数理解析研究所講究録
1156 巻 2000 年 131-145

Phase shift formula for the Aharonov-Bohm Hamiltonians

摂南大　工学部　島田伸一(Shin-ichi Shimada)

1 Introduction

半径 0 の無限に長いソレノイド (x_3 軸, 磁場はこの中に閉じこめられている) による 1 粒子の散乱問題を考える. この状況を実現するベクトルポテンシャル $\mathbf{A}(x_1, x_2, x_3)$ は

$$\mathbf{A}(x_1, x_2, x_3) = \alpha(-\frac{x_2}{r^2}, \frac{x_1}{r^2}, 0) \tag{1.1}$$

で与えられる. ここで, $r = \sqrt{(x_1)^2 + (x_2)^2}$ であり, 定数 α は以後

$$0 < \alpha < 1 \tag{1.2}$$

を仮定する. 磁場 $\mathbf{B} = (0, 0, b(x_1, x_2))$ は

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = (0, 0, 2\pi\alpha\delta(x_1, x_2) \otimes 1_{x_3}) \quad in \quad \mathcal{D}'(\mathbf{R}^3)$$

(distribution の意味) であり, $b(x_1, x_2)$ の total flux は

$$\int_{\mathbf{R}^2} b(x_1, x_2)dx_1dx_2 = 2\pi\alpha$$

となる. $\delta(x_1, x_2) \otimes 1_{x_3}$ の $\varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^3)$ に対する作用は

$$< \delta(x_1, x_2) \otimes 1_{x_3}, \varphi(x_1, x_2, x_3) >= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(0, 0, x_3)dx_3$$

である. ベクトルポテンシャル (1.1) をもつ Schrödinger 作用素は

$$(-i\nabla - \mathbf{A})^2 = (-i\partial_1 + \alpha\frac{x_2}{r^2})^2 + (-i\partial_2 - \alpha\frac{x_1}{r^2})^2 + (-i\partial_3)^2$$

で与えられるので（$\partial_j = \frac{\partial}{\partial x_j}$），$(x_1, x_2)$ の微分作用素と考えたものは

$$(-i\partial_1 + \alpha\frac{x_2}{r^2})^2 + (-i\partial_2 - \alpha\frac{x_1}{r^2})^2$$

となる．そこで次の作用素を定義する．

Definition 1.1.

$$\hat{H}_\alpha := (-i\partial_1 + \alpha\frac{x_2}{r^2})^2 + (-i\partial_2 - \alpha\frac{x_1}{r^2})^2\Big|_{C_0^\infty\left(\boldsymbol{R}^2\setminus(0,0)\right)} \quad in \quad L_2(\boldsymbol{R}^2).$$

$\hat{H}_\alpha$ を $x_1 = r\cos\theta, x_2 = r\sin\theta$ で極座標表示すると

$$\hat{H}_\alpha = -(\partial_r)^2 - \frac{1}{r}\partial_r + \frac{1}{r^2}(i\partial_\theta + \alpha)^2$$

となる．これは $\hat{H}_\alpha$ を空間 $\hat{\mathcal{H}} := L_2((0,\infty); rdr) \otimes L_2(S^1)$ (S^1 は単位円) で考えていることになる．$n \in \mathbf{Z}$(整数全体) に対して

$$e^{in\theta}(i\partial_\theta + \alpha)e^{-in\theta} = i\partial_\theta + (\alpha + n)$$

から

$$e^{in\theta}\hat{H}_\alpha e^{-in\theta} = \hat{H}_{\alpha+n}$$

がわかる．また α が整数のとき，$\hat{H}_\alpha$ は point interaction(cf.[AGHH]) を記述する Hamiltonian とユニタリ同値になる．これより，(1.2) の α の制限 $0 < \alpha < 1$ は一般性を失うものではない．$\hat{H}_\alpha$ は本質的自己共役ではないのでまずすべての自己共役拡張を決定しておく必要がある ([AT],[S])．その為には，$\hat{H}_\alpha$ を $\hat{\mathcal{H}}$ ではなく，次で定義する $\mathcal{H}$ に移して考えるのが便利である．

Definition 1.2. ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ を

$$\mathcal{H} := L_2(0,\infty) \otimes L_2(S^1) \simeq L_2\big((0,\infty); L_2(S^1)\big)$$

と定義し，内積は $f, g \in \mathcal{H}$, $(f(r,\cdot), g(r,\cdot) \in L_2(S^1))$ に対して

$$(f,g) = (f,g)_{\mathcal{H}} := \int_0^\infty dr(f(r,\cdot), g(r,\cdot))_{L_2(S^1)}$$

で与える．また，

$$e_n = e_n(\theta) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{in\theta} \quad (n \in \boldsymbol{Z})$$

とおく．

このとき

$$\mathcal{H}_n := L_2(0,\infty) \otimes L.h.[e_n] \quad (n \in \mathbf{Z})$$

とおくと, $\mathcal{H}_n$ は $\mathcal{H}$ の閉部分空間で

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{n\in\mathbf{Z}} \mathcal{H}_n$$

が成り立つ. $L_2(\mathbf{R}^2)$ から $\mathcal{H}$ へのユニタリ作用素 $\mathcal{U}$ を次で定義する.

Definition 1.3.

$$\mathcal{U} : L_2(\boldsymbol{R}^2) \to \mathcal{H}, \quad (\mathcal{U}f)(r,\theta) := r^{\frac{1}{2}} f(r\cos\theta, r\sin\theta).$$

このとき, $\hat{H}_\alpha$ は $\mathcal{U}$ によって $\mathcal{H}$ では次のように変換される（定義域の問題は無視して）.

$$\mathcal{U}\hat{H}_\alpha\mathcal{U}^{-1} = \bigoplus_{n\in\mathbf{Z}} [l(|n-\alpha|) \otimes 1_n], \tag{1.3}$$

$$l(\nu) = -\left(\frac{d}{dr}\right)^2 + \frac{\nu^2 - \frac{1}{4}}{r^2},$$

1_n は $L.h.[e_n]$ 上の恒等作用素である. $\nu \geq 1$ のとき, $l(\nu)$ は $L_2(0,\infty)$ の作用素として $C_0^\infty(0,\infty)$ 上で本質的自己共役であることがわかっている. $0 \leq \nu < 1$ の場合は $l(\nu)|_{C_0^\infty(0,\infty)}$ の自己共役拡張は次で与えられる ([Kan, 3 章],[S, Theorem2.10]).

Theorem 1.1. $0 \leq \nu < 1$ とする. $L_2(0,\infty)$ の作用素 $h(\nu,c)\,(c \in \boldsymbol{R} \cup \{\infty\})$ を *(i)* $0 < \nu < 1$ のときは

$$\begin{aligned} Dom(h(\nu,\infty)) = \{u \in L_2(0,\infty); l(\nu)u \in L_2(0,\infty) \quad in \quad \mathcal{D}'(0,\infty), \\ [u, r^{\frac{1}{2}+\nu}](+0) = 0\}, \end{aligned}$$

$$h(\nu,\infty)u = l(\nu)u \quad for \quad u \in Dom(h(\nu,\infty)),$$

$$\begin{aligned} Dom(h(\nu,c)) = \{u \in L_2(0,\infty); l(\nu)u \in L_2(0,\infty) \quad in \quad \mathcal{D}'(0,\infty), \\ [u, cr^{\frac{1}{2}+\nu} + r^{\frac{1}{2}-\nu}](+0) = 0\}, \end{aligned}$$

$$h(\nu,c)u = l(\nu)u \quad for \quad u \in Dom(h(\nu,c)),$$

と定め, *(ii)* $\nu=0$ に対しては

$$Dom(h(0,\infty))=\{u\in L_2(0,\infty);l(0)u\in L_2(0,\infty)\quad in\quad \mathcal{D}'(0,\infty),\\ [u,r^{\frac{1}{2}}](+0)=0\},$$

$$Dom(h(0,c))=\{u\in L_2(0,\infty);l(0)u\in L_2(0,\infty)\quad in\quad \mathcal{D}'(0,\infty),\\ [u,cr^{\frac{1}{2}}+r^{\frac{1}{2}}\log r](+0)=0\}$$

と定義する．ここで $[u,v](r)=u'(r)\overline{v(r)}-u(r)\overline{v'(r)}$ である．このとき $l(\nu)|_{C_0^\infty(0,\infty)}$ のすべての自己共役拡張は $h(\nu,c)$ $(c\in \boldsymbol{R}\cup\{\infty\})$ で与えられる．

本講演では $\hat{H}_\alpha$ の自己共役拡張として次の作用素を考える．

Definition 1.4. $c_0,c_1\in \boldsymbol{R}\cup\{\infty\}$ に対して $H(c_0,c_1)$ を

$$H(c_0,c_1)=\mathcal{U}^{-1}[h(\alpha,c_0)\otimes 1_0]\oplus[h(1-\alpha,c_1)\otimes 1_1]\oplus\\ \bigoplus_{n\in\boldsymbol{Z},n\neq 0,1}[\overline{l(\nu)|_{C_0^\infty(0,\infty)}}\otimes 1_n]\mathcal{U},$$

で定義する *($\overline{A}$ は A の閉包)*.

一般には $[l(\alpha)\otimes 1_0]\oplus[l(1-\alpha)\otimes 1_1]$ の自己共役拡張を求めなければいけないので, $\hat{H}_\alpha$ のすべての自己共役拡張 $H(A)$ は $A\in U(2)$ (2×2 ユニタリー行列全体) をパラメータ (実 4 パラメータ) にもつ作用素となる．$H(c_0,c_1)$ は $l(\alpha)\otimes 1_0$ と $l(1-\alpha)\otimes 1_1$ を別々に拡張して得られたものである．$H(\infty,\infty)$ は [AB] で扱われた作用素である．彼らは波動関数が原点で消えるという条件を課している．これに対応して定義域の任意の元が原点で消えるという条件で $H(\infty,\infty)$ を特徴付けることができる ([S, Theorem5.1]).

Theorem 1.2. $A\in U(2)$ とする．任意の $u\in Dom\Big(H(A)\Big)$ に対して

$$u=\sum_{n\in\mathbf{Z}}u_n(r)e_n(\theta)$$

と展開したとき,

$$\lim_{r\downarrow 0}u_n(r)=0\quad(n=0,1)$$

となるのは

$$H(A)=H(\infty,\infty)$$

のときに限る．

一方, 任意の $A \in U(2)$ に対し,

$$u = \sum_{n \in \mathbf{Z}} u_n(r) e_n(\theta) \in Dom\Big(H(A)\Big)$$

ならば

$$\lim_{r \downarrow 0} u_n(r) = 0 \quad (n \in \mathbf{Z},\, n \neq 0, 1)$$

となる ([S, Lemma5.3]).

波動作用素 $W^{\pm}$ の存在と完全性はペア $(H(\infty,\infty), H_0)$ (H_0 は free Hamiltonian) に対して [R] で, 一般の $(H(A), H_0)$ に対しては [AT] で証明されている. 我々は, $A \in U(2)$ が対角行列のときに対応する 2 パラメータ $c_0, c_1 \in \mathbf{R} \cup \{\infty\}$ をもつ $\hat{H}_\alpha$ の自己共役拡張 $H(c_0, c_1)$ と H_0 に対して波動作用素の具体的な表現を求める (Theorem2.2). これは常微分作用素のスペクトル表現の具体的な形を利用して [R] の波動作用素の完全性の証明の方法に沿ってやれば得られる. 波動作用素の表現が得られたなら, S 行列 $S(k; c_0, c_1)$ (k は運動量の大きさ) の表現, phase shift formula は容易に得られる (Theorem2.3,2.4). $S(k; c_0, c_1) - 1$ の積分核から定義される散乱振幅は前方散乱に強い特異性が現れ, 関数ではなく distribution となる. [O] によれば物理サイドでは波動関数をどう考えるかいろいろ議論があるようである. 我々の波動関数 (the distorted plane waves, the generalized eigenfunctions) は $\mathcal{F}(W^{\pm})^*$ ($\mathcal{F}$ はフーリエ変換) の積分核 $\varphi^{\pm}(x, \xi; c_0, c_1)$ と定義する. これは Ikebe, Kuroda 以来の固有関数展開の理論での通常の定義である. $\varphi^{\pm}(x, \xi; c_0, c_1)$ はある意味で $H(c_0, c_1)$ の一般化された固有関数となっている (Theorem3.2). また波動関数 $\varphi^{\pm}(x, \xi; c_0, c_1)$ を部分波分解し, 各部分波の散乱振幅を足しあわせたものから全体の散乱振幅が得られる (Theorem3.4). このことより, $\mathcal{F}(W^{\pm})^*$ の積分核として定義した $\varphi^{\pm}(x, \xi; c_0, c_1)$ がこの散乱現象を表す波動関数と考えられる. さらに $\varphi^{\pm}(x, \xi; c_0, c_1)$ の $|x| \to 0$ のときの挙動を調べることにより, $H(c_0, c_1)$ $(c_0, c_1 \in \mathbf{R} \cup \{\infty\})$ の中で波動関数が原点で消えるのは $H(\infty, \infty)$ だけであることがわかる (Theorem3.2(iii)). これは Aharonov と Bohm たちが扱った作用素 $H(\infty, \infty)$ の波動関数からみた 1 つの特徴付けを与えている. つまり他の $H(c_0, c_1)$ では粒子はソレノイドに染み込むことができると考えられる.

アハロノフ ボーム効果に対する物理的議論, 他の知見は [O], [Ara] 等を参照されたい.

2 Phase shift formula for $H(c_0, c_1)$

$H_1 := H(c_0, c_1)$ の散乱問題を考える. 非摂動系を free hamiltonian

$$H_0 := \overline{\left(-\Delta\Big|_{C_0^\infty(\mathbf{R}^2)}\right)}$$

にとる. 空間 $\mathcal{H}$ で考えたほうが分かりやすいので, H_0, H_1 の $\mathcal{H}$ での表現を与えておく.

$$\mathcal{U}H_j\mathcal{U}^{-1} = \bigoplus_{n\in\mathbf{Z}} h_{jn} \otimes 1_n,$$

$$h_{00} = h(0,\infty), \quad h_{0n} = \overline{l(|n|)|_{C_0^\infty(0,\infty)}}\,(n \neq 0),$$

$$h_{10} = h(\alpha, c_0), \quad h_{11} = h(1-\alpha, c_1), \quad h_{1n} = \overline{l(|n|)|_{C_0^\infty(0,\infty)}}\ (n \neq 0, 1).$$

Definition 2.1. $c \in \boldsymbol{R} \cup \{\infty\}$, $u \in C_0^\infty(0,\infty)$ に対して

$$U(\nu, c)u(\lambda) := \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^\infty ds\, \frac{s^{1/2}\Big(\tilde{c}J_\nu(\sqrt{\lambda}s) + \lambda^\nu J_{-\nu}(\sqrt{\lambda}s)\Big)}{\Big(\tilde{c}^2 + 2\lambda^\nu\tilde{c}\cos(\nu\pi) + \lambda^{2\nu}\Big)^{1/2}}u(s)$$

と定義する. ここで

$$\tilde{c} = \tilde{c}(\nu) := \frac{2^{2\nu}\Gamma(1+\nu)}{\Gamma(1-\nu)}c$$

である. さらに

$$U_{0n} := U(|n|, \infty)\,(n \in \boldsymbol{Z}),$$

$$U_{10} := U(\alpha, c_0),\, U_{11} := U(1-\alpha, c_1),$$

$$U_{1n} := U(|n-\alpha|, \infty), \quad (n \in \boldsymbol{Z},\, n \neq 0, 1)$$

と定義する. ここで $J_\nu(z)$ は *Bessel* 関数, $\Gamma(z)$ は *Gamma* 関数を表す.

U_{jn} がどんなものかは次の Lemma からわかる. $\mathcal{E}_{jn}(\Lambda)$ を h_{jn} のスペクトル測度とする.

Lemma 2.1. *i)* $U_{0n}\,(n\in\boldsymbol{Z})$, $U_{1n}\,(n\in\boldsymbol{Z}, n\neq 0,1)$ は $L_2(0,\infty)$ 上のユニタリ作用素に拡張でき,

$$U_{jn}^*\chi_{(a,b)}U_{jn}=\mathcal{E}_{jn}\big((a,b)\big)\quad(0\le a<b<+\infty)\tag{2.1}$$

$$U_{jn}e^{-ith_{jn}}U_{jn}^*=e^{-it\cdot}\tag{2.2}$$

が成り立つ *(T^* は T の共役)*.
ii) $U_{1n}\,(n=0,1)$ は $c_n\ge 0$ ならば $L_2(0,\infty)$ 上のユニタリ作用素に拡張でき, *(2.1),(2.2)* が成り立つ.
iii) $U_{1n}\,(n=0,1)$ は $c_n<0$ ならば始集合 $[Ran\Big(\mathcal{E}_{1n}(\{-\lambda_n^2\})\Big)]^\perp, (\lambda_n=|\tilde{c}_n|^{1/(2|n-\alpha|)})$, 終集合 $L_2(0,\infty)$ の部分的等長作用素に拡張でき,

$$U_{1n}^*\chi_{(a,b)}U_{jn}=\mathcal{E}_{1n}\big((a,b)\big)\quad 0\le a<b<+\infty$$

$$U_{1n}e^{-ith_{1n}}U_{1n}^*=e^{-it\cdot}+e^{it\lambda_n^2}U_{1n}\mathcal{E}_{1n}(\{-\lambda_n^2\})U_{1n}^*$$

が成り立つ *($Ran(T)$ は T の像, $\mathcal{M}^\perp$ は $\mathcal{M}$ の直交補空間)*.

Theorem 2.2.

$$s-\lim_{t\to\pm\infty}e^{itH(c_0,c_1)}e^{-itH_0}=\mathcal{U}^{-1}\Big(\bigoplus_{n\in\boldsymbol{Z}}[U_{1n}^*e^{i\theta_n^\pm}U_{0n}]\otimes 1_n\Big)\mathcal{U}.$$

即ち, 波動作用素 $W^\pm(c_0,c_1)$ が存在して完全である. 完全とは

$$\Big(W^\pm(c_0,c_1)\Big)^*W^\pm(c_0,c_1)=\textit{ projection onto}\,[\textit{eigen space of } H(c_0,c_1)]^\perp$$

ということである.
ここで

$$\theta_n^\pm=\pm(\delta_n-\frac{\pi}{2}|n|)$$

であり, δ_n は *(i)* $n\in\boldsymbol{Z}, n\neq 0,1$ のとき

$$\delta_n=\frac{\pi}{2}|n-\alpha|,$$

(ii) $n=0,1$ のときは $\delta_n=\delta_n(\lambda;c_n)$. さらに (イ) $c_n=\infty$ ならば

$$\delta_n(\lambda;\infty)=\frac{\pi}{2}|n-\alpha|,$$

（ロ） $c_n \in \boldsymbol{R}$ ならば

$$e^{i\delta_n(\lambda;c_n)} = \frac{\tilde{c}_n e^{i\frac{\pi}{2}\nu_n} + \lambda^{\nu_n} e^{-i\frac{\pi}{2}\nu_n}}{\left(\tilde{c}_n^2 + 2\lambda^{\nu_n}\tilde{c}_n\cos(\nu_n\pi) + \lambda^{2\nu_n}\right)^{1/2}}, \quad \delta_n(\infty; c_n) = -\frac{\pi}{2}\nu_n,$$

$$\tilde{c}_n = \frac{2^{2\nu_n}\Gamma(1+\nu_n)}{\Gamma(1-\nu_n)} c_n, \quad \nu_n = |n-\alpha|$$

で決まる角度である.

散乱作用素 $S(c_0, c_1)$ は

$$S(c_0, c_1) := (W^+(c_0, c_1))^* W^-(c_0, c_1)$$

で定義される. 散乱作用素の運動量空間での表示は次のようになる.

Theorem 2.3. $u \in C_0^\infty(\boldsymbol{R}^2)$, $u(k,\theta) := u(k\cos\theta, k\sin\theta)$ に対して

$$\mathcal{F}S(c_0,c_1)\mathcal{F}^* u(k,\theta) = \cos(\pi\alpha)u(k,\theta) - \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi\, K(\theta,\varphi,k;c_0,c_1)u(k,\varphi)$$

となる. ここで

$$K(\theta,\varphi,k;c_0,c_1) = \frac{i}{\pi}\sin(\pi\alpha)\left(p.v.\frac{1}{1-e^{i(\varphi-\theta)}}\right)$$

$$-\frac{1}{2\pi}\left(f(k^2;\alpha,c_0) - e^{-i(\varphi-\theta)} f(k^2; 1-\alpha, c_1)\right),$$

$$f(\lambda;\nu,c) = \frac{2\lambda^\nu \tilde{c}\sin^2(\pi\nu) + 2i\lambda^\nu\sin(\pi\nu)\{\lambda^\nu + \tilde{c}\cos(\pi\nu)\}}{\tilde{c}^2 + 2\lambda^\nu\tilde{c}\cos(\pi\nu) + \lambda^{2\nu}},$$

である.

$p.v.$ は主値を表す. $L_2(S^1)$ 上の作用素 T:

$$Tu(\theta) := \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} d\varphi\left(p.v.\frac{1}{1-e^{i(\varphi-\theta)}}\right)u(\varphi), \quad u \in L_2(S^1)$$

は

$$u = \sum_{n\in\mathbf{Z}} u_n e_n(\theta)$$

とフーリエ級数展開したとき

$$T\Big(\sum_{n\in\mathbf{Z}} u_n e_n(\theta)\Big) = \sum_{n=-\infty}^{0} \frac{1}{2} u_n e_n(\theta) + \sum_{n=1}^{\infty} (-\frac{1}{2}) u_n e_n(\theta)$$

と作用するので, T は有界作用素である. そこで

Definition 2.2. $S-$ 行列 $S(k; c_0, c_1)$ を

$$S(k; c_0, c_1)u(\theta) = \cos(\pi\alpha)u(\theta) - \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi\, K(\theta, \varphi, k; c_0, c_1)u(\varphi), \qquad u \in L_2(S^1)$$

で定義する. $S(k; c_0, c_1)$ は $L_2(S^1)$ 上の有界作用素である.

$$\mathcal{F}S(c_0, c_1)\mathcal{F}^* u(k, \theta) = [S(k; c_0, c_1)u(k, \cdot)](\theta) \quad (u \in C_0^\infty(\mathbf{R}^2))$$

となっている.

$$F(\theta, \varphi, k; c_0, c_1) := (1 - \cos(\pi\alpha))\delta(\varphi - \theta) + K(\theta, \varphi, k; c_0, c_1)$$

とすると

$$S(k; c_0, c_1)u(\theta) = u(\theta) - \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi\, F(\theta, \varphi, k; c_0, c_1)u(\varphi)$$

と表される. このとき散乱振幅は次で定義される.

Definition 2.3. エネルギー k^2, 入射角 φ, および 散乱角 θ である散乱振幅を

$$\sqrt{\frac{2\pi}{ik}} F(\theta, \varphi, k; c_0, c_1)$$

で定義する.

$$\sqrt{\frac{2\pi}{ik}} = \sqrt{\frac{2\pi}{k}} e^{-\frac{\pi}{4}i}$$

の意味である.

この定義の妥当性については次の § を見られたい. phase shift formula は次のようになる.

Theorem 2.4.

$$L_2(S^1) = \bigoplus_{n \in \boldsymbol{Z}} L.h.[e_n]$$

の直和分解に対応して $S(k;c_0,c_1)$ は次のように分解される：

$$S(k;c_0,c_1) = \oplus_{n=-\infty}^{-1} e^{-i\pi\alpha} \oplus e^{-2i\delta_0(k^2,c_0)} \oplus e^{i(\pi-2\delta_1(k^2,c_1))} \oplus \oplus_{n=2}^{\infty} e^{i\pi\alpha}.$$

$0<\alpha<1$ だったから $S(k;c_0,c_1)-1$ は決してコンパクト作用素にはなり得ない．これは $H(c_0,c_1)$ が H_0 に対して long range の摂動になっているからと思われる．

3 Wave functions for $H(c_0, c_1)$

$H(c_0,c_1)$ の波動関数 $\varphi^{\pm}(x,\xi;c_0,c_1)$ を定義し部分波分解を求める．$\varphi^{\pm}(x,\xi;c_0,c_1)$ は $\mathcal{F}\Big(W^{\pm}(c_0,c_1)\Big)^*$（一般化された Fourier 変換）の積分核として定義される．前定理で求めた phase shift formula が我々が定義した波動関数の各部分波の phase shift に対応していることを示す．また各部分波の散乱振幅をたし合わせれば前 § で定義した散乱振幅が得られることを示す．

Theorem 3.1. $u \in C_0^{\infty}(\boldsymbol{R}^2 \setminus (0,0))$, $\xi \in \boldsymbol{R}^2 \setminus (0,0)$ に対して

$$\mathcal{F}\Big(W^{\pm}(c_0,c_1)\Big)^* u(\xi) = \frac{1}{2\pi}\int_{\boldsymbol{R}^2} dx\, \overline{\varphi^{\pm}(x,\xi;c_0,c_1)}u(x).$$

ここで，$x=r(\cos\varphi,\sin\varphi)$, $\xi = k(\cos\theta,\sin\theta)$ として

$$\varphi^{\pm}(x,\xi;c_0,c_1) = \sum_{n\in\boldsymbol{Z}} \varphi_n^{\pm}(r,\xi)e_n(\varphi),$$

$$\varphi_n^{\pm}(r,\xi) = \sqrt{2}i^{|n|}e^{\pm i\frac{\pi}{2}\alpha}J_{|n-\alpha|}(kr)e^{-in\theta} \quad (n \le -1)$$

$$\varphi_0^{\pm}(r,\xi) = \varphi_0^{\pm}(r,\xi;c_0) = \frac{\sqrt{2}e^{\pm i\delta_0(k^2;c_0)}\Big(\tilde{c}_0 J_{\alpha}(kr) + k^{2\alpha}J_{-\alpha}(kr)\Big)}{\Big(\tilde{c}_0^2 + 2k^{2\alpha}\tilde{c}_0\cos(\alpha\pi) + k^{4\alpha}\Big)^{1/2}},$$

$$\varphi_1^{\pm}(r,\xi) = \varphi_1^{\pm}(r,\xi;c_1) = \frac{\pm\sqrt{2}e^{\pm i\delta_1(k^2;c_1)}\Big(\tilde{c}_1 J_{1-\alpha}(kr) + k^{2(1-\alpha)}J_{-1+\alpha}(kr)\Big)e^{-i\theta}}{\Big(\tilde{c}_1^2 + 2k^{2(1-\alpha)}\tilde{c}_1\cos\big((1-\alpha)\pi\big) + k^{4(1-\alpha)}\Big)^{1/2}},$$

$$\varphi_n^{\pm}(r,\xi)=\sqrt{2}i^{|n|}e^{\mp i\frac{\pi}{2}\alpha}J_{|n-\alpha|}(kr)e^{-in\theta}\quad (n\geq 2)$$

である.

$\nu>-\frac{1}{2}$ のとき

$$|J_\nu(z)|\leq\frac{\left(\frac{|z|}{2}\right)^{\nu}e^{|Im\,z|}}{\Gamma(\nu+1)}$$

が成り立つ. よって $\varphi^{\pm}(x,\xi;c_0,c_1)$ は (x,ξ) について $\Big(\mathbf{R}^2\setminus(0,0)\Big)\times\Big(\mathbf{R}^2\setminus(0,0)\Big)$ で C^∞ であることがわかる.

Theorem 3.2. *i)* $\xi\in\boldsymbol{R}^2\setminus(0,0)$ に対し

$$[(-i\partial_1+\alpha\frac{x_2}{r^2})^2+(-i\partial_2-\alpha\frac{x_1}{r^2})^2]\varphi^{\pm}(x,\xi;c_0,c_1)=|\xi|^2\varphi^{\pm}(x,\xi;c_0,c_1)\quad on\quad \boldsymbol{R}^2\setminus(0,0)$$

が成り立つ.
ii)

$$\varphi^{\pm}(x,\xi;c_0,c_1)=\sum_{n\in\boldsymbol{Z}}\varphi_n^{\pm}(r,\xi)e_n(\varphi),$$

と展開したとき, $\varphi_n^{\pm}(r,\xi)\quad (n=0,1)$ は原点において次の境界条件を満たす.

$$[r^{\frac{1}{2}}\varphi_0^{\pm}(r,\xi),c_0r^{\frac{1}{2}+\alpha}+r^{\frac{1}{2}-\alpha}](+0)=0,$$

$$[r^{\frac{1}{2}}\varphi_1^{\pm}(r,\xi),c_1r^{\frac{1}{2}+(1-\alpha)}+r^{\frac{1}{2}-(1-\alpha)}](+0)=0.$$

iii) $r\downarrow 0$ のとき

$$\varphi^{\pm}(x,\xi;c_0,c_1)=\frac{2^\alpha k^\alpha e^{\pm i\delta_0(k^2;c_0)}}{\Big(\tilde{c}_0^2+2k^{2\alpha}\tilde{c}_0\cos(\alpha\pi)+k^{4\alpha}\Big)^{1/2}\Gamma(1-\alpha)}r^{-\alpha}$$

$$+\frac{(\pm 1)2^{(1-\alpha)}k^{(1-\alpha)}e^{\pm i\delta_1(k^2;c_1)}e^{i(\varphi-\theta)}}{\Big(\tilde{c}_1^2+2k^{2(1-\alpha)}\tilde{c}_1\cos\big((1-\alpha)\pi\big)+k^{4(1-\alpha)}\Big)^{1/2}\Gamma(\alpha)}r^{-(1-\alpha)}+o(1)$$

が成り立つ.

Theorem i), ii) の意味で $\varphi^{\pm}(x,\xi;c_0,c_1)$ は $H(c_0,c_1)$ の一般化された固有関数になっている. また Theorem iii) から原点で消える $\varphi^{\pm}(x,\xi;c_0,c_1)$ は $H(\infty,\infty)$ のみであることもわかる.

2 次元の平面波の部分波分解は等式

$$e^{iz\sin\theta} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(z)e^{in\theta}$$

を利用して次のようになる.

$$e^{i\xi\cdot x} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} i^{|n|}J_{|n|}(kr)e^{-in\theta}e^{in\varphi} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_n(r,k)e^{-in\theta}e^{in\varphi},$$

$$f_n(r,k) = \frac{i^{|n|}}{2}(\frac{2}{\pi})^{1/2}\frac{1}{\sqrt{kr}}\Big(e^{i(kr-\frac{\pi}{2}|n|-\frac{\pi}{4})} + e^{-i(kr-\frac{\pi}{2}|n|-\frac{\pi}{4})}\Big)$$

$$+O(r^{-\frac{3}{2}}) \quad as \quad r\to\infty.$$

一方

$$\varphi^{\pm}(x,\xi;c_0,c_1) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} \varphi_n^{\pm}(r,k;c_0,c_1)e^{-in\theta}e^{in\varphi},$$

に対して $\varphi_n^{\pm}(r,k;c_0,c_1)$ の $r\to\infty$ のときの漸近挙動は次のようになる.

i) $n=-1,-2,-3,\cdots$ のとき

$$\varphi_n^{+}(r,k;c_0,c_1) = \frac{i^{|n|}}{2}(\frac{2}{\pi})^{1/2}\frac{1}{\sqrt{kr}}\Big(e^{i(kr-\frac{\pi}{2}|n|-\frac{\pi}{4})} + e^{-i(kr-\frac{\pi}{2}|n|-\frac{\pi}{4}-\pi\alpha)}\Big) + O(r^{-\frac{3}{2}}),$$

$$\varphi_n^{-}(r,k;c_0,c_1) = \frac{i^{|n|}}{2}(\frac{2}{\pi})^{1/2}\frac{1}{\sqrt{kr}}\Big(e^{i(kr-\frac{\pi}{2}|n|-\frac{\pi}{4}-\pi\alpha)} + e^{-i(kr-\frac{\pi}{2}|n|-\frac{\pi}{4})}\Big) + O(r^{-\frac{3}{2}}).$$

ii) $n=2,3,4,\cdots$ のとき

$$\varphi_n^{+}(r,k;c_0,c_1) = \frac{i^{|n|}}{2}(\frac{2}{\pi})^{1/2}\frac{1}{\sqrt{kr}}\Big(e^{i(kr-\frac{\pi}{2}|n|-\frac{\pi}{4})} + e^{-i(kr-\frac{\pi}{2}|n|-\frac{\pi}{4}+\pi\alpha)}\Big) + O(r^{-\frac{3}{2}}),$$

$$\varphi_n^{-}(r,k;c_0,c_1) = \frac{i^{|n|}}{2}(\frac{2}{\pi})^{1/2}\frac{1}{\sqrt{kr}}\Big(e^{i(kr-\frac{\pi}{2}|n|-\frac{\pi}{4}+\pi\alpha)} + e^{-i(kr-\frac{\pi}{2}|n|-\frac{\pi}{4})}\Big) + O(r^{-\frac{3}{2}}).$$

iii) $n=0,1$ のとき

$$\varphi_0^+(r,k;c_0,c_1)=\varphi_0^+(r,k;c_0)$$

$$=\frac{1}{2}(\frac{2}{\pi})^{1/2}\frac{1}{\sqrt{kr}}\Big(e^{i(kr-\frac{\pi}{4})}+e^{-i(kr-\frac{\pi}{4}-2\delta_0(k^2;c_0))}\Big)+O(r^{-\frac{3}{2}}),$$

$$\varphi_0^-(r,k;c_0,c_1)=\varphi_0^-(r,k;c_0)$$

$$=\frac{1}{2}(\frac{2}{\pi})^{1/2}\frac{1}{\sqrt{kr}}\Big(e^{i(kr-\frac{\pi}{4}-2\delta_0(k^2;c_0))}+e^{-i(kr-\frac{\pi}{4})}\Big)+O(r^{-\frac{3}{2}}).$$

$$\varphi_1^+(r,k;c_0,c_1)=\varphi_1^+(r,k;c_1)$$

$$=\frac{i}{2}(\frac{2}{\pi})^{1/2}\frac{1}{\sqrt{kr}}\Big(e^{i(kr-\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4})}+e^{-i(kr-\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}+[\pi-2\delta_1(k^2;c_1)])}\Big)+O(r^{-\frac{3}{2}}),$$

$$\varphi_1^-(r,k;c_0,c_1)=\varphi_1^-(r,k;c_1)$$

$$=\frac{i}{2}(\frac{2}{\pi})^{1/2}\frac{1}{\sqrt{kr}}\Big(e^{i(kr-\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}+[\pi-2\delta_1(k^2;c_1)])}+e^{-i(kr-\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4})}\Big)+O(r^{-\frac{3}{2}}).$$

このことから $\varphi^-(x,\xi;c_0,c_1)$ の phase shift が phase shift formula に表れる phase に対応していることがわかる．そこで $\varphi^-(x,\xi;c_0,c_1)$ と $e^{i\xi\cdot x}$ の部分波を比較して，$\varphi^-(x,\xi;c_0,c_1)$ の部分波

$$\varphi_n^-(r,k;c_0,c_1)e^{-in\theta}e^{in\varphi}$$

の散乱振幅を次で定義する．

Definition 3.1. $x=r(\cos\varphi,\sin\varphi)$, $\xi=k(\cos\theta,\sin\theta)$ とし

$$\varphi^-(x,\xi;c_0,c_1)=\sum_{n\in\boldsymbol{Z}}\varphi_n^-(r,k;c_0,c_1)e^{-in\theta}e^{in\varphi},$$

$$e^{i\xi\cdot x}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}f_n(r,k)e^{-in\theta}e^{in\varphi}$$

とそれぞれを部分波に分解したとき,

$$\varphi_n^-(r,k;c_0,c_1)e^{-in\theta}e^{in\varphi} = f_n(r,k)e^{-in\theta}e^{in\varphi}$$

$$+f_n^-(\varphi,\theta,k;c_0,c_1)\frac{e^{ikr}}{\sqrt{r}} + O(r^{-\frac{3}{2}}) \quad as \quad r\to\infty$$

となる $f_n^-(\varphi,\theta,k;c_0,c_1)$ を部分波 $\varphi_n^-(r,k;c_0,c_1)e^{-in\theta}e^{in\varphi}$ の散乱振幅という.

Lemma 3.3. *i)* $n=-1,-2,-3,\cdots$ のとき

$$f_n^-(\varphi,\theta,k;c_0,c_1) = \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2\pi k}}(e^{-i\pi\alpha}-1)e^{in(\varphi-\theta)}.$$

ii) $n=2,3,4,\cdots$ のとき

$$f_n^-(\varphi,\theta,k;c_0,c_1) = \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2\pi k}}(e^{i\pi\alpha}-1)e^{in(\varphi-\theta)}.$$

iii) $n=0,1$ のとき

$$f_0^-(\varphi,\theta,k;c_0,c_1) = \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2\pi k}}(e^{-2i\delta_0(k^2,c_0)}-1)e^{in(\varphi-\theta)}.$$

$$f_1^-(\varphi,\theta,k;c_0,c_1) = \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2\pi k}}(e^{i[\pi-2\delta_1(k^2,c_1)]}-1)e^{in(\varphi-\theta)}.$$

これら部分波の散乱振幅を distribution の意味で足し合わせると全体の散乱振幅がえられる.

Theorem 3.4.

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_n^-(\varphi,\theta,k;c_0,c_1) =: f^-(\varphi,\theta,k;c_0,c_1) \quad in \quad \mathcal{D}'(S_\varphi^1)$$

とおくと *(*θ を固定して φ についての S^1 上の *distribution* としての和*)*

$$f^-(\theta,\varphi,k;c_0,c_1) = f^-(\pi-\varphi,\pi-\theta,k;c_0,c_1) = \sqrt{\frac{2\pi}{ik}}F(\theta,\varphi,k;c_0,c_1)$$

が成り立つ.

この定理の最初の等号は Time revarsal invariance をいっている.

参考文献

[AB] Y. Aharonov and D. Bohm : Phys. Rev., 115, 485-491 (1959).

[AGHH] S.Albeverio,F.Gesztesy,R.Høegh-Krohn,H.Holden: Solvable Models in Quantum Mechanics, Springer-Verlag, New York Berlin 1988.

[Ara] 新井朝雄：ゲージ理論における正準交換関係の表現とアハラノフーボーム効果, 数理物理への誘い 2, 遊星社, 165-190 (1997).

[AT] R. Adami and A. Teta : Lett . Math. Phys. , 43, 43-53 (1998).

[O] 大貫義郎：アハラノフフーボーム効果, 物理学最前線 9, 共立出版, 1-64 (1985).

[Kan] 函数解析と微分方程式 (現代数学演習叢書 4), 岩波書店.

[R] S.N.M. Ruijsenaars : Ann. of Phys., 146, 1-34 (1983).

[S] S.Shimada: Spectral properties of Aharonov-Bohm Hamiltonians, preprint.