数理解析研究所講究録
1154 巻 2000 年 50-54

ON THE MILNOR K-THEORY OF COMPLETE DISCRETE VALUATION FIELDS

東大数理　　中村　仁也　(JINYA NAKAMURA)

1. はじめに

完備離散付値体 K について, K の単数群 $K^{\times}$ には K の付値から導入される自然なフィルター付け

$$U^iK^{\times}=\begin{cases}K^{\times} & (i=0)\\ 1+\mathfrak{m}_K^i & (i\geq 1)\end{cases}$$

があり, その部分商 $\mathrm{gr}^i K^{\times}=U^iK^{\times}/U^{i+1}K^{\times}$ は K の剰余体 F を使って

$$\mathrm{gr}^i K^{\times}\cong\begin{cases}\mathbb{Z}\oplus F^{\times} & (i=0)\\ F & (i\geq 1)\end{cases}$$

と書かれる. ここで $\mathfrak{m}_K$ は K の付値環 $\mathcal{O}_K$ の極大イデアルとした. そして, もし K が局所体であった場合は局所類体論により $\mathrm{Gal}(K^{ab}/K)$ と $K^{\times}$ がほぼ同型になるが, このフィルター付けは分岐群に対応する重要な部分群であった. 詳しくは [9] を参照のこと.

K のミルナー K 群は単数群の一般化であり, K が高次元局所体の場合はこの群が高次元局所類体論によって $\mathrm{Gal}(K^{ab}/K)$ に対応する. そして, これもまた K の付値から導入されるフィルター付けをもっている. しかしこの部分商は K が混標数完備離散付値体かつ絶対不分岐でない場合は特別なものを除いてまだわかっていなかった. ここでは, 混標数完備離散付値体 K について, K の剰余体の標数が 2 でなく K の絶対分岐指数が剰余体の標数で割れない場合, つまり K について絶対不分岐な部分体上順分岐まで許したとき, K のミルナー K 群のフィルター付けによる部分商がどうなっているかの概要を説明する. 詳しくは [8] を参照のこと.

K を標数 0 の離散付値体, F をその剰余体とし, F の標数を p とする. $p>2$ とする. F には標数以外の条件はない. K の q 次のミルナー K 群を $K_q^M(K)$ とする.

$K_q^M(K)$ のフィルター付けを, $U^0K_q^M(K)=K_q^M(K)$ とし, $i\geq 1$ については

$$U^iK_q^M(K)=\left\{\{x_1,\ldots,x_q\}\in K_q^M(K)\;\middle|\; x_1\in 1+\mathfrak{m}_K^i,\ x_2,\ldots,x_q\in K^{\times}\right\}$$

とする. $i\geq 0$ について $\mathrm{gr}^i K_q^M(K)=U^iK_q^M(K)/U^{i+1}K_q^M(K)$ と定義する.

F について, $\Omega_F^1=\Omega_{F/\mathbb{Z}}^1$ を $\mathbb{Z}$ 上の微分加群とし, Ω_F^q を Ω_F^1 の F 上の q 回外積とする. Ω_F^q の部分加群 Z_i^q および B_i^q を, $Z_1^q=Z_1\Omega_F^q$ は $d:\Omega_F^q\to\Omega_F^{q+1}$ の核, $B_1^q=B_1\Omega_F^q$ は $d:\Omega_F^{q-1}\to\Omega_F^q$ の像, $i\geq 2$ について $B_i^q=B_i\Omega_F^q$ (または $Z_i^q=Z_i\Omega_F^q$) をそれぞれ

$$\mathrm{C}^{-1}:B_{i-1}^q\xrightarrow{\cong}B_i^q/B_1^q$$
$$(\text{または } \mathrm{C}^{-1}:Z_{i-1}^q\xrightarrow{\cong}Z_i^q/B_1^q).$$

で定義されるものとする．但し d は微分写像，C^{-1} は逆カルチェ作用素とした．詳細は [3]．0 または負なる i については $Z_i^q = \Omega_F^q$ とする．

すると次の定理を得る．

定理 1.1 ([8],Theorem 1.1.). $i > ep/(p-1)$ について，n を $i-ne \geq e/(p-1)$ を満たす最大の整数とし，s を $i-ne$ の p 冪次数とする．すると

$$\Omega_F^{q-1}/B_{s+n}^{q-1} \cong \mathrm{gr}^i K_q^M(K)$$
$$x\frac{dy_1}{y_1} \wedge \cdots \wedge \frac{dy_{q-1}}{y_{q-1}} \mapsto \{1+\pi^i\tilde{x}, \tilde{y}_1, \ldots, \tilde{y}_{q-1}\}$$

となる．ただし π は K の素元で $\pi^{e-1}d\pi = 0$ なるもの，$x, y_1, \ldots, y_{q-1}$ は F の元，$\tilde{x}, \tilde{y}_1, \ldots, \tilde{y}_{q-1}$ をそれらの $\mathcal{O}_K$ への持ち上げとした．

系 1.2. $U^i(K_q^M(K)/p^m)$ を $U^iK_q^M(K)$ の $K_q^M(K)/p^mK_q^M(K)$ への像とし，

$$\mathrm{gr}^i(K_q^M(K)/p^m) = U^i(K_q^M(K)/p^m)/U^{i+1}(K_q^M(K)/p^m)$$

とする．すると

$$\mathrm{gr}^i(K_q^M(K)/p^m) \cong \begin{cases} \Omega_F^{q-1}/B_{s+n}^{q-1} & (m > s+n) \\ \Omega_F^{q-1}/Z_{m-n}^{q-1} & (m \leq s+n, i-en \neq \frac{e}{p-1}) \\ \Omega_F^{q-1}/(1+aC)Z_{m-n+1}^{q-1} & (m \leq s+n, i-en = \frac{e}{p-1}) \end{cases}$$

となる．ただし a は p/π^e の F への剰余類，C はカルチェ作用素とした．

注 1.3. $0 \leq i \leq ep/(p-1)$ ならば $\mathrm{gr}^i K_q^M(K)$ は [2] の中で決定されている．

以下，次の表示を使用する．アーベル群 M と正整数 n について，$M/p^n = M/p^nM$ とする．可換環 R について，$\Omega_R^1 = \Omega_{R/\mathbb{Z}}^1$ で R の $\mathbb{Z}$ 上の微分加群を，Ω_R^q でその q 回外積を表す．すべての複体は相対鎖複体とし，非負複体間の射 $f\colon C^{\cdot} \to D^{\cdot}$ について $[f\colon C^{\cdot} \to D^{\cdot}]$ を f の写像ファイバー複体とする．写像ファイバー複体とは，写像柱複体の次数 1 シフトのことである．

2. 定理の計算方法

K を混標数完備離散付値体とする．$A = \mathcal{O}_K$ とし，A_0 を A の部分環で，A_0 は A の付値の制限によって絶対不分岐完備離散付値体になり，かつ剰余体が F であるものとする．π を K の素元とし，それを固定する．$B = A_0[[X]]$ とする．D と $J \subset D$ をそれぞれ $B \to A; X \mapsto \pi$ に関する divided power 包絡および divided power イデアル，$I \subset D$ を $B \to A/p; X \mapsto 0$ に関する divided power イデアル，$J^{[r]}$ と $I^{[r]}$ をそれぞれ J と I の r 次 divided power 部分群とする．詳細は [1]．0 または負なる r については $I^{[r]} = J^{[r]} = D$ とする．複体 $\mathbb{J}^{[r]}$ および $\mathbb{I}^{[r]}$ をそれぞれ

$$\mathbb{J}^{[r]} = [J^{[r]} \xrightarrow{d} J^{[r-1]} \underset{B}{\otimes} \hat{\Omega}_B^1 \xrightarrow{d} J^{[r-2]} \underset{B}{\otimes} \hat{\Omega}_B^2 \longrightarrow \cdots]$$
$$\mathbb{I}^{[r]} = [I^{[r]} \xrightarrow{d} I^{[r-1]} \underset{B}{\otimes} \hat{\Omega}_B^1 \xrightarrow{d} I^{[r-2]} \underset{B}{\otimes} \hat{\Omega}_B^2 \longrightarrow \cdots]$$

で定義する．ここで $\hat{\Omega}_B^q$ は Ω_B^q の p 進完備化とした．$\mathbb{D} = \mathbb{I}^{[0]} = \mathbb{J}^{[0]}$ とする．$r < p$ の時に，複体 $\mathcal{S}(A,B)(r)$ および $\mathcal{S}'(A,B)(r)$ をそれぞれ

$$\mathcal{S}(A,B)(r) = [\mathbb{J}^{[r]} \xrightarrow{1-f_r} \mathbb{D}],$$
$$\mathcal{S}'(A,B)(r) = [\mathbb{I}^{[r]} \xrightarrow{1-f_r} \mathbb{D}]$$

で定義する. ただし $f_r = f/p^r$, f は A_0 のフロベニウス写像を $f(X) = X^p$ で拡張したものとした. $\mathcal{S}(A,B)(r)$(または $\mathcal{S}'(A,B)(r)$) は A(または A/p) の B に関するサントミック複体と呼ばれる ([4] 参照).

注 2.1. この写像 f_r は, 複体のそれぞれの項に対して

$$f_r = f_s \otimes f_{r-s} \colon J^{[s]} \otimes \hat{\Omega}_B^{r-s} \longrightarrow D \otimes \hat{\Omega}_B^{r-s}$$
$$(\text{ または } f_r = f_s \otimes f_{r-s} \colon I^{[s]} \otimes \hat{\Omega}_B^{r-s} \longrightarrow D \otimes \hat{\Omega}_B^{r-s}\ )$$

で作用するが, これは $s \geq p$ では定義できない. そこで

$$\mathbb{S}_r = [(\mathbb{J}^{[r]})^{\geq r-2} \xrightarrow{1-f_r} \mathbb{D}^{\geq r-2}],$$
$$\mathbb{S}'_r = [(\mathbb{I}^{[r]})^{\geq r-2} \xrightarrow{1-f_r} \mathbb{D}^{\geq r-2}]$$

と定義して以下この複体をサントミック複体の変わりに使用する.

これについて次の定理がある.

定理 2.2 (栗原 [5]). $H^r(\mathbb{S}_r)$ は $U^1K_r^M(K)\hat{}$ を部分群として含む. ここで $K_r^M(K)\hat{}$ は $K_r^M(K)$ の p 進完備化, $U^1K_r^M(K)\hat{}$ は $U^1K_r^M(K)$ の $K_r^M(K)\hat{}$ への像の閉包とした.

上記の複体間には次なる完全列がある.

$$0 \to \begin{bmatrix} (\mathbb{J}^{[r]})^{\geq r-2} \\ \downarrow 1-f_r \\ \mathbb{D}^{\geq r-2} \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} (\mathbb{I}^{[r]})^{\geq r-2} \\ \downarrow 1-f_r \\ \mathbb{D}^{\geq r-2} \end{bmatrix} \to (\mathbb{I}^{[r]})^{\geq r-2}/(\mathbb{J}^{[r]})^{\geq r-2} \to 0.$$

左の複体は $\mathbb{S}_r$ であり, 中の複体は $\mathbb{S}'_r$ である. コホモロジーをとると次の完全列を得る.

$$H^{q-1}(\mathbb{S}'_q) \xrightarrow{\psi} H^{q-1}\left(\frac{(\mathbb{I}^{[q]})^{\geq r-2}}{(\mathbb{J}^{[q]})^{\geq r-2}}\right) \longrightarrow H^q(\mathbb{S}_q). \tag{1}$$

この中項について,

命題 2.3 ([8], Prop.2.4).

$$H^{q-1}\left(\frac{(\mathbb{I}^{[q]})^{\geq r-2}}{(\mathbb{J}^{[q]})^{\geq r-2}}\right) \cong \hat{\Omega}_A^{q-1}/pd\hat{\Omega}_A^{q-2}$$

となる.

この命題は複体を計算すればわかる. 実際, 左辺は定義によれば

$$\mathrm{Coker}\left(\frac{I^{[2]} \otimes \hat{\Omega}_B^{q-2}}{J^{[2]} \otimes \hat{\Omega}_B^{q-2}} \xrightarrow{d} \frac{I \otimes \hat{\Omega}_B^{q-1}}{J \otimes \hat{\Omega}_B^{q-1}}\right)$$

であるが, これは $I \otimes \hat{\Omega}_B^{q-1}/J \otimes \hat{\Omega}_B^{q-1} \cong pA \otimes_B^{q-1}$ より

$$\frac{pA \otimes \hat{\Omega}_B^{q-1}}{pd\mathcal{J} \otimes_B^{q-2} + p^2 d\hat{\Omega}_B^{q-2}} \overset{p^{-1}}{\cong} \frac{A \otimes \hat{\Omega}_B^{q-1}}{d\mathcal{J} \otimes_B^{q-2} + pd\hat{\Omega}_B^{q-2}} \cong \frac{\hat{\Omega}_A^{q-1}}{pd\hat{\Omega}_A^{q-2}}$$

である.

式 (1) について, 中項は $\hat{\Omega}_A^{q-1}/pd\hat{\Omega}_A^{q-2}$ であることがわかった. さらに, 中項から右項への写像を計算すると (2.2) を伝って $U^1K_r^M(K)\hat{}$ に入ることもわか

り，しかもその写像は K_q^M 指数写像（$\exp_q$ と書く）と一致する．ここで K_q^M 指数写像とは ([7] 参照),

$$\begin{aligned} \hat{\Omega}_A^{q-1}/pd\hat{\Omega}_A^{q-2} &\longrightarrow U^1K_q^M(K)\hat{} \\ a\frac{db_1}{b_1}\wedge\cdots\wedge\frac{db_{q-1}}{b_{q-1}} &\longmapsto \{\exp(pa), b_1, \ldots, b_{q-1}\} \end{aligned}$$

なるものである．exp は普通の指数写像

$$\exp(T) = \sum_{n\geq 0}\frac{T^m}{m!}$$

である．よって完全列

$$H^{q-1}(\mathbb{S}'_q) \xrightarrow{\psi} \hat{\Omega}_A^{q-1}/pd\hat{\Omega}_A^{q-2} \xrightarrow{\exp_p} U^1K_q^M(K)\hat{} \tag{2}$$

を得た．さらに，$\exp_p$ の像は $U^{e+1}K_q^M(K)\hat{}$ を含んでいることが $\exp_p$ の性質からわかり，一方 $\mathrm{gr}^i K_q^M(K)\hat{}$ は $0\leq i\leq ep/(p-1)$ については [2] で調べられているので，よってもし $\psi(H^{q-1}(\mathcal{S}'(A,B)(q)))$ が完全にわかればすべての $gr^nK_q^M(K)$ がわかることになる．

(2) について，$H^{q-1}(\mathbb{S}'_q)$ は計算できる．なぜなら $\mathbb{S}'_q$ は $B\to A/p$ に関するサントミック複体であり，これは A の絶対分岐指数によってのみ決まる群だからである．具体的には，各項に文字 X によるフィルター付けを行い，その部分商をすべて計算することによって $H^{q-1}(\mathbb{S}'_q)$ を得る．[8] では任意の絶対分岐指数の混標数完備離散付値体 K(ただし剰余体の標数は 2 でなく，剰余体の p 基底の数が有限の場合) についてこの群を決定したが ([8],Prop.2.6)，煩雑であるためここには記さない．$\hat{\Omega}_A^{q-1}/pd\hat{\Omega}_A^{q-2}$ については，A の分岐が A_0 上順分岐に限れば次の命題を得る．

命題 2.4 ([8],Prop.3.1). $\hat{\Omega}_A^{q-1}/pd\hat{\Omega}_A^{q-2}$ に，A の素元 π（但し $d\pi=0$ なるもの）でフィルター付けをした部分商は，$j\geq 0$ について

$$gr^j(\hat{\Omega}_A^{q-1}/pd\hat{\Omega}_A^{q-2}) \cong \begin{cases} \Omega_F^{q-1} & (j=0) \\ \Omega_F^{q-1}\oplus\Omega_F^{q-2} & (1\leq j<e) \\ \Omega_F^{q-1}/B_l^{q-1} & (e\leq j) \end{cases}$$

となる．但し e は A の絶対分岐指数，$l=[j/e]$ とした．

以上より，あとは ψ を詳しく調べることによってすべての $gr^nK_q^M(K)$ がわかり，主定理 (1.1) を得る．しかし ψ の計算は煩雑であるためここには記さない．

3. 類体論への応用

K を特に q 次元局所体とする．高次元局所類体論では K の最大アーベル拡大のガロア群と $K_q^M(K)$ はほぼ同型であった．特に L を K の n 次拡大とすると

$$\mathrm{Gal}(L/K)\cong K_q^M(K)/\mathrm{N}_{L/K}K_q^M(L)$$

である．ここで，L/K が次数 p^l の巡回拡大で，さらに誘導される剰余体の拡大が p^l 次純非分離拡大とする．（これを，ferociously ramified 拡大と言う．）この拡大に対して，$K_q^M(K)$ の元 $\{1+\pi^i, x_1, \ldots, x_{q-1}\}$ はすべて $\mathrm{N}_{L/K}K_q^M(L)$ に入ることがわかり (cf. [6])，よって主定理より $U^{e+1}K_q^M(K)\subset\mathrm{N}_{L/K}K_q^M(L)$

がわかる．さらに $U^1K_q^M(K)/U^{e+1}K_q^M(K)$ のうち $\{1+\pi^i, x_1, \ldots, x_{q-1}\}$ の形ではない元も，その位数は最大でも $ep/(p-1)$ を超えない．よって次の定理を得る．

定理 3.1 ([8],Theorem 9.1). *K を上記のものとする．L/K を次数 p^l の ferociously ramified 巡回拡大とすると，$p^l \leq ep/(p-1)$ である．*

REFERENCES

[1] BERTHELOT, P., AND OGUS, A. *Notes on crystalline cohomology.* Princeton University Press, Princeton, 1978.

[2] BLOCH, S., AND KATO, K. p-adic etale cohomology. *Publ. Math. IHES 63* (1986), 107–152.

[3] ILLUSIE, L. Complexe de De Rham-Witt et cohomologie cristalline. *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. 12* (1979), 501–661.

[4] KATO, K. On p-adic vanishing cycles (applications of ideas of Fontaine-Messing). In *Algebraic Geometry, Sendai, 1985*, vol. 10 of *Adv. Stud. in Pure Math.* 1987, pp. 207–251.

[5] KURIHARA, M. The Milnor K-groups of a local ring over a ring of the p-adic integers. preprint.

[6] KURIHARA, M. On two types of complete discrete valuation fields. *Compositio Math. 63* (1987), 237–257.

[7] KURIHARA, M. The exponential homomorphisms for the Milnor K-groups and an explicit reciprocity law. *J. Reine Angew. Math. 498* (1998), 201–221.

[8] NAKAMURA, J. On the milnor K-groups of complete discrete valuation fields. preprint.

[9] SERRE, J.-P. *Local Fields*, vol. 67 of *Grad. Texts. in Math.* Springer-Verlag, New York, 1979.