり、Galois 群を調べるために、まづ考えておくべきであろう。

参考文献

[AK] Asada M., Kaneko M., On the automorphism groups of some pro-l fundamental groups, Adv. Stud. Pure Math. 12 (1987), 137–159.

[Bi] Birman,J.S., On braid groups, Comm. Pure Appl. Math. 22 (1968), 41–72.

[I1] Ihara Y., Profinite braid groups, Galois representations and complex multiplications, Ann. of Math. 123 (1986), 43–106.

[I2] ———,Automorphisms of pure sphere braid groups and Galois representations, in "The Grothendieck Festschrift" II, Progress in Math. 87 (1991), 353–373, Birkhäuser.

[I3] ———,On the stable derivation algebra associated with some braid groups, Israel J. of Math. 80 (1992), 135–153.

[IK] Ihara Y., Kaneko M., Pro-l pure braid groups of Riemann surfaces and Galois representations, Osaka J. Math. 29 (1992), 1–19.

[IN] Ihara Y, Nakamura H, On deformation of maximally degenerate stable marked curves and Oda's problem, J. Reine Angew. Math. 487 (1997), 125–151.

[K] Kaneko M., Certain automorphism groups of pro-l fundamental groups of punctured Riemann surfaces, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo 36 (1989),363–372.

[M] Matsumoto M., On Galois representations on profinite braid groups of curves, J. reine angew. Math. 474 (1996), 169–219.

[N] Nakamura H., Coupling of universal monodromy representations of Galois-Teichmüller modular groups, Math. Ann. 304 (1996), no. 1, 99–119.

[NTaU] Nakamura H., Takao N., Ueno R., Some stability properties of Teichmüller modular function fields with pro-l weight structures, Math. Ann. 302 (1995), 197–213.

[NTs] Nakamura H.,Tsunogai H., Some finiteness theorems on Galois centralizers in pro-l mapping class group, J. reine angew. Math. 441 (1993), 115–144.

[O] Oda T., The universal monodromy representations on the pro-nilpotent fundamental groups of algebraic curves, Mathematische Arbeitstagung (Neue Serie) 9.-15. Juni 1993, Max-Planck-Institute preprint MPI/93-57.

[T1] 角皆宏, 楕円曲線に付随する外 Galois 表現の $\mathfrak{S}_3$-対称性, 日本数学会代数学分科会アブストラクト, 1997 年 4 月 (於信州大学), 50–51.

[T2] Tsunogai H., The stable derivation algebras for higher genera, 鋭意執筆中.

上智大学理工学部数学科, 102-8544 東京都千代田区紀尾井町 7–1

E-mail address: `tsuno@mm.sophia.ac.jp`