数理解析研究所講究録
1155巻 2000年 168-183

C^*力学系に於ける複素解析の応用

境正一郎 (Shôichirô Sakai)

1. 序文. C^*力学系に於いては, 平衡状態, 基底状態, 有界摂動等の基本概念の記述並びに推論に複素解析が重要な役割を担っている。この小文で, いくつかの例をあげ, 理論のさらなる発展のため, 複素解析の重要性を示したい。

2. 準備. C^*代数に於ける微分論の主要な目的の1つは量子統計力学をC^*代数の枠組の中で展開することである。実際, 量子格子系の理論に於ける力学系の構成, 平衡状態, 基底状態, 有界摂動, 相転移, 対称性の破れ等重要な物理的概念はUHF代数(uniformly hyperfinite C^*代数)の正規微分論に上首尾に一

般化され，UHF代数の微分論を極めて豊かな研究分野にしている。殊に，相転移の理論は物理学，数学にとどまらず，将来，自然科学，社会科学等の諸分野に応用される重要な理論と思われるので，UHF代数の力学系への一般化は意義深い。

この節では，読者に問題意識を共有していただくため，UHF代数の微分論について簡単に触れる。詳細は拙著[1]を参照されたい。

C^*-代数$\mathfrak{A}$がUHF代数であるとは，$\mathfrak{A}$が有限次元全複素行列の$*$-代数の増加列$\{\mathfrak{A}_n\}$を含んでいて，次の条件をみたすことである：
(i) $1 \in \mathfrak{A}_1 \subset \mathfrak{A}_2 \subset \cdots \subset \mathfrak{A}_n \subset \cdots$；(ii) $\bigcup_{n=1}^{\infty}\mathfrak{A}_n$は$\mathfrak{A}$で稠密である。

次に，$\mathcal{D}(\delta)=\bigcup_{n=1}^{\infty}\mathfrak{A}_n$なる定義域をもった$*$-微分$\delta$をUHF代数$\mathfrak{A}$の正規微分という（即ち，$\delta$は$\mathcal{D}(\delta)$から$\mathfrak{A}$の中への線形作用素で，$\delta(ab)=\delta(a)b+a\delta(b)$，$\delta(a^*)=\delta(a)^*$ $(a, b \in \mathfrak{A})$）。正規微分の研究は一般な量子格子系の研究を含む。

$\{e^n_{ij} \mid i,j=1,2,\cdots,m_n\}$ を $\mathfrak{A}_n$ の行列単位とする。$i h_n = \sum_{i=1}^{m_n} \delta(e^n_{i1}) e^n_{1i}$ とおくと，$h_n^* = h_n\ (\in \mathfrak{A})$，$\delta(a) = i[h_n, a]\ (a \in \mathfrak{A}_n)\ (n=1,2,\cdots)$。よって正規微分は近似的に内部的であり $\delta(a) = \lim_n \delta_{ih_n}(a)$ $(a \in \mathcal{D}(\delta))$，ここで $\delta_{ih_n}(a) = i[h_n, a]\ (a \in \mathfrak{A})$。

正規微分 δ は $\|(1\pm\delta)(a)\| \geqq \|a\|\ (a \in \mathcal{D}(\delta))$ である。従って，δ は閉化可能である。さらに，$(1\pm\delta)\mathcal{D}(\delta)$ が $\mathfrak{A}$ で稠密ならば $(1\pm\bar\delta)\mathcal{D}(\bar\delta) = \mathfrak{A}$，$\|(1\pm\delta)^{-1}\| \leqq 1$，$(1\pm\bar\delta)^{-1}\mathfrak{A} = \mathcal{D}(\bar\delta)$（$\bar\delta$ は δ の閉包，$\mathcal{D}(\bar\delta)$ は $\bar\delta$ の定義域）。Hille-Yosida の理論[2]により δ は前生成作用素である。さらに，

$$\|(1\pm\delta_{ih_n})^{-1}(1\pm\delta)a - (1\pm\bar\delta)^{-1}(1\pm\delta)a\|$$
$$= \|(1\pm\delta_{ih_n})^{-1}\{(1\pm\delta)a - (1\pm\delta_{ih_n})a\}\| \leqq \|\delta(a) - \delta_{ih_n}(a)\| \to 0$$
$$(a \in \mathcal{D}(\delta)).$$

$\|(1\pm\delta_{ih_n})^{-1}\| \leqq 1$ であるから，$\{(1\pm\delta_{ih_n})^{-1}\}$ は強位相に関して，$(1\pm\bar\delta)^{-1}$ に収束する。従って，Trotter-Kato の定理（cf.[3]）により

$$\|(\exp t\delta_{ih_n})(a) - (\exp t\bar\delta)(a)\| \to 0 \quad (a \in \mathfrak{A}).$$

また，$t \mapsto \exp t\delta_{ih_n}$ は一様位相に関して連続な $\mathfrak{A}$ の内部 *-自己同型の1パラメータ群である。

強連続な$*$-自己同型の1パラメータ群 $t \mapsto \exp t\delta$ は量子格子系では時間発展である。

上に考察した性質を一般化するため次の定義をする。

2.1. 定義. C^*-力学系とは, C^*代数 $\mathfrak{A}$ と $\mathfrak{A}$ 上の$*$-自己同型の強連続な1パラメータ群 $\alpha : t \mapsto \alpha_t$ $(t \in \mathbb{R})$ からなる系である。

2.2. 定義. C^*-力学系 $\{\mathfrak{A}, \alpha\}$ が近似的に内部的であるとは, $\mathfrak{A}$ の一様連続な内部$*$-自己同型の1パラメータ群からなるC^*-力学系の列 $[\{\mathfrak{A}, \alpha_n\}]$ が存在して, $\|\alpha_{n,t}(a) - \alpha_t(a)\| \to 0$ $(a \in \mathfrak{A})$, 即ち, $\alpha_{n,t} = \exp t\delta_{ih_n}$ $(h_n^* = h_n \in \mathfrak{A})$, $\alpha_t = \exp t\delta$ とおくと, $\|(\exp t\delta_{ih_n})(a) - (\exp t\delta)(a)\| \to 0$ $(a \in \mathfrak{A})$。これを $\alpha = \text{strong} \lim \alpha_n$ 又は $\alpha_t = \text{strong} \lim \alpha_{n,t}$ とかく.

格子系の中で Ising 模型は古典格子系, Heienberg 模型は量子格子系である。正規微分の中で古典系を一般化したものが可換正規微分である. これを定義しよう.

2.3. 定義. δ を正規微分とし, $\delta(a) = i[h_n, a]$ $(a \in \mathfrak{A}_n;\ n=1,2,\cdots)$ とする。δ が可換であるとは,

自己随伴元の列 $\{h_n\}$ を $h_n h_m = h_m h_n$ $(m, n = 1, 2, \cdots)$ とするようにとれることである。

可換正規微分は次のように一般的な生成定理が成立する。

2.4. 定理. δ を可換正規微分とする。$\delta(a) = i[h_n, a]$ $(a \in \mathfrak{A}_n$, $h_m h_n = h_n h_m$ $(m, n = 1, 2, \cdots)$; $n = 1, 2, \cdots)$ とする。$\mathfrak{A}_n$ と $h_1, h_2, \cdots, h_n$ で生成される $\mathfrak{A}$ の C^* 部分代数を $\mathfrak{B}_n$ とすると, $1 \in \mathfrak{B}_1 \subset \mathfrak{B}_2 \subset \cdots \subset \mathfrak{B}_n \subset \cdots$ となり, $\tilde{\delta}(b) = i[h_n, b]$ $(b \in \mathfrak{B}_n; n = 1, 2, \cdots)$ とおくと $\tilde{\delta}_1$ は well-defined で, δ を拡大した $*$-微分であり, $\tilde{\delta}$ は前生成作用素で, $(\exp t\bar{\tilde{\delta}})(b) = (\exp t\delta_{ih_n})(b)$ $(b \in \mathfrak{B}_n; n = 1, 2, \cdots)$ で $\exp t\bar{\tilde{\delta}} = \text{strong} \lim \exp t\delta_{ih_n}$ である。

定理 2.4 は古典格子系では, 正規微分が定義されるならば, 常に, 力学系を構成することができ, その構成方法は具体的であることを示している。従って, 可換正規微分に関するモデルの構築, 対応する力学系の構成, さらに, その力学系に対する基底状態, 平衡状態, そして相転移の有無等を検証することが

可能になる。実際，岸本[4]は，この方法とC^*代数のK-理論を使用して，逆温度がどんなに零に近くても相転移が起こる可換正規微分の例を構築している。これは，古典系の場合に，Lee-Yangの定理を使って証明されている，逆温度が充分零に近ければ相転移が起こらないという，よく知られた定理とは対照的な定理であり，可換正規微分が広範囲に渉って相転移のモデルを提供する可能性を示している。

UHF代数で一般な正規微分を構築するには，まず，$\{\mathfrak{A}_n\}$を有限次元全複素行列*-代数の増加列で，$1\in\mathfrak{A}_1\subset\mathfrak{A}_2\subset\cdots\subset\mathfrak{A}_n\subset\cdots$で，$\bigcup_{n=1}^{\infty}\mathfrak{A}_n$は$\mathfrak{A}$で稠密なるものをとり，$\mathfrak{A}$の自己随伴元の列$\{h_n\}$を$[h_{n+1}-h_n, a]=0$ $(a\in\mathfrak{A}_n;\ n=1,2,\cdots)$なるようにとる。このとき，$a\in\bigcup_{n=1}^{\infty}\mathfrak{A}_n$に対し$a\in\mathfrak{A}_{n_0}$なる数$n_0$をとり，$\delta(a)=i[h_{n_0},a]$と定義すると，$\delta(a)$はwell-definedであり$\mathfrak{D}(\delta)=\bigcup_{n=1}^{\infty}\mathfrak{A}_n$なる正規微分である。この$\delta$が前生成作用素なるための必要十分条件は$(1\pm\delta)\mathfrak{D}(\delta)$が$\mathfrak{A}$で稠密であることである。然し，この条件を具体

的な模デルで調べることは難しい。一方，$\mathfrak{A}$の適当な自己随伴元hをとると$(\delta+\delta_{ih})\mathcal{D}(\delta)\subset\mathcal{D}(\delta)$とできる（[1] Prop.4.5.5）。有界摂動は前生成作用素であること，或は，前生成作用素への拡大の可能性を不変に保つから，$\delta+\delta_{ih}$ をδと書きかえると$\delta(\mathcal{D}(\delta))\subset\mathcal{D}(\delta)$。このとき，$\delta^n$が$\mathcal{D}(\delta)$上で定義できる。もし，$a\in\mathcal{D}(\delta)$に対し，$r_a>0$が存在して，$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\|\delta^n(a)\|}{n!}r_a^n<+\infty$ ならばaは解析的であるという。このとき，Nelsonの定理により，$\mathcal{D}(\delta)$のすべての元が解析的であるならば，δは前生成作用素である。従って，$\alpha_t=\exp t\bar{\delta}$とすると，$\{\mathfrak{A},\alpha\}$は$C^*$力学系であり$\alpha_t=\text{strong}\lim\delta_{ih_n}$である。

さて，逆に，UHF代数$\mathfrak{A}$の任意のC^*力学系$\{\mathfrak{A},\alpha\}$を考えよう。このとき，$\alpha_t=\exp t\delta$ここで，δは内部微分である。$\mathcal{D}(\delta)$をδの定義域とする。$a\in\bigcap_{n=1}^{\infty}\mathcal{D}(\delta^n)$が解析的であるとは$r_a>0$が存在して，$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\|\delta^n(a)\|}{n!}r_a^n<+\infty$.

このとき，次の定理が成立する。

2.5. 定理．$\{\mathfrak{A},\alpha\}$をUHF代数$\mathfrak{A}$をも

ったC^*力学系とし，$\alpha_t = \exp t\delta$ とする。このとき，有限次元全複素行列$*$-代数の増加列$\{\mathfrak{A}_n\}$が存在して，$1 \in \mathfrak{A}_1 \subset \mathfrak{A}_2 \subset \cdots \subset \mathfrak{A}_n \subset \cdots \subset A(\delta) \subset \mathcal{D}(\delta)$で，$\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathfrak{A}_n$ は $\mathfrak{A}$ で稠密である（ここで $A(\delta)$ は δ に関して解析的な $\mathfrak{A}$ の元全体）.

注意．この定理は，δ に対して，正規微分 δ_1 が存在して $\delta_1 \subset \delta$ とできることを意味している。即ち，UHF代数の任意の生成作用素であるような$*$-微分は正規微分の拡大であることを意味している。

次の問題はC^*代数の非有界微分論の創世期以来の未解決問題であったが最近，岸本[5]によって否定的に解決された．

核問題． $\{\mathfrak{A}, \exp t\delta \ (t \in \mathbb{R})\}$をUHF代数をもった$C^*$力学系．このとき定理2.5に於ける δ_1 を $(1-\delta_1)\mathcal{D}(\delta_1)$ が $\mathfrak{A}$ で稠密になるごとく選べるか？

もし，$(1-\delta_1)\mathcal{D}(\delta_1)$ が $\mathfrak{A}$ で稠密ならば，$\bar{\delta}_1 = \delta$。従って，C^*力学系$\{\mathfrak{A}, \alpha\}$は近似的に内部的である。即ち，核問題が肯定的である

$\{\mathfrak{A}, \alpha\}$ は近似的に内部的である。

次の重要な定理が成立する

2.6. 定理（Powers－境）。UHF代数 $\mathfrak{A}$ をもった C^*力学系 $\{\mathfrak{A}, \alpha\}$ に於いて，もし $\{\mathfrak{A}, \alpha\}$ が近似的に内部的であるならば，すべての逆温度 $\beta\,(\in \mathbb{R})$ に対し，$\{\mathfrak{A}, \alpha\}$ は平衡状態（KMS状態）φ_β が存在し，基底状態も存在する。

さて，量子格子系については，もし，その全ポテンシャルが力学系を定義するものであれば，その力学系は常に，近似的に内部的であることが示せる。従って，非有界微分論の創成期から次の予想が提起されたが未だに解決されていない。

Powers－境の予想．UHF代数 $\mathfrak{A}$ をもったすべての C^*力学系 $\{\mathfrak{A}, \alpha\}$ は近似的に内部的である。

最後に，相転移について述べる。

δ を正規微分，$\mathcal{D}(\delta) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathfrak{A}_n$ とする。τ を $\mathfrak{A}$ のトレース状態とし，P_n を $\mathfrak{A}$ から $\mathfrak{A}_n$ への conditional expectation（即ち，$\tau(aP_n(b)) = \tau(ab)\ (a \in \mathfrak{A}_n, b \in \mathfrak{A})$）とする。$\delta(a) = i[h_n, a]\ (a \in \mathfrak{A}_n;\ n = 1, 2, \cdots)$ と

する。$\|h_n - P_n(h_n)\| = O(1)$ のとき，δ は有界表面エネルギーをもつという。このとき，岸本[6]は有界表面エネルギーをもった正規微分は前生成作用素であることを示した。従って，C^*-力学系 $\{\mathfrak{A}, \exp t\bar{\delta}\ (t \in \mathbb{R})\}$ が存在する。かつ近似的に内部的である。定理2.6により，任意の $\beta\ (\in \mathbb{R})$ に対して，KMS状態 φ_β が存在する。

境[7]は可換正規微分が有界表面エネルギーをもっていれば C^*-力学系 $\{\mathfrak{A}, \exp t\bar{\delta}\ (t \in \mathbb{R})\}$ は，任意の逆温度 β に対して唯一つのKMS状態 φ_β をもつ，即ち，相転移が起こらないことを示した。荒木[8]は，この定理をすべての正規微分に拡張した。

3次元 Heisenberg ferromagnet 模型に於いて，適当な逆温度 $\beta\ (>0)$ で相転移が起るか否かは未解決の大問題である。

3．複素解析の応用．まず，C^*-力学系に於ける平衡状態として，Haag-Hugenholtz-Winnink によりKMS状態 (Kubo-Martin-Schwinger状態) が次のように定義された。$\beta \in \mathbb{R}$ に対し，$\mathfrak{A}$ の状態 φ_β (

即ち，φ_βは$\mathfrak{A}$上の線形汎関数で，$\varphi(a^*a) \geqq 0$ $(a \in \mathfrak{A})$，$\varphi(1) = 1$，ここで1は$\mathfrak{A}$の単位元（$\mathfrak{A}$は単位元をもつと仮定する））がC^*力学系$\{\mathfrak{A}, \alpha\}$の逆温度（温度の逆数）βでKMS状態であるとは，

任意の$a, b \in \mathfrak{A}$に対し複素平面の帯$S_\beta = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 \leqq \mathrm{Im}(z) \leqq \beta \ (\beta \geqq 0)$ 又は $\beta \leqq \mathrm{Im}(z) \leqq 0 \ (\beta < 0)\}$上で有界連続関数$F_{a,b}$が存在して，$F_{a,b}$は$S_\beta$の内部$S_\beta^\circ$で解析的で境界では，$F_{a,b}(t) = \varphi_\beta(a\alpha_t(b))$，$F_{a,b}(t+i\beta) = \varphi_\beta(\alpha_t(b)a)$ $(t \in \mathbb{R})$をみたすことである。

KMS条件より逆温度0ではφ_0はトレース状態（即ち，$\varphi_0(ab) = \varphi_0(ba)$ $(a, b \in \mathfrak{A})$）である。

逆に，$\mathfrak{A}$がトレース状態τをもつとすると，$\mathfrak{A}$の任意の自己随伴元h（即ち，$h^* = h$）に対し，$\alpha_t = \exp t\delta_{ih}$とすると，$\mathfrak{A}$の状態$\varphi_\beta(a) = \tau(ae^{-\beta h}) / \tau(e^{-\beta h})$ $(a \in \mathfrak{A})$はC^*力学系$\{\mathfrak{A}, \alpha\}$の逆温度βに於けるKMS状態である。とくに，$\mathfrak{A}$が唯1つのトレース状態をもっているとすると（例えば，$n \times n$ $(n < +\infty)$複素行列全体のつくる$*$-代数（即ち，有限次元複素全行列$*$-代数，UHF代数）$\{\mathfrak{A}, \alpha\}$はβに於いて唯1つのKMS状態

φ_βをもつことが複素解析関数の理論を使って示せる。従って有限系に於いてはKMS状態とGibbs状態が一致する，この事実がC^*力学系の平衡状態をKMS状態で定義することの妥当性を示している。KMS状態は種々の素晴しい性質をもっていることが，複素解析を使って証明できるが，ここではC^*代数の広い知識を必要としない一般的な結果をとりあげる。

3.1. 命題。φ_βをC^*力学系$\{\mathfrak{A}, \alpha\}$の逆温度βに於けるKMS状態とするとφ_βはα-不変である（即ち，$\varphi_\beta(\alpha_t(a)) = \varphi_\beta(a)$ $(t \in \mathbb{R},\ a \in \mathfrak{A})$）。

証明. 調和関数の理論より，2つの核関数$K_1(t, z)$, $K_2(t, z)$ $(z \in S_\beta,\ t \in \mathbb{R})$が存在して，

$$K_1 \geq 0,\ K_2 \geq 0,\quad \int_0^\infty K_1(t, z)\,dt + \int_0^\infty K_2(t, z)\,dt = 1$$

かつ

$$F_{a,b}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} K_1(t, z)\,\varphi_\beta(a\alpha_t(b))\,dt + \int_{-\infty}^{\infty} K_2(t, z)\,\varphi_\beta(\alpha_t(b)a)\,dt.$$

$a = 1$, $b = b^*$とすると$F_{a,b}$はS_β°上で実数値複素解析関数である。ゆえに，$F_{a,b}(z) =$定数（証明終）.

3.2. 命題. $\varphi_\beta(a^*a) = 0 \Rightarrow \varphi_\beta(aa^*) = 0$.

証明. Schwartzの不等式により，

$\varphi_\beta(a^*a)=0 \Rightarrow \varphi_\beta(a^*\alpha_t(a))=0$. $F_{a^*,a}(z)=\overline{F_{a^*,a}(\bar{z})}$ $(\bar{z}\in S_\beta^\circ)$ とすると，$F(t)\ (t\in\mathbb{R})$ は実数であるから，Schwartzの反射定理により，$F_{a^*,a}$ は $\{z\,|\,|\mathrm{Im}(z)|\leqq|\beta|\}$ 上で解析的である．よって $F_{a^*,a}(z)=0\ (z\in S_\beta)$ (証明終)

3.3 命題 (Powers-境). C^*力学系 $\{\mathfrak{A},\alpha\}$ が近似的に内部的で，$\mathfrak{A}$ がトレース状態をもっているならば，任意の実数 β に対し，$\{\mathfrak{A},\alpha\}$ は逆温度 β に於けるKMS状態をもっている。

証明．τ を $\mathfrak{A}$ のトレース状態，$\alpha_t=\mathrm{strong}\lim \exp t\delta_{ih_n}$ とする。このとき，$\varphi_{n,\beta}(a)=\dfrac{\tau(ae^{-\beta h_n})}{\tau(e^{-\beta h_n})}$ $(a\in\mathfrak{A})$ とすると，$\varphi_{n,\beta}$ は $\{\mathfrak{A},\exp t\delta_{ih_n}\ (t\in\mathbb{R})\}$ の β に於けるKMS状態である。$\mathfrak{S}_\mathfrak{A}$ を $\mathfrak{A}$ の状態全体の集合で位相 $\sigma(\mathfrak{S}_\mathfrak{A},\mathfrak{A})$ をもった状態空間とする。このとき $\mathfrak{S}_\mathfrak{A}$ はコンパクトHausdorff空間である。$\{\varphi_{n,\beta}\}$ の $\mathfrak{S}_\mathfrak{A}$ に於ける任意の集積点をとって φ_β とする，このとき，φ_β は $\{\mathfrak{A},\alpha\}$ の β に於けるKMS状態であることを示す．まず，

$$F_{n,a,b}(z)=\int_{-\infty}^{\infty}K_1(z,t)\,\varphi_{n,\beta}(a\alpha_{n,t}(b))\,dt+\int_{-\infty}^{\infty}K_2(z,t)\,\varphi_{n,\beta}(\alpha_{n,t}(b)a)\,dt$$

$(z\in S_\beta^\circ)$.

C を $\{a,\alpha_t(b),1\,|\,t\in\mathbb{R}\}$ によって生成され

る $\mathfrak{A}$ の C^* 部分代数とすると $\mathcal{C}$ は separable である。したがって，$\{n\}$ の部分列 (n_j) が存在して，

$\varphi_{n_j,\beta} \to \varphi_\beta$ on $\mathcal{C}$. そのとき，

$$|\varphi_{n_j,\beta}(a\alpha_{n_j,t}(b)) - \varphi_\beta(a\alpha_t(b))| \leqq \|a\alpha_{n_j,t}(b) - a\alpha_t(b)\|$$

$$+ |\varphi_{n_j,\beta}(a\alpha_t(b)) - \varphi_\beta(a\alpha_t(b))| \to 0 \ (j \to \infty).$$

同様に，$|\varphi_{n_j,\beta}(\alpha_{n_j,t}(b)a) - \varphi_\beta(\alpha_t(b)a)| \to 0$. また，

$|\varphi_{n_j,\beta}(a\alpha_{n_j,t}(b))| \leqq \|a\|\|b\|$，$|\varphi_{n_j,\beta}(\alpha_{n_j,t}(b)a)| \leqq \|a\|\|b\|$.

ゆえに，ルベーグの Dominated convergence theorem より，

$$F_{a,b}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} K_1(z,t)\varphi_\beta(a\alpha_t(b))\,dt + \int_{-\infty}^{\infty} K_2(z,t)\varphi_\beta(\alpha_t(b)a)\,dt.$$

かつ，Poisson Kernel Theorem により

$$\lim_{y\to 0} F_{a,b}(t+iy) = \varphi_\beta(a\alpha_t(b))$$

$$\lim_{y\to\beta} F_{a,b}(t+iy) = \varphi_\beta(\alpha_t(b)a).$$ （証明終）

類似の証明方法により次の2命題を証明することができる。

3.4. 命題. $\beta_n \to \beta_0$ で $\{\varphi_{\beta_n}\}$ を C^* 力学系 $\{\mathfrak{A}, \alpha\}$ の β_n に於ける KMS 状態とする。このとき，$\mathfrak{S}_{\mathfrak{A}}$ に於ける $\{\varphi_{\beta_n}\}$ の任意の集積点 ψ は $\{\mathfrak{A}, \alpha\}$ の β_0 に於ける KMS 状態である。

3.5. 命題. $\beta_n \to \infty$ で $\{\varphi_{\beta_n}\}$ を C^* 力学系

$\{\mathfrak{A},\alpha\}$のβ_nに於けるKMS状態とすると，$\{\varphi_{\beta_n}\}$の$\sigma_{\mathfrak{A}}$に於ける任意の集積点ψは$\{\mathfrak{A},\alpha\}$の基底状態である．(即ち，$-i\psi(a^*\delta(a))\geqq 0$ $(a\in\mathcal{D}(\delta))$)。

最後に，有界摂動に関する複素解析の応用を示す．$a\in\bigcap_{n=0}^{\infty}\mathcal{D}(\delta^n)$がgeometricであるとは，$\exists M_a>0$; $\|\delta^n(a)\|\leqq M_a^n\|a\|$ $(n=0,1,2,\cdots)$. $G(\delta)$をδに関してgeometricな元全体の集合とする。$G(\delta)$は$\mathfrak{A}$で稠密な*-部分代数である。$z\in\mathbb{C}$，$a\in G(\delta)$に対し，$\alpha_z(a)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}\delta^n(a)$と定義すると，$\alpha_z(a)$は$\mathbb{C}$上で解析的である．$k(=k^*)\in G(\delta)$に対し，

$$e(iz,k)=\sum_{p=0}^{\infty}(iz)^p\int_{0\leqq s_1\leqq s_2\leqq\cdots\leqq s_p\leqq 1}\alpha_{s_1z}(k)\alpha_{s_2z}(k)\cdots\alpha_{s_pz}(k)\,ds_1ds_2\cdots ds_p$$

とおくと，$e(iz,k)$は$\mathbb{C}$上で解析的なベクトル値関数で，$e(iz,k)\in\mathfrak{A}$.

φ_βを$\{\mathfrak{A},\alpha\}$のβに於けるKMS状態とすると，$\varphi_\beta^k(a)=\varphi_\beta(a e(-\beta,k))/\varphi_\beta(e(-\beta,k))$ $(a\in\mathfrak{A})$は$\{\mathfrak{A},\exp t(\delta+\delta_{ik})\ (t\in\mathbb{R})\}$の$\beta$に於けるKMS状態であることが示せる．このとき，次の定理が成立する

3.6. 命題. 集合$\{\varphi_\beta^k \mid \|k\|\leqq M,\ k(=k^*)\in G(\delta)\}$はrelatively $\sigma(\mathfrak{A}^*,\mathfrak{A}^{**})$-compactである，

ここで，Mは正の定数，$\mathfrak{A}^*$は$\mathfrak{A}$の双対バナハ空間，$\mathfrak{A}^{**}$は$\mathfrak{A}^*$の双対バナハ空間である。

この命題は有界摂動に関する基本定理の1つであるが，証明には，複素解析が重要な役割を担っているが，かなり長いので省略する。証明は拙著を参照されたい。

参考文献

1. S. Sakai, Operator algebras in dynamical systems, Cambridge University Press, 1991
2. K. Yosida, Functional Analysis, 2nd edn, Springer, 1968
3. T. Kato, Perturbation Theory for linear operators, Springer, 1966
4. A. Kishimoto, Locally representable one-parameter automorphism group of AF algebras and KMS states, to appear
5. ――――, Examples of one-parameter automorphism groups of UHF algebras, to appear
6. ――――, Dissipations and derivations, Comm. Math. Phys. 47, 23-32, 1976
7. S. Sakai, On commutative normal *-derivations, II, J. Funct. Anal. 21, 203-208, 1976
8. H. Araki, On the uniqueness of one-dimensional quantum lattice systems, Comm. Math. Phys. 44, 1-7, 1975