数理解析研究所講究録
1161 巻 2000 年 159-163

Estimation by the Method of Moments in the Errors-in-Variables Model

筑波大・数学　赤平昌文 (Masafumi Akahira)
防災科学技術研究所　河合伸一 (Shinichi Kawai)

1　はじめに

変数誤差モデル (errors-in-variables model) は，すべての観測される変数が誤差を持ち，ある関係式がそれらの真の値について成り立つと想定される場合を考えている ([KS79], [F87]). このモデルの最も単純なものは次のように考えられる ([KS79]). 2 つの変数 ξ, η の間の線形関係

$$\eta=\alpha+\beta\xi \tag{1.1}$$

において，係数 α, β を推定したい．そこで，いま，ξ, η を観測できず，

$$Y_i=\xi_i+\epsilon_i\,, \qquad W_i=\eta_i+\delta_i \qquad (i=1,\ldots,n) \tag{1.2}$$

となる確率変数 Y_i, W_i $(i=1,\ldots,n)$ の値のみを観測できるとする．ここで，(1.2) において，誤差 ϵ_i, δ_i は i に依存することに注意．例えば，誤差 ϵ は ξ のとる小さい値よりも大きい値に対してより大きくなる傾向にあり，このことは，変数誤差 ϵ の分散の増加によって表現される．しかし，最も単純な場合として，$\epsilon_1,\ldots,\epsilon_n$ は同分布に従うとすれば，各 ϵ_i は同じ平均，分散を持つ．ここで，各 ϵ_i の平均は 0 として一般性を失わない．また，$\delta_1,\ldots,\delta_n$ も同分布に従うとして，各 δ_i は平均が 0 で同じ分散を持つ．さらに，$\epsilon_1,\ldots,\epsilon_n$, $\delta_1,\ldots,\delta_n$ は全て互いに無相関であるとするが，正規分布に従うことは仮定しない．従って，次の条件

$$\begin{gathered}E(\epsilon_i)=E(\delta_i)=0\,, \qquad V(\epsilon_i)=\sigma_\epsilon^2\,, \qquad V(\delta_i)=\sigma_\delta^2 \qquad (i=1,\ldots,n)\,,\\ Cov(\epsilon_i,\epsilon_j)=Cov(\delta_i,\delta_j)=0 \qquad (i\neq j;\, i,j=1,\ldots,n),\\ Cov(\epsilon_i,\delta_j)=0 \qquad (i,j=1,\ldots,n)\end{gathered} \tag{1.3}$$

を満たすモデル (1.1), (1.2) を考える．ここでは，簡単にモデル

$$Y=\xi+\epsilon, \qquad W=\eta+\delta \tag{1.4}$$

で表す．なお，通常の回帰モデルは $\sigma_\epsilon^2=0$ の場合に対応することに注意．また，(1.4) を (1.1) に代入すると

$$W=\alpha+\beta Y+(\delta-\beta\epsilon) \tag{1.5}$$

となる．これは単純回帰モデルではない．実際，Y は確率変数で誤差項 $\delta - \beta\epsilon$ と相関を持つ．(1.3), (1.4) から

$$Cov(Y, \delta - \beta\epsilon) = E[Y(\delta - \beta\epsilon)] = E[(\xi + \epsilon)(\delta - \beta\epsilon)] = -\beta\sigma_\epsilon^2$$

になる．よって，$\sigma_\epsilon^2 = 0$ （回帰モデルの場合）または $\beta = 0$ の場合にその相関は 0 になる．また，等式 (1.5) は観測可能な確率変数 Y, W の間の構造関係と呼ばれ，これは変数 ξ, η の間の関数関係から生ずる結果である．また，モデル (1.4) において，Y の値が与えられた時に W を予測する問題あるいは Y の値が与えられた時に η を予測する問題も考えることもできる．

本論では，変数 ξ, η の間に (1.5) とは異なる関数関係をもつモデルにおいて，係数の推定をモーメント法によって行う．

2 変数誤差モデル

いま，$Y_j (j = 1, \ldots, n)$ を従属変数，$\xi_{ij} (i = 1, \ldots, k; j = 1, \ldots, n)$ を説明変数として，モデル

$$Y_j = \alpha + \sum_{i=1}^{k} \beta_i \xi_{ij} + \sum_{i=1}^{k} \gamma_i \xi_{ij}^2 + \epsilon_j \qquad (j = 1, \ldots, n) \tag{2.1}$$

$$W_{ij} = \delta_j \xi_{ij} \qquad (i = 1, \ldots, k;\ j = 1, \ldots, n) \tag{2.2}$$

を考える．ここで，$\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n$ は互いに独立にいずれも正規分布 $N(0, \sigma^2)$ に従うとし，また，$\delta_1, \ldots, \delta_n$ は互いに独立にいずれも原点周りの l 次モーメント $\mu_l (\neq 0)$ $(l = 1, 2, 3, 4)$ をもつ分布に従うとし，さらに，各 $i = 1, \ldots, k$ について，$(Y_1, \ldots, Y_n)$ と $(W_{i1}, \ldots, W_{in})$ は互いに独立な観測可能な確率ベクトルとする．ただし，σ^2 は未知で，μ_l $(l = 1, 2, 3, 4)$ は既知とする．このとき，$\mu_1 = 1$ として一般性を失わない．実際，一般に平均が μ_1 の場合に

$$\delta_j' := \delta_j / \mu_1 ,\ \xi_{ij}' := \mu_1 \xi_{ij} \qquad (i = 1, \ldots, k; j = 1, \ldots, n)$$

とすれば，(2.2) より，

$$W_{ij} = \delta_j' \xi_{ij}' \qquad (i = 1, \ldots, k;\ j = 1, \ldots, n)$$

になる．また，$\beta_i' := \beta_i / \mu_1, \gamma_i' := \gamma_i / \mu_1^2$ $(i = 1, \ldots, k)$ とすれば

$$Y_j = \alpha + \sum_{i=1}^{k} \beta_i' \xi_{ij}' + \sum_{i=1}^{k} \gamma_i' \xi_{ij}'^2 + \epsilon_j \qquad (j = 1, \ldots, n)$$

になる．従って，上のような変換によってモデル (2.1), (2.2) の形が保存された上で，

$$E(\delta_j') = 1 \qquad (j = 1, \ldots, n)$$

になる．

上記のモデル (2.1), (2.2) において，観測可能な確率ベクトル $(Y_1, \ldots, Y_n), (W_{i1}, \ldots, W_{in})$ $(i = 1, \ldots, k)$ から α, β_i $(i = 1, \ldots, k)$ を推定する問題を考える．

3 モーメント法による推定

モデル (2.1), (2.2) において， α, β_i $(i=1,\ldots,k)$ を最尤法によって推定量を求めることは難しい．そこで，モーメント法による推定を行う．まず,

$$\bar{Y} := \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} Y_j\,, \qquad \bar{\xi}_i := \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \xi_{ij}\,, \qquad \overline{\xi_i^2} := \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \xi_{ij}^2 \qquad (i=1,\ldots,k)$$

とおくと，(2.1) から

$$E(\bar{Y}) = \alpha + \sum_{i=1}^{k} \beta_i \bar{\xi}_i + \sum_{i=1}^{k} \gamma_i \overline{\xi_i^2} \tag{3.1}$$

になる．また

$$\bar{W}_i := \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} W_{ij}\,, \qquad \overline{W_i^2} := \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} W_{ij}^2 \qquad (i=1,\ldots,k)$$

とおくと,

$$E(\bar{W}_i) = \bar{\xi}_i\,, \qquad E(\overline{W_i^2}) = \mu_2 \overline{\xi_i^2} \qquad (i=1,\ldots,k) \tag{3.2}$$

になる．次に，(2.2), (3.1) より，各 $i=1,\ldots,k$ について

$$E\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} W_{ij} Y_j\right) = \alpha \bar{\xi}_i + \sum_{i'=1}^{k} \beta_{i'} \left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \xi_{ij}\xi_{i'j}\right) + \sum_{i'=1}^{k} \gamma_{i'} \left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \xi_{ij}\xi_{i'j}^2\right)\,, \tag{3.3}$$

$$E\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} W_{ij}^2 Y_j\right) = \mu_2 \left\{ \alpha \overline{\xi_i^2} + \sum_{i'=1}^{k} \beta_{i'} \left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \xi_{ij}^2\xi_{i'j}\right) + \sum_{i'=1}^{k} \gamma_{i'} \left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \xi_{ij}^2\xi_{i'j}^2\right) \right\} \tag{3.4}$$

を得る．いま，(2.2) より

$$\xi_{ij}\xi_{i'j} = \frac{1}{\mu_2} E(W_{ij}W_{i'j}) \qquad (i,\, i'=1,\ldots,k;\ j=1,\ldots,n)\,, \tag{3.5}$$

$$\xi_{ij}\xi_{i'j}^2 = \frac{1}{\mu_3} E(W_{ij}W_{i'j}^2) \qquad (i,\, i'=1,\ldots,k;\ j=1,\ldots,n)\,, \tag{3.6}$$

$$\xi_{ij}^2\xi_{i'j}^2 = \frac{1}{\mu_4} E(W_{ij}^2W_{i'j}^2) \qquad (i,\, i'=1,\ldots,k;\ j=1,\ldots,n) \tag{3.7}$$

になる．よって，(3.1), (3.2) より

$$E(\bar{Y}) = E\left[\alpha + \sum_{i=1}^{k} \beta_i \bar{W}_i + \frac{1}{\mu_2}\sum_{i=1}^{k} \gamma_i \overline{W_i^2}\right] \tag{3.8}$$

になり，また (3.2), (3.3), (3.5), (3.6) より

$$E\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}W_{ij}Y_j\right)=E\left[\alpha\bar{W}_i+\frac{1}{\mu_2}\sum_{i'=1}^{k}\beta_{i'}\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}W_{ij}W_{i'j}\right)+\frac{1}{\mu_3}\sum_{i'=1}^{k}\gamma_{i'}\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}W_{ij}W_{i'j}^2\right)\right]$$

$$(i=1,\dots,k) \quad (3.9)$$

になり，さらに (3.2), (3.4), (3.6), (3.7) より

$$E\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}W_{ij}^2Y_j\right)=E\left[\alpha\overline{W_i^2}+\frac{\mu_2}{\mu_3}\sum_{i'=1}^{k}\beta_{i'}\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}W_{ij}^2W_{i'j}\right)+\frac{\mu_2}{\mu_4}\sum_{i'=1}^{k}\gamma_{i'}\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}W_{ij}^2W_{i'j}^2\right)\right]$$

$$(i=1,\dots,k) \quad (3.10)$$

になる．ゆえに，(3.8), (3.9), (3.10) より，モーメント法によって

$$\bar{Y}=\alpha+\sum_{i=1}^{k}\beta_i\bar{W}_i+\frac{1}{\mu_2}\sum_{i=1}^{k}\gamma_i\overline{W_i^2}, \quad (3.11)$$

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}W_{ij}Y_j=\alpha\bar{W}_i+\frac{1}{\mu_2}\sum_{i'=1}^{k}\beta_{i'}\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}W_{ij}W_{i'j}\right)+\frac{1}{\mu_3}\sum_{i'=1}^{k}\gamma_{i'}\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}W_{ij}W_{i'j}^2\right)$$

$$(i=1,\dots,k), \quad (3.12)$$

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}W_{ij}^2Y_j=\alpha\overline{W_i^2}+\frac{\mu_2}{\mu_3}\sum_{i'=1}^{k}\beta_{i'}\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}W_{ij}^2W_{i'j}\right)+\frac{\mu_2}{\mu_4}\sum_{i'=1}^{k}\gamma_{i'}\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}W_{ij}^2W_{i'j}^2\right)$$

$$(i=1,\dots,k) \quad (3.13)$$

を $\alpha, \beta_1,\dots,\beta_k, \gamma_1,\dots,\gamma_k$ について解いたときの解がモーメント法による推定量になる．

特に，$\delta_1,\dots,\delta_n$ が互いに独立にいずれも密度

$$f(\delta)=\begin{cases} e^{-\delta} & (\delta>0) \\ 0 & (\delta\le 0)\end{cases},$$

をもつ指数分布 $Exp(1)$ に従うとすれば，

$$E(\delta_1)=1, \qquad E(\delta_1^2)=2, \qquad E(\delta_1^3)=6, \qquad E(\delta_1^4)=24$$

になる．さらに，モデル (2.1) において，$k=1, \gamma_1=0$ とすれば，(3.11), (3.12) より

$$\bar{Y}=\alpha+\beta_1\bar{W}_1 \quad (3.14)$$

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}W_{1j}Y_j=\alpha\bar{W}_1+\frac{\beta_1}{2n}\sum_{j=1}^{n}W_{1j}^2 \quad (3.15)$$

となるから，(3.14) より $\alpha=\bar{Y}-\beta_1\bar{W}_1$ となりこれを (3.15) に代入して β_1 について解けば

$$\beta_1=\frac{\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{j=1}^{n}(Y_j-\bar{Y})(W_{1j}-\bar{W}_1)}{\dfrac{1}{2n}\displaystyle\sum_{j=1}^{n}W_{1j}^2-\bar{W}_1^2} \quad (3.16)$$

になる．これは通常の回帰モデルの場合とは異なり，$\sum_{j=1}^{n}W_{1j}^2$ の係数が $1/n$ ではなく，$1/(2n)$ となることに注意．

参考文献

[F87] Fuller, W. (1987). *Measurement Error Models.* Wiley, New York

[KS79] Kendall, M. G. and Stuart, A. (1979). *The Advanced Theory of Statistics Vol. 2*, (Fourth ed.), Charles Griffin, London