数理解析研究所講究録
1154巻 2000年 75-83

多変数の SIEGEL MODULAR FORM の LIFTING の構成について

池田　保 (京都大学大学院理学研究科)

§ Introduction

$$f(\tau)=\sum_{N>0}a(N)q^N\in S_{2k}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})),\qquad a(1)=1$$

を weight $2k$ の cusp form で Hecke 作用素の同時固有関数とする。$L(s,f)=\sum_N a(N)N^{-s}$ を $f(\tau)$ の L 関数とする。

以下では weight $2k$ を固定して、$\varepsilon=(-1)^k$ とおく。$N\in\mathbb{Q}_+^\times$ に対して、$\mathbb{Q}(\sqrt{\varepsilon N})/\mathbb{Q}$ の判別式の絶対値を $\mathfrak{d}_N$ で表わし、$\mathfrak{f}_N=\sqrt{N\mathfrak{d}_N^{-1}}$ とおく。また、$\mathbb{Q}(\sqrt{\varepsilon N})/\mathbb{Q}$ に対応する原始的な Dirichlet 指標を χ_N で表わす。N が自然数で $\varepsilon N\equiv 0,1 \mod 4$ ならば $\mathfrak{f}_N$ も自然数である。B が正定値半整数対称行列のとき、$D_B=\det(2B)$, $\mathfrak{d}_B=\mathfrak{d}_{D_B}$, $\mathfrak{f}_B=\mathfrak{f}_{D_B}$, $\chi_B=\chi_{D_B}$ とおく。

$f(\tau)$ の Satake parameter を $\{\alpha_p,\alpha_p^{-1}\}$ とする。α_p は

$$(1-p^{k-\frac{1}{2}}\alpha_pX)(1-p^{k-\frac{1}{2}}\alpha_p^{-1}X)=1-a(p)X+p^{2k-1}X^2$$

によって与えられる。志村対応によって f と対応する Kohnen subspace $S^+_{k+\frac{1}{2}}(\Gamma_0(4))$ に属する Hecke eigenform を

$$h(\tau)=\sum_{\substack{N>0\\(-1)^kN\equiv 0,1\ (4)}}c(N)q^N$$

とする。D が fundamental discriminant で $(-1)^kD>0$ のとき、

$$c(f^2|D|)=c(|D|)\sum_{d|f}\mu(d)\chi_{|D|}(d)d^{2k-1}a\left(\frac{f}{d}\right)$$

が成り立つ。

§ Siegel Series:

p を素数とする。

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

$\mathbb{Z}_p$ 上の $2n$ 次の non-degenerate half-integral symmetric matrix B に対して

$$D_B = \det(2B)$$

$$\delta(B) = \begin{cases} 2\left[\frac{\mathrm{ord}_p(D_B)+1}{2}\right], & p \neq 2 \\ 2\left[\frac{\mathrm{ord}_p(D_B)}{2}\right], & p = 2 \end{cases}$$

$$\xi(B) = \begin{cases} 1 & (-1)^n D_B \in (\mathbb{Q}_p^\times)^2, \\ -1, & [\mathbb{Q}_p(\sqrt{(-1)^n D_B}) : \mathbb{Q}_p] = 2, : \text{ unramified}, \\ 0, & [\mathbb{Q}_p(\sqrt{(-1)^n D_B}) : \mathbb{Q}_p] = 2, : \text{ ramified} \end{cases}$$

とおく。

$$b_p(B, s) = \sum_{R \in \mathcal{S}_{2n}(\mathbb{Q}_p)/\mathcal{S}_{2n}(\mathbb{Z}_p))} \psi(\mathrm{tr}(BR)) p^{-\mathrm{ord}_p(\mu(R))s}$$

を Siegel series という。ここで $\mathcal{S}_{2n}(\mathbb{Q}_p)$, $\mathcal{S}_{2n}(\mathbb{Z}_p)$ はそれぞれ $\mathbb{Q}_p$, $\mathbb{Z}_p$ 係数の対称行列の空間である。また、$\mu(R)$ は次のように定義される。(C, D) を symmetric coprime pair で $D^{-1}C = R$ なるものをとるとき、$\mu(R) = \det D$ で定義される。X の多項式 $\gamma_p(B; X)$ を

$$\gamma_p(B; X) = (1 - X)(1 - p^n \xi(B) X)^{-1} \prod_{i=1}^{n} (1 - p^{2i} X^2)$$

で定義する。このとき、X の多項式 $F(B; X)$ で $F(B; p^{-s}) = b_p(B, s)\gamma_p(B; p^{-s})^{-1}$ を満たすものが存在する。$F(B; X)$ は次のような関数等式を満たす。

$$F(B; p^{-2n+1} X^{-1}) = (p^{n+\frac{1}{2}} X)^{-\delta(B)+2-2\xi(B)^2} F(B; X)$$

$\tilde{F}_p(B; X) = X^{-\frac{\delta(B)}{2}+1-\xi(B)^2} F(B; X)$ とおく。このとき上の関数等式から、$\tilde{F}_p(B; X^{-1}) = \tilde{F}_p(B; X)$ が成り立つことがわかる。

§ Eisenstein 級数の Fourier 展開

Eisenstein 級数の Fourier 係数の計算を復習する。s を複素変数とする。

$$E_{2n,l}(Z, s) = \det \mathrm{Im}(Z)^{s-\frac{l}{2}} \sum_{\{C,D\}} \det(CZ + D)^{-l} |\det(CZ + D)|^{-2s+l}$$

を考える。$E_{2n,l}(Z, s)$ は次のように Fourier 展開される。

$$E_{2n,l}(X + \sqrt{-1}Y, s) = \sum_{B \in \mathcal{S}'_{2n}(\mathbb{Z})} c_{2n,l}(B; Y, s + l) \mathrm{e}(\tfrac{1}{2} BX)$$

ここで $\mathcal{S}'_{2n}(\mathbb{Z})$ は j 次の整係数 half-integral symmetric matrix の集合であり、B が非退化なら

$$c_{2n,l}(B; Y, s) = \Gamma_{2n,l}(B; Y, s) \prod_{p | D_B} F_p(B; p^{-2s})$$

$$\Gamma_{2n,l}(B;Y,s)=(\det Y)^{s-\frac{l}{2}}\frac{\Xi(Y,B;s+\frac{l}{2},s-\frac{l}{2})}{\zeta(2s)\prod_{i=1}^{n}\zeta(4s-2i)}L(\chi_B;2s-n)$$

$$\Xi(g,h;s,s')=\int_{S_{2n}(\mathbb{R})}\mathbf{e}(-hx)\det(x+\sqrt{-1}g)^{-s}\det(x-\sqrt{-1}g)^{-s'}\,dx$$

ここで

$$D_B=\det(2B)$$

$$\chi_B=\chi_{D_B}$$

l が十分大のとき、この式において $s=\frac{l}{2}$ とおけば正則な Eisenstein series の Fourier 展開をえる。B が正定値のとき、

$$\begin{aligned}\Xi(Y,B;l,0)=&\frac{(-1)^{nl}2^{-n(2n-1)}(2\pi)^{2nl}}{\Gamma_{2n}(l)}(\det(B))^{l-\frac{2n+1}{2}}\mathbf{e}(\sqrt{-1}BY)\\=&\frac{(-1)^{nl}2^{2n}\pi^{2nl}}{\Gamma_{2n}(l)}(\det B)^{l-\frac{2n+1}{2}}\mathbf{e}(\sqrt{-1}BY)\end{aligned}$$

$$\Gamma_{2n}(s)=\pi^{n(2n-1)/2}\prod_{i=0}^{2n-1}\Gamma(s-\frac{i}{2})$$

である。l が偶数ならば、

$$\Gamma_{2n}(l)=2^{n^2+n-2nl}\pi^{n^2}\prod_{i=1}^{n}(2l-2i)!$$

$$\zeta(l)=(-1)^{l/2}2^{-1}(2\pi)^{l}\frac{\zeta(1-l)}{(l-1)!}$$

$$\prod_{i=1}^{n}\zeta(2l-2i)=(-1)^{(2nl+n^2+n)/2}2^{-n}(2\pi)^{2nl-n(n+1)}\prod\frac{\zeta(1-2l+2i)}{(2l-2i-1)!}$$

$$L(\chi_B,l-n)=(-1)^{(l+n^2+n)/2}(2\pi)^{l-n-1}\pi\frac{\mathfrak{d}_B^{\frac{1}{2}+n-l}}{(l-n-1)!}L(\chi_B,1+n-l)$$

なので、$E_{2n,l}(Z)$ の B-th Fourier 係数は

$$\frac{2^n}{\zeta(1-l)\prod_{i=1}^{n}\zeta(1+2i-2l)}$$

と

$$L(\chi_B;1+n-l)\prod_{p|D_B}(p^{2l-2n-1})^{\frac{1}{2}\operatorname{ord}_p\mathfrak{f}_B}F_p(B;p^{-l})$$

の積に等しい。$l=k+n$ とおけば、$k\equiv n \bmod 2$ であり、この式は

$$L(\chi_B;1-k)\mathfrak{f}_B^{k-\frac{1}{2}}\prod_{p|D_B}\tilde{F}_p(B;p^{k-\frac{1}{2}})$$

となる。

§ Cohen の Eisenstein series

Cohen の関数 $H(k,N)$ は

$$H(k,N)=\begin{cases}\zeta(1-2k), & N=0,\\ 0, & N\not\equiv 0,1 \bmod 4,\\ L(\chi_N,1-k)\sum_{d|\mathfrak{f}_N}\mu(d)\chi_N(d)d^{k-1}\sigma_{2k-1}(\mathfrak{f}_N/d) & N>0, N\equiv 0,1 \bmod 4.\end{cases}$$

によって定義される。

Cohen の Eisenstein series $\mathcal{H}_{k+\frac{1}{2}}(\tau)$ を

$$\mathcal{H}_{k+\frac{1}{2}}(\tau)=\sum_{N=0}^{\infty}H(k,N)q^N$$

によって定義する。これは weight $k+\frac{1}{2}$ の modular form で Kohnen plus space $M^+_{k+\frac{1}{2}}(\Gamma_0(4))$ に属する。さらに、$\mathcal{H}_{k+\frac{1}{2}}(\tau)$ は志村対応により、一変数の Eisenstein 級数 $E_{2k}(\tau)$ と対応する。前節であらわれた因子 $L(\chi_B,1-k)$ は $\mathcal{H}_{k+\frac{1}{2}}(\tau)$ の $\mathfrak{d}_B$ 番目の Fourier 係数であると考えることができる。

§ 主定理 1

以下では自然数 k,n で $k\equiv n \bmod 2$ を満たすものを固定し、$\varepsilon=(-1)^k$ とおく。$N\in\mathbb{Q}_+^\times$ に対して、$\mathbb{Q}(\sqrt{\varepsilon N})/\mathbb{Q}$ の判別式の絶対値を $\mathfrak{d}_N$ で表わし、$\mathfrak{f}_N=\sqrt{N\mathfrak{d}_N^{-1}}$ とおく。また、$\mathbb{Q}(\sqrt{\varepsilon N})/\mathbb{Q}$ に対応する原始的な Dirichlet 指標を χ_N で表わす。B を rank $2n$ の正定値半整数対称行列とするとき、$(-1)^n\det(2B)\equiv 0,1 \mod 4$ である。このとき、$D_B=\det(2B)$, $\mathfrak{d}_B=\mathfrak{d}_{D_B}$, $\mathfrak{f}_B=\mathfrak{f}_{D_B}$, $\chi_B=\chi_{D_B}$ とおく。

定理 1 ：$n\equiv k \bmod 2$ のとき、$A(B)$ を

$$A(B)=c(\mathfrak{d}_B)\mathfrak{f}_B^{k-\frac{1}{2}}\prod_p\tilde{F}_p(B;\alpha_p)$$

によって定義すれば

$$F(Z)=\sum_{B>0}A(B)\mathbf{e}(BZ)$$

は $S_{k+n}(\mathrm{Sp}_n(\mathbb{Z}))$ に属する degree $2n$, weight $k+n$ の Siegel cusp form で Hecke 作用素の同時固有関数である。ここで正方行列 T に対して $\mathbf{e}(T) := \exp(2\pi\sqrt{-1}\,\mathrm{tr}(T))$ である。$F(Z)$ の standard L-function は

$$L(s,F) = \zeta(s)\prod_{i=1}^{2n} L(s+k+n-i,f)$$

である。したがって $F(Z)$ で生成される $\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{A})$ の保型表現は既約で、その有限成分は退化主系列表現

$$\mathrm{Ind}_{P_{2n}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{Q}_p)} |\det|^{s_p}$$

に同型である。

§ 主定理 2

$f(\tau) \in S_{2k}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}))$ を normalized cuspidal Hecke eigenform とする。r, n を自然数とし、 $n+r \equiv k \bmod 2$ と仮定する。定理 1 による $f(\tau)$ の $S_{k+n+r}(\mathrm{Sp}_{2n+2r}(\mathbb{Z}))$ への lift を $F(Z)$ とする。$g(Z) \in S_{k+n+r}(\mathrm{Sp}_r(\mathbb{Z}))$ を Hecke 作用素の同時固有関数とする。

$$\mathcal{F}_{f,g}(Z) = \int_{\mathrm{Sp}_r(\mathbb{Z})\backslash\mathfrak{h}_r} F\left(\begin{pmatrix} Z & \\ & Z' \end{pmatrix}\right)\overline{g(Z')}(\det \mathrm{Im}\, Z')^{k+n-1}dZ', \qquad Z \in \mathfrak{h}_{2n+r}$$

と定義する。$\mathcal{F}_{f,g} \in S_{k+n+r}(\mathrm{Sp}_{2n+r}(\mathbb{Z}))$ である。

定理 2： $\mathcal{F}_{f,g}(Z)$ が恒等的に 0 でないならば $\mathcal{F}_{f,g}(Z)$ は Hecke 作用素の同時固有関数であり、

$$L(s,\mathcal{F}_{f,g}) = L(s,g)\prod_{i=1}^{2n} L(s+k+n-i,f)$$

が成り立つ。ここで $L(s,\mathcal{F}_{f,g})$, $L(s,g)$ はそれぞれ $\mathcal{F}_{f,g}(Z)$, $g(Z)$ の standard L 関数である。

証明： $G_1 = \mathrm{Sp}_r$, $G_2 = \mathrm{Sp}_{2n+r}$, $H = \mathrm{Sp}_{2n+2r}$ とする。H の Siegel parabolic subgroup を P_H とおく。$G_1 \times G_2$ は埋め込み

$$\begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} A_2 & B_2 \\ C_2 & D_2 \end{pmatrix} \mapsto \left(\begin{array}{cc|cc} A_1 & & B_1 & \\ & A_2 & & B_2 \\ \hline C_1 & & D_1 & \\ & C_2 & & D_2 \end{array}\right)$$

によって H の部分群とみる。$F(Z)$ で生成される $H(\mathbb{A})$ の既約保型表現の p 成分は退化主系列表現

$$\mathrm{Ind}_{P_H(\mathbb{Q}_p)}^{H(\mathbb{Q}_p)}(\chi_p \circ \det)$$

である。ここで $\mathbb{Q}_p^\times$ の不分岐指標 χ_p は $\chi_p(p)=\alpha_p$ で定める。π_1 を $g(Z)$ で生成される $G_1(\mathbb{A})$ の既約 unitary 保型表現の p 成分とする。$\mathcal{F}_{f,g}(Z)$ で生成される $G_2(\mathbb{A})$ の保型表現は長さ有限で unitary であるから既約表現の有限個の直和である。π_2 を適当な既約成分の p 成分とする。π_1, π_2 は共に不分岐主系列表現である。

以下、簡単のためこの節では代数群等はすべて $\mathbb{Q}_p$ 上で考えることとし、記号から $\mathbb{Q}_p$ 等を省略する。このとき、

$$\mathcal{B}_{G_1\times G_2}(\mathrm{Ind}_{P_H}^H(\chi\circ\det)|_{G_1\times G_2}, \pi_1\otimes\pi_2)\neq(0)$$

である。ここで ρ_1, ρ_2 を $G_1\times G_2$ の表現とするとき、$\mathcal{B}_{G_1\times G_2}(\rho_1,\rho_2)$ は $\rho_1\times\rho_2$ 上の $G_1\times G_2$ 不変な bilinear form の空間である。さて、 両側剰余類 $P_H\backslash H/(G_1\times G_2)$ は $r+1$ 個の代表元 $\eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_r$ をもつ。ここで

$$\eta_i=\left(\begin{array}{cccc|cccc} & & & & & & -\mathbf{1}_i & \\ & \mathbf{1}_{r-i} & & & & & & \\ \mathbf{1}_i & & & & & & & \\ & & & \mathbf{1}_{2n+r-i} & & & & \\ \hline \mathbf{1}_i & & \mathbf{1}_i & & & & & \\ & & & & & \mathbf{1}_{r-i} & & \\ & & & & \mathbf{1}_i & & -\mathbf{1}_i & \\ & & & & & & & \mathbf{1}_{2n+r-i} \end{array}\right)$$

である。ここで block の大きさは縦横とも順に $i,\ r-i,\ i,\ 2n+r-i,\ i,\ r-i,\ i,\ 2n+r-i$ である。

とのとき、$Q_i=(\eta_i^{-1}P_H\eta_i)\cap(G_1\times G_2)$ は

$$\left\{\left(\begin{array}{cc|cc}\alpha & 0 & \beta & * \\ * & A & * & * \\ \hline \gamma & 0 & \delta & * \\ 0 & 0 & 0 & D\end{array}\right)\times\left(\begin{array}{cc|cc}\alpha & 0 & -\beta & * \\ * & A' & * & * \\ \hline -\gamma & 0 & \delta & * \\ 0 & 0 & 0 & D'\end{array}\right)\;\middle|\; \begin{array}{c}\begin{pmatrix}\alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{pmatrix}\in\mathrm{Sp}_i, \\ A={}^tD^{-1}\in\mathrm{GL}_{r-i}, \\ A'={}^tD'^{-1}\in\mathrm{GL}_{2n+r-i},\end{array}\right\}$$

である。Parabolic subgroup $P_i^{(1)}\subset G_1$, $P_i^{(2)}\subset G_2$ を

$$P_i^{(1)}=\left\{\left(\begin{array}{cc|cc}\alpha & 0 & \beta & * \\ * & A & * & * \\ \hline \gamma & 0 & \delta & * \\ 0 & 0 & 0 & D\end{array}\right)\;\middle|\;\begin{pmatrix}\alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{pmatrix}\in\mathrm{Sp}_i,\ A={}^tD^{-1}\in\mathrm{GL}_{r-i},\right\}$$

$$P_i^{(2)}=\left\{\left(\begin{array}{cc|cc}\alpha & 0 & \beta & * \\ * & A' & * & * \\ \hline \gamma & 0 & \delta & * \\ 0 & 0 & 0 & D'\end{array}\right)\;\middle|\;\begin{pmatrix}\alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{pmatrix}\in\mathrm{Sp}_i,\ A'={}^tD'^{-1}\in\mathrm{GL}_{2n+r-i},\right\}$$

で定義する。X_i $(i=0,\ldots,r+1)$ を $\mathrm{Ind}_{P_H}^H(\chi\circ\det)$ の部分空間で support が

$$\bigcup_{j=i}^{r}P_H\,\eta_i(G_1\times G_2)$$

に含まれるような元全体からなるものとする。ただし $X_{r+1} = (0)$ とする。このとき、X_0, $\dots$, X_r は $G_1 \times G_2$ の作用で不変な部分空間で

$$\mathrm{Ind}_{P_H}^{H}(\chi \circ \det) = X_0 \supset X_1 \cdots \supset X_r \supset X_{r+1} = (0),$$

であり、

$$X_i/X_{i+1} \simeq \mathrm{Ind}_{Q_i}^{G_1 \times G_2}(\chi \circ \det \cdot \delta_{P_H}^{\frac{1}{2}})^{\eta_i} \delta_{Q_i}^{-\frac{1}{2}}$$

に等しい。ここで $(\chi \circ \det \cdot \delta_{P_H}^{\frac{1}{2}})^{\eta_i}(q) = (\chi \circ \det \cdot \delta_{P_H}^{\frac{1}{2}})(\eta_i q \eta_i)$ であり、δ_{P_H}, δ_{Q_i} はそれぞれ P_H, Q_i の modulus character である。さて、Jacquet module $r_{P_i^{(1)}}^{G_1}\pi_1$, $r_{P_i^{(2)}}^{G_2}\pi_2$ はそれぞれ $\mathrm{Sp}_i \times \mathrm{GL}_{r-i}$, $\mathrm{Sp}_i \times \mathrm{GL}_{2n+r-i}$ の表現である。上の考察から、適当な i $(0 \le i \le r)$ に対して、Jacquet module $r_{P_i^{(1)}}^{G_1}\pi_1$, $r_{P_i^{(2)}}^{G_2}\pi_2$ はそれぞれ

$$\rho^{(1)} \boxtimes (\chi^{-1} \circ \det)|\det|^{-n-\frac{r-i}{2}}$$

$$\rho^{(2)} \boxtimes (\chi^{-1} \circ \det)|\det|^{-\frac{r-i}{2}},$$

という形の subquotient で $\rho^{(1)} \simeq \rho^{(2)}$ となるものを含んでいなくてはならない。π_1 の Satake parameter を $\{\beta_1^{\pm 1}, \dots, \beta_r^{\pm 1}\}$ とすれば、$r_{P_i^{(1)}}^{G_1}\pi_1$ が $\rho^{(1)} \boxtimes (\chi^{-1} \circ \det)|\det|^{-n-\frac{r-i}{2}}$ という形になるのは $\{\beta_1^{\pm 1}, \dots, \beta_r^{\pm 1}\}$ の中に $\alpha_p^{-1}p^{-n-\frac{1}{2}}$, $\dots$, $\alpha_p^{-1}p^{-n-r+i+\frac{1}{2}}$ に等しいものがあるときに限る。それを β_{i+1}, $\dots$, β_r としてよい。すると、π_2 の Satake parameter は $\{\beta_1^{\pm 1}, \dots, \beta_r^{\pm 1}\}$ から $\{\beta_{i+1}^{\pm 1}, \dots, \beta_r^{\pm 1}\}$ を取り除き、かわりに $\alpha_p^{-1}p^{n-\frac{1}{2}}$, $\dots$, $\alpha_p^{-1}p^{-n-r+i+\frac{1}{2}}$ とその逆数を付け加えたものである。いずれにしても i や $\beta_{i+1}, \dots, \beta_r$ の取り方に関係なく、π_2 の Satake parameter として可能なものは $\{\beta_1^{\pm 1}, \dots, \beta_r^{\pm 1}, \alpha_p^{\pm 1}p^{\frac{n-1}{2}}, \dots, \alpha_p^{\pm 1}p^{-\frac{n-1}{2}}\}$ であることがわかる。とくに、$\mathcal{F}_{f,g}(Z)$ で生成される $G_2(\mathbb{A})$ の表現の p 成分は isotypic であることがわかる。しかるにこれは class 1 vector $\mathcal{F}_{f,g}$ で生成されているので既約である。従って $\mathcal{F}_{f,g}$ は Hecke 作用素の同時固有関数であり、その standard L 関数は

$$L(s, \mathcal{F}_{f,g}) = L(s,g)\prod_{i=1}^{2n} L(s+k+n-i, f)$$

で与えられる。

定理 2 において $\mathcal{F}_{f,g}$ が恒等的には 0 でない実例をあげる。$2k = 20$, $n = r = 1$ の場合を考える。$f(\tau) = \sum_{N=1}^{\infty} b(N)q^N \in S_{20}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}))$ を weight 20 の normalized Hecke eigenform とする。Fourier 係数 $b(N)$ の値をいくつかあげる。

p	$b(p)$
2	456
3	50652
5	−2377410

p	$b(p)$
7	−16917544
11	−16212108
13	50421615062

p	$b(p)$
17	225070099506
19	−1710278572660
23	14036534788872
29	1137835269510

weight 21/2 の modular form $\delta_{21}(\tau)$ を次のように定義する。

$$\delta_{21}(\tau) = \frac{1}{16\pi\sqrt{-1}}(4E_8(4\tau)\theta'(\tau) - E_8'(4\tau)\theta(\tau)) = \sum_{n=1}^{\infty} c(n)q^n,$$

$$E_8(\tau) = 1 + 480\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_7(n)q^n, \quad \theta(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2}$$

とおく。$\delta_{21}(\tau)$ は志村対応によって $f(\tau)$ と対応する Kohnen plus subspace $S^+_{21/2}(\Gamma_0(4))$ の元である。fundamental discriminant D に対して $c(D)$ の値をいくつか示す。

D	$c(D)$
1	1
5	−360
8	−13680
12	−177120
13	266760

D	$c(D)$
17	526320
21	−710640
24	2475360
28	8830080
29	−5835240

Miyawaki [13] によれば $\dim S_{12}(\mathrm{Sp}_3(\mathbb{Z})) = 1$ であり、$F^{(3)}(Z) \in S_{12}(\mathrm{Sp}_3(\mathbb{Z}))$ とすればその

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & -1 & \\ -1 & 2 & -1 \\ & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

番目の Fourier 係数は 0 でない。この Fourier 係数が 1 となるよう $F^{(3)}(Z)$ を正規化しておく。

$F(Z)$ を定理 1 による $f(\tau)$ の $S_{12}(\mathrm{Sp}_4(\mathbb{Z}))$ への lift とする。

正定値半整数対称行列 B が

$$2B = \begin{pmatrix} 2 & \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \lambda_1 & 2 & -1 & \\ \lambda_2 & -1 & 2 & -1 \\ \lambda_3 & & -1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{Z}^3$$

という形のときに $F(Z)$ の B 番目の Fourier 係数 $A(B)$ を計算する。$D_B = \det(2B)$ の取りうる値は 4, 5, 8 の 3 通りでそうなるような λ の個数はそれぞれ 6, 8, 1 である。

$\det B = 4$ となるのは $\lambda = \pm(0,1,0), \pm(1,0,-1), \pm(1,-1,1)$ の場合でそのとき、

$$\begin{aligned} F_2(B;X) =& 1 - (2^2+2^3)X + 2^5X^2, \\ A(B) =& c(1)(b(2) - 2^9 - 2^{10}) = -1080 \end{aligned}$$

である。

$\det B = 5$ となるのは $\lambda = \pm(1,0,0), \pm(1,-1,0), \pm(0,0,1), \pm(0,1,-1)$ の場合でそのとき、$A(B) = c(5) = 360$ である。
$\det B = 8$ となるのは $\lambda = (0,0,0)$ の場合でそのとき、$A(B) = c(8) = -13680$ である。

$\dim S_{12}(\mathrm{Sp}_1(\mathbb{Z})) = \dim S_{12}(\mathrm{Sp}_3(\mathbb{Z})) = 1$ であるので、$F(Z)$ の $\mathfrak{h}_1 \times \mathfrak{h}_3$ への制限は $\Delta(\tau) \times F^{(3)}(Z)$ の

$$-1080 \times 6 + 360 \times 8 - 13680 = -17280$$

倍である。

したがって $g(\tau) = \Delta(\tau)$ とおけば

$$\mathcal{F}_{f,g}(Z) = -17280 \langle \Delta, \Delta \rangle F^{(3)}(Z) \in S_{12}(\mathrm{Sp}_3(\mathbb{Z}))$$

は恒等的には 0 でない。 したがって定理 2 により

$$L(s, F^{(3)}) = L(s+10, f)L(s+9, f)L(s, \Delta, \mathrm{st})$$

である。(ただし $\beta_p^{\pm 1}$ を $\Delta(\tau)$ の Satake parameter とするとき、

$$L(s, \Delta, \mathrm{st}) = \prod_p [(1-\beta_p^2 p^{-s})(1-p^{-s})(1-\beta_p^{-2} p^{-s})]^{-1}$$

である) これは Miyawaki [13] において数値計算によって予想されていたものと一致する。

References

1. J. Arthur, *Unipotent automorphic representations: conjectures*, Asterisque **171-172** (1989), 13–71.
2. R. E. Borcherds, E. Freitag, and R. Weissauer, *A Siegel cusp form of degree 12 and weight 12*, J. Reine Angew. Math. **494** (1998), 141–153.
3. S. Breulman and M. Kuss, *On a conjecture of Duke-Imamoglu*, preprint.
4. H. Cohen, *Sums involving the values at negative integers of L-functions of quadratic characters*, Math. Ann. **217** (1975), 271–285.
5. J. H. Conway and N. J. A. Sloane, *Sphere packings, lattices and groups. Third edition. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften*, vol. 290., Springer-Verlag, New York, 1999.
6. M. Eichler and D. Zagier, *The theory of Jacobi forms. Progress in Mathematics*, vol. 55, Birkhäuser Boston, Inc., Boston, Mass., 1985.
7. E. Freitag, *Siegelsche Modulfunktionen*, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1983.
8. T. Ibukiyama, *Conjecture on the lifting of modular forms to Siegel modular forms*, informal note.
9. H. Katsurada, *An explicit formula for Siegel series*, Amer. J. Math. **121** (1999), 415–452.
10. Y. Kitaoka, *Dirichlet series in the theory of Siegel modular forms*, Nagoya Math. J. **95** (1984), 73–84.
11. W. Kohnen, *Modular forms of half-integral weight on* $\Gamma_0(4)$, Math. Ann. **248** (1980), 249–266.
12. W. Kohnen and D. Zagier, *Values of L-series of modular forms at the center of the critical strip*, Invent. Math. **64** (1981), 175–198.
13. I. Miyawaki, *Numerical examples of Siegel cusp forms of degree* 3 *and their zeta functions*, Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ. **46** (1992), 307–309.
14. G. Shimura, *Euler products and Eisenstein series. CBMS Regional Conference Series in Mathematics*, vol. 93, the American Mathematical Society, Providence, RI, 1997.
15. G. Shimura, *Euler products and Fourier coefficients of automorphic forms on symplectic groups*, Invent. Math. **116** (1994), 531–576.
16. G. Shimura, *Introduction to the arithmetic theory of automorphic functions*, Publications of the Mathematical Society of Japan, 11, 1974.
17. G. Shimura, *On Eisenstein series*, Duke Math. J. **50** (1983), 417–476.
18. G. Shimura, *On modular forms of half integral weight*, Ann. of Math. **97** (1973), 440–481.
19. D. Zagier, *Sur la conjecture de Saito-Kurokawa (d'aprés H. Maass)*, Seminar on Number Theory 1979–80, Paris, Progr. Math., 12,, Birkhäuser, Boston, Mass., 1981, pp. 371–394.