

ϵ -エントロピー理論の 関数空間論への応用例

新潟県新潟市五十嵐 2 の町 8 0 5 0

新潟大学理学部数学科 明石重男 (Shigeo Akashi)

1 序 節

『与えられた多変数関数を、より少ない変数をもついくつかの関数に写像の合成演算を適用して表現できるか否かを調べる問題』を、『関数族の合成表現問題 (もしくは重ね合わせ表現問題)』という。『合成表現で記述される多変数関数族』と『合成表現による記述の際用いられる多変数関数族』に、同時連続性という条件を与えた場合は、Hilbert の第 13 問題として知られており、この問題に対する肯定的結果が、Kolmogorov とその弟子の Arnold により ϵ -エントロピー理論を用いて証明された。Kolmogorov と Arnold による結果には改良が加えられ、現在知られている最良の結果は、『0 より大きく 1 未満の無理数 λ と、 $[0, 1]$ 上で定義された 1 変数狭義単調増加連続関数 $\phi_0, \phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4$ をうまく選ぶと、 $[0, 1]^2$ 上で定義され、 $[0, 1]$ に値をとる 2 変数同時連続関数 f が与えられたとき、 $[0, 2]$ 上で定義され、 $[0, 1]$ に値をとる 1 変数連続関数 g_f が存在して、

$$f(x, y) = \sum_{q=0}^4 g_f(\phi_q(x) + \lambda\phi_q(y)), \quad 0 \leq x, y \leq 1$$

が成立する。』というものである。

ところで、Hilbert の第 13 問題に端を発する多変数関数合成表現問題は、『合成表現で記述される多変数関数族に付随する条件』と『合成表現による記述の際に用いる多変数関数族に付随する条件』とを、それぞれ変化させることにより、解答に大幅な変化が生じてくる。例えば、合成表現で記述される多変数関数族と合成表現による記述の際用いられる多変数関数族とともに『多項式』という条件を課した場合は、すべての関数が合成表現可能であることが示される。また、両者に『有限回連続微分可能性』という条件を課した場合は、Kolmogorov-Vituskin 指標と呼ばれる『変数の個数/連続微分可能回数』の値に応じて、必ずしも合成表現可能でない多変数関数が存在することが知られている。但し、その証明法には、Baire のカテゴリー定理が用いられており、合成表現不可能な多変数関数の具体例が示された訳ではない。更に両者に『無限回微分可能性』もしくは『解析性』という条件を課した場合は、いまだに未解決である。

一般にこのような種類の問題を取り扱う際、与えられた関数と近似関数の間の距離を測

定するため、一様ノルムを用いる場合と L^2 -ノルムを用いる場合とがある。前者を用いる場合は、一様ノルムによる ϵ -網を構成しやすいが、関数空間の構造が（一様凸性や局所凸性などの）良い性質を持たないという欠点がある。後者を用いる場合は、関数空間が良い性質を備えているが、 L^2 -ノルムによる ϵ -網を構成し難いという欠点がある。しかし再生核 Hilbert 空間においては、再生核から構成される関数族が全空間の中で稠密であるという性質を有するため、 ϵ -網が構成しやすい。この事実は、再生核 Hilbert 空間族のエントロピー理論的分類を可能にすることを示唆している。

なお、Hilbert の第 13 問題と ϵ -エントロピー理論との関係を見ても分かるように、合成表現問題はエントロピー理論と密接なかわり合いを持つ。そして最近、自然界における情報の流れが満たす普遍的法則を調べる『情報力学』が、この問題に対して有効な役割を果たすことが知られている。

2 1 階合成表現不可能な実 3 変数多項式の例

\mathbb{Z} 及び \mathbb{R} をそれぞれ整数の集合及び実数の集合とする。最初に『多変数関数を、より少ない変数をもつ関数の合成で表現すること』について説明する。いま、 $f(\cdot, \cdot, \cdot)$ を $[0, 1]^3$ 上で定義され $[0, 1]$ に値をとる 3 変数関数とし、 $g(\cdot, \cdot)$ および $h(\cdot, \cdot)$ を $[0, 1]^2$ 上で定義され $[0, 1]$ に値をとる 2 変数関数とする。このとき三者の間に、

$$f(x, y, z) = g(x, h(y, z)), \quad 0 \leq x, y, z \leq 1$$

という関係が成立するならば、 f は、 g と h の合成表現によって記述されるという。例えば、 x, y, z を実変数として、

$$A(x, y) = x + y,$$

$$M(x, y) = xy$$

と定めたとき、3 変数多項式 $xy + yz + zx$ は、

$$xy + yz + zx = A(A(M(x, y), M(y, z)), M(z, x))$$

と表現されるから、この多項式は最も簡単な 2 変数多項式を用いて、3 階の合成表現で記述されることが分かる。ところで、上記 3 変数多項式の合成表現の階数を 2 階もしくは 1 階に下げることができないであろうか。以下の命題は、この多項式に対する階数削減作業が不可能であることを示すものである。

命題 1. 3 変数多項式 $xy + yz + zx$ は、如何なる 2 変数 2 回連続微分関数を用いても、1 階の合成表現で記述することはできない。即ち、

$$xy + yz + zx = g(u(x, y), v(x, z)), \quad x, y, z \in \mathbb{R},$$

を満たす 2 変数 2 回連続微分関数 $g(\cdot, \cdot)$, $u(\cdot, \cdot)$, $v(\cdot, \cdot)$ は存在しない。

証明. $f(x, y, z) = xy + yz + zx$ と置く。更に、 g, u, v がいずれも 2 回連続微分可能であることに注意する。 y で偏微分した場合、合成関数の微分法により、

$$\begin{aligned} x + z &= \frac{\partial f}{\partial y} \\ &= \frac{\partial g}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} \end{aligned}$$

が得られる。従って上式を、更に z で偏微分すると、

$$1 = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial g}{\partial u} \right) \frac{\partial u}{\partial y}, \quad x, y, z \in \mathbb{R}$$

が成り立つ。この式は、

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x, y) \neq 0, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

の成立を導く。従って、 $1/\frac{\partial u}{\partial y}$ が 2 変数同時連続関数であることが分かり、ある 2 変数同時連続関数 $p_1(\cdot, \cdot)$ が存在して、

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{\frac{\partial u}{\partial y}}(x + z) \\ &= p_1(x, y)(x + z) \end{aligned}$$

が成り立つことが示せる。同様にして、ある 2 変数同時連続関数 $p_2(\cdot, \cdot)$ が存在して、

$$\frac{\partial g}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} = p_2(x, z)(x + y)$$

が成り立つことも示せる。以上の結果より、

$$\begin{aligned} y + z &= \frac{\partial f}{\partial x} \\ &= \frac{\partial g}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} \\ &= p_1(x, y)(x + z) + p_2(x, z)(x + y), \quad x, y, z \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

が成り立たなくてはならない。ここで $y = z = 0$ を代入すると、

$$p_1(x, 0) + p_2(x, 0) = 0, \quad x \neq 0$$

が得られる。また $x = 0$ を代入すると、

$$y + z = p_1(0, y)z + p_2(0, z)y$$

が成り立つ。この式より、

$$\begin{aligned} p_1(0, y) &= 1, \quad y \neq 0, \\ p_2(0, z) &= 1, \quad z \neq 0 \end{aligned}$$

が導かれる。しかし上式は、 $p_1(\cdot, \cdot)$ 及び $p_2(\cdot, \cdot)$ が原点に於いても同時連続であることに矛盾する。□

3 Liouville の定理と帯状領域で有界な周期的解析関数族

本節では、『複素平面上で有界な解析的周期関数が定数関数に限られること』を示す。この結果は、複素関数論における有名な Liouville の定理を用いることにより、容易に得られるものであるが、本節ではこの定理を用いず、 ϵ -エントロピー理論を用いた証明法を紹介する。以下では特にことわりのない限り、対数の底を 2 とする。

実数軸を含む幅 h の閉帯状領域、即ち $\{\omega \in \mathbb{C}; -h \leq \text{Im}(\omega) \leq h\}$ で連続であるという条件、更に、

$$|f(\omega)| \leq 1, \quad -h \leq \text{Im}(\omega) \leq h$$

という有界性条件、最後に実数軸を含む幅 h の開帯状領域、即ち $\{\omega \in \mathbb{C}^2; -h < \text{Im}(\omega) < h\}$ で解析的である周期 2π の奇関数族で、特に実数軸上で実数に値をとるという条件を満足するものの全体を A_h で表し、特に帯状領域に限らず、複素平面上で上記条件を満たすものの全体を A_∞ で表す。任意の要素 $f \in A_h$ に対して、実数軸上での Fourier 級数展開を適用すると、

$$f(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k(f) e^{ik\omega}, \quad -h < \text{Im}(\omega) < h$$

という展開式が得られる。このとき右辺の係数項に関して、次の評価式が成り立つ。

補題 2. 任意の整数 k に対して、次のような上からの評価式が成り立つ：

$$|a_k(f)| \leq e^{-|k|h}.$$

証明. k が負の整数である場合について証明する。正の整数となる場合も同様にして証明可能である。 δ を十分小さい正数とし、帯状領域内に以下の式が示す 4 本の線分を用いてつくられる反時計回りの長方形閉曲線を考える：

$$\begin{aligned} l_1 &= \{\omega; 0 \leq \text{Re}(\omega) \leq 2\pi, \text{Im}(\omega) = 0\}, \\ l_2 &= \{\omega; \text{Re}(\omega) = 2\pi, 0 \leq \text{Im}(\omega) \leq h - \delta\}, \\ l_3 &= \{\omega; 0 \leq \text{Re}(\omega) \leq 2\pi, \text{Im}(\omega) = h - \delta\}, \\ l_4 &= \{\omega; \text{Re}(\omega) = 0, 0 \leq \text{Im}(\omega) \leq h - \delta\}. \end{aligned}$$

一方、Taylor 展開により得られる係数項は、

$$|a_k(f)| = \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-ikx} dx \right|$$

として評価される。 f が有界であること、 $f(\omega) e^{-ik\omega}$ も ω に関する周期関数となること、および Cauchy の積分定理とから、

$$\begin{aligned}
|a_k(f)| &= \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-ikx} dx \right| \\
&= \left| \frac{1}{2\pi} \int_{t_1} f(\omega) e^{-ik\omega} d\omega \right| \\
&= \left| -\frac{1}{2\pi} \int_{t_3} f(\omega) e^{-ik\omega} d\omega \right| \\
&= \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x + i(h - \delta)) e^{-ik(x + i(h - \delta))} dx \right| \\
&= \left| \frac{e^{k(h - \delta)}}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x + i(h - \delta)) e^{-ikx} dx \right| \\
&\leq e^{k(h - \delta)}.
\end{aligned}$$

ここで、 k が負であること、および δ は任意に小さく選べることに注意すると、求める結論が得られる。 k が正の整数の場合も同様に示せる。□

(X, d) を距離空間とし、 A を X のコンパクト部分集合とする。 ϵ を正数としたとき、 $x \in X$ を中心とする半径 ϵ の開球を $B(x, \epsilon)$ で表す。 $N(A, \epsilon)$ を X の部分集合とする。このとき、任意の A の要素 x に対して、ある $N(A, \epsilon)$ の要素 y が存在して $d(x, y) < \epsilon$ が成立するならば、 $N(A, \epsilon)$ を A の ϵ -網と呼ぶ。さらに、 A の ϵ -網の要素数の最小値の 2 を底とする対数を A の ϵ -エントロピーと呼び、 $S(A, \epsilon)$ で表す。このとき関数族 \mathcal{A}_h の ϵ -エントロピーに対する上からの評価に関して、次の命題が成立する。

命題 3. \mathcal{A}_∞ に属する要素は、恒等的に 0 に値をとる定数関数のみである。

証明. $e^{-h} < 1/2$ が成り立つ事を仮定する。1 より小さい ϵ に応じて定まる自然数 $n(\epsilon, h)$ を、

$$2e^{-nh} \frac{e^{-h}}{1 - e^{-h}} < \frac{\epsilon}{2}$$

を満たす最小の非負整数とする。具体的には、

$$n(\epsilon, h) = \frac{1}{h} \left[\frac{\log \frac{4e^{-h}}{\epsilon(1-e^{-h})}}{\log e} \right] + \frac{1}{h}$$

として決定される。従って $h > \log_e 2$ に注意すると、

$$n(\epsilon, h) \leq \frac{1}{h} \log_e \frac{4}{\epsilon} + \frac{1}{h}, \quad 0 < \epsilon < 1$$

が成立することが分かる。このとき補題 2 より、任意の $0 \leq x \leq 2\pi$ に対して、

$$\left| f(x) - \sum_{|k| \leq n(\epsilon, h)} a_k(f) e^{ikx} \right| \leq \sum_{|k| > n(\epsilon, h)} |a_k(f) e^{ikx}|$$

$$\leq \frac{\epsilon}{2}$$

が成立する。さらに j, k を整数としたとき、

$$b_{m_j} = \frac{m_j \epsilon}{2\sqrt{2}(2n(\epsilon, h) + 1)}, \quad m_j \in \mathbb{Z}, \quad |m_j| \leq \frac{e^{-|j|h}}{\frac{\epsilon}{2\sqrt{2}(2n(\epsilon, h) + 1)}},$$

$$c_{m_k} = \frac{m_k \epsilon}{2\sqrt{2}(2n(\epsilon, h) + 1)}, \quad m_k \in \mathbb{Z}, \quad |m_k| \leq \frac{e^{-|k|h}}{\frac{\epsilon}{2\sqrt{2}(2n(\epsilon, h) + 1)}}$$

と定め、複素平面上の関数 $g(\{b_{m_k} + ic_{m_k}\}, \cdot)$ を

$$g(\{b_{m_k} + ic_{m_k}\}, \omega) = \sum_{|k| \leq n(\epsilon, h)} (b_{m_k} + ic_{m_k}) e^{ik\omega}$$

と定義すると、関数族 $\{g(\{b_{m_k} + ic_{m_k}\}, \cdot); |k| \leq n(\epsilon, h)\}$ は、 \mathcal{A}_h の ϵ -網を構成する有限部分族となっている。すなわち、任意の \mathcal{A}_h の要素 f に対して、

$$\left| f(\omega) - \sum_{|k| \leq n(\epsilon, h)} (b_{m_k} + ic_{m_k}) e^{ik\omega} \right| \leq \epsilon, \quad 0 \leq |Im(\omega)| \leq h$$

を成立させることができる。この部分族の要素数は、上で定めた係数列 $\{b_{m_k} + ic_{m_k}\}$ の総数と一致するから、

$$S(\mathcal{A}_h, \epsilon) \leq \log \text{card}(\{g(\{b_{m_k} + ic_{m_k}\}, \cdot); |k| \leq n(\epsilon, h)\}), \quad 0 < \epsilon < 1, \quad h > \log_e 2$$

という上からの評価式を得る。ここで ϵ を固定したとき、

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \text{card}(\{g(\{b_{m_k} + ic_{m_k}\}, \cdot); |k| \leq n(\epsilon, h)\}) = 1$$

が成立する。明らかに、

$$0 \in \mathcal{A}_\infty \subset \mathcal{A}_h, \quad h > 0$$

が成り立つ。この式から、 $\text{card}(\mathcal{A}_\infty, \epsilon) = 1$ が得られ、 \mathcal{A}_∞ に属する関数が唯一であることが示された。□

先にも述べたように、この結果は、Liouville の定理を \mathcal{A}_∞ に適用することによっても導かれる。

参考文献

- [1] S. Akashi, Quantum entropy theoretic aspects of the 13th problem formulated by Hilbert, *Journal of the Ramanujan Mathematical Society*, 12(1997), 135-146.
- [2] R. V. Churchill and J. W. Brown, Complex Variables and applications, *McGraw-Hill International Book Company*, Auckland, 1984.
- [3] G. G. Lorentz, Approximation of Functions, *Holt, Rinehart and Winston Inc.*, New York, 1966.
- [4] A. N. Kolmogorov, On the representation of continuous functions of several variables by superpositions of continuous functions of one variable and addition, *Doklady Akad. Nauk SSSR*, 114(1957), 679-681.
- [5] R. S. Ingarden, A. Kossakowski and M. Ohya, Information dynamics and open systems, *Kluwer Academic Publishers*, Dordrecht.
- [6] S. Saitoh, Integral transforms, reproducing kernels and their applications, *Pitman Research Notes in Mathematics*, 369(1997), Addison-Longman, Harlow.
- [7] A. G. Vitushkin, Proof of existence of analytic functions of several variables, not representable by linear superpositions of continuously differentiable functions of fewer variables, *Doklady Akad. Nauk SSSR*, 156(1964), 1258-1261.