数理解析研究所講究録
1161 巻 2000 年 27-45

Minimum Variance Unbiased Estimation for the Multiparameter Exponential Family of Distributions

筑波大・数学　鈴木　邦彦 (Kunihiko Suzuki)

1　はじめに

統計的推定論において，未知の母数の点推定問題は重要であり，実際には，未知の母数をもつ母集団分布からの無作為標本に基づいて点推定を考える．まず，母数空間の値をとる標本の関数を (母数の) 推定量といい，何らかの意味で望ましい推定量を求めることが推定問題の一つの主要なテーマである．しかし，推定量全体のクラスの中で何らかの意味で最良な推定量は一般には存在しない．そこで，母数の不偏推定量全体のクラスに制限して，その分散を母数について一様に最小にする推定量すなわち一様最小分散不偏推定量 (uniformly minimum variance unbiased estimator, 略して UMVUE) を求める問題が重要になる．この問題については，すでにかなり詳細に検討されている (Washio, Morimoto and Ikeda [WMI56], Zacks [Z71], Lehmann and Casella [LC98], Roussas [R97], Voinov and Nikulin [VN93])．しかし，母数そのものではなく，母数の関数の不偏推定における，UMVUE の構成法については，まだ検討の余地があるように思われる．実際，1 母数指数型分布族の場合に，母数のある関数の UMVUE の構成について Jani and Dave [JD90] は論じたが，本論において多母数指数型分布族の場合について，母数の関数の UMVUE の構成について考察する．

2　多母数指数型分布族における最小分散不偏推定 (I)

確率ベクトル (X,Y) がルベーグ測度に関する確率密度関数 (probability density function, 略して p.d.f.)

$$f_{X,Y}(x,y;\boldsymbol{\theta}) = a(x,y)b(\boldsymbol{\theta})\exp\left[\sum_{i=1}^{l} c_i(\boldsymbol{\theta})d_i(x,y)\right], \quad (x,y)\in\mathcal{X}\times\mathcal{Y}\subset\boldsymbol{R}^2, \quad \boldsymbol{\theta}\in\boldsymbol{\Theta}\subset\boldsymbol{R}^k \tag{2.1}$$

をもつとき，その分布族 $\mathcal{P}=\{P_{\boldsymbol{\theta}}:\boldsymbol{\theta}\in\boldsymbol{\Theta}\}$ を k 次元指数型分布族という．ただし，$a(\cdot)$, $b(\cdot)$ は非負値関数とし，$c_i(\cdot)$, $d_i(\cdot)$ $(i=1,\dots,l)$ は実数値関数とする．このとき，その p.d.f. は，

$$f_{X,Y}(x,y;\boldsymbol{\theta}) = \frac{a(x,y)\prod_{i=1}^{l}[h_i(\boldsymbol{\theta})]^{d_i(x,y)}}{g(\boldsymbol{\theta})}, \quad (x,y)\in\mathcal{X}\times\mathcal{Y}\subset\boldsymbol{R}^2, \quad \boldsymbol{\theta}\in\boldsymbol{\Theta}\subset\boldsymbol{R}^k \tag{2.2}$$

とも表すことができる．ここで，

$$g(\boldsymbol{\theta}) = \int_{\mathcal{X}}\int_{\mathcal{Y}} a(x,y)\prod_{i=1}^{l}[h_i(\boldsymbol{\theta})]^{d_i(x,y)}\,dx\,dy, \quad h_i(\boldsymbol{\theta}) = \exp[c_i(\boldsymbol{\theta})] \ (i=1,\dots,l)$$

とする．

いま，$(X_1, Y_1), \ldots, (X_n, Y_n)$ を，(2.2) の p.d.f. をもつ分布族からの大きさ n の無作為標本ベクトルとする．このとき，$(X_1, Y_1), \ldots, (X_n, Y_n)$ の同時確率密度関数 (joint (j.) p.d.f.) は，

$$f_{\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y};\boldsymbol{\theta}) = \frac{(a(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}))^n \prod_{i=1}^{l} [h_i(\boldsymbol{\theta})]^{\sum_{j=1}^n d_i(x_j,y_j)}}{(g(\boldsymbol{\theta}))^n},$$
$$(x_j, y_j) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \subset \boldsymbol{R}^2 \, (j = 1, \ldots, n), \ \boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta} \subset \boldsymbol{R}^k$$

である．ただし，$\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)$, $\boldsymbol{Y} = (Y_1, \ldots, Y_n)$, $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, $\boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ とする．ここで，$z_i := \sum_{j=1}^n d_i(x_j, y_j) \, (i = 1, \ldots, l)$ で，$z_1 \in (0, \infty), \ldots, z_l \in (0, \infty)$ とすると，$\boldsymbol{Z} := (Z_1, \ldots, Z_l)$ の j.p.d.f. は，

$$f_{\boldsymbol{Z}}(z_1, \ldots, z_l; \boldsymbol{\theta}) = \frac{B(z_1, \ldots, z_l, n) \prod_{i=1}^{l} [h_i(\boldsymbol{\theta})]^{z_i}}{(g(\boldsymbol{\theta}))^n},$$
$$z_i \in (0, \infty) \, (i = 1, \ldots, l), \ \boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta} \subset \boldsymbol{R}^k$$

になる．ただし，$B(z_1, \ldots, z_l, n)$ は

$$(g(\boldsymbol{\theta}))^n = \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty B(z_1, \ldots, z_l, n) \prod_{i=1}^{l} [h_i(\boldsymbol{\theta})]^{z_i} \, dz_1 \cdots dz_l$$

とする．このとき，因子分解定理より，$(Z_1, \ldots, Z_l)$ は $\boldsymbol{\theta}$ に対する十分統計量である．一般に，完備十分統計量の関数となる不偏推定量が存在すれば，それが UMVUE になる．

次に，Jani and Dave [JD90] の結果を多母数の場合に拡張して，母数 $\boldsymbol{\theta}$ の関数 $\prod_{i=1}^{l} \{h_i(\boldsymbol{\theta})\}^k$ の推定問題を考察する．

定理 2.1 $(X_1, Y_1), \ldots, (X_n, Y_n)$ を (2.2) の p.d.f. をもつ k 次元指数型分布族からの無作為標本ベクトルとする．このとき，

$$H_k(Z_1, \ldots, Z_l, n) = \begin{cases} \dfrac{B(Z_1 - k_1, \ldots, Z_l - k_l, n)}{B(Z_1, \ldots, Z_l, n)} & (Z_1 > k_1, \ldots, Z_l > k_l), \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases} \tag{2.3}$$

は，$\prod_{i=1}^{l} \{h_i(\boldsymbol{\theta})\}^{k_i}$ の UMVUE である．ただし，$k_1, \ldots, k_l$ は正の数とする．

(証明) まず，(2.3) より，

$$E_{\boldsymbol{\theta}}[H_k(Z_1, \ldots, Z_l, n)]$$
$$= \int_{z_l > k_l} \cdots \int_{z_1 > k_1} \frac{B(z_1 - k_1, \ldots, z_l - k_l, n)}{B(z_1, \ldots, z_l, n)} \cdot \frac{B(z_1, \ldots, z_l, n) \prod_{i=1}^{l} [h_i(\boldsymbol{\theta})]^{z_i}}{(g(\boldsymbol{\theta}))^n} \, dz_1 \cdots dz_l$$

$$
\begin{aligned}
&= \prod_{i=1}^{l}\{h_i(\boldsymbol{\theta})\}^{k_i}\int_{z_l>k_l}\cdots\int_{z_1>k_1}\frac{B(z_1-k_1,\ldots,z_l-k_l,n)\prod_{i=1}^{l}[h_i(\boldsymbol{\theta})]^{z_i-k_i}}{(g(\boldsymbol{\theta}))^n}\,dz_1\cdots dz_l \\
&= \prod_{i=1}^{l}\{h_i(\boldsymbol{\theta})\}^{k_i}\int_{w_l>0}\cdots\int_{w_1>0}\frac{B(w_1,\ldots,w_l,n)\prod_{i=1}^{l}[h_i(\boldsymbol{\theta})]^{w_i}}{(g(\boldsymbol{\theta}))^n}\,dw_1\cdots dw_l \\
&= \prod_{i=1}^{l}\{h_i(\boldsymbol{\theta})\}^{k_i}
\end{aligned}
$$

となるから，H_k は $\prod_{i=1}^{l}\{h_i(\boldsymbol{\theta})\}^{k_i}$ の不偏推定量になる．また，(2.2) から H_k は完備十分統計量 $(Z_1,\ldots,Z_l)$ の関数になる．よって，H_k は $\prod_{i=1}^{l}\{h_i(\boldsymbol{\theta})\}^{k_i}$ の UMVUE になる． □

次に，$\{g(\boldsymbol{\theta})\}^k$ の推定問題を考える．

定理 2.2　$(X_1,Y_1),\ldots,(X_n,Y_n)$ を (2.2) の p.d.f. をもつ k 次元指数型分布族からの無作為標本ベクトルとする．このとき，

$$
G_k(Z_1,\ldots,Z_l,n):=\frac{B(Z_1,\ldots,Z_l,n+k)}{B(Z_1,\ldots,Z_l,n)} \tag{2.4}
$$

は，$\{g(\boldsymbol{\theta})\}^k$ の UMVUE である．

(証明) (2.4) より，

$$
\begin{aligned}
&E_{\boldsymbol{\theta}}[G_k(Z_1,\ldots,Z_l,n)] \\
&= \int_{z_l>0}\cdots\int_{z_1>0}\frac{B(z_1,\ldots,z_l,n+k)}{B(z_1,\ldots,z_l,n)}\cdot\frac{B(z_1,\ldots,z_l,n)\prod_{i=1}^{l}[h_i(\boldsymbol{\theta})]^{z_i}}{(g(\boldsymbol{\theta}))^n}\,dz_1\cdots dz_l \\
&= \{g(\boldsymbol{\theta})\}^k\int_{z_l>0}\cdots\int_{z_1>0}\frac{B(z_1,\ldots,z_l,n+k)\prod_{i=1}^{l}[h_i(\boldsymbol{\theta})]^{z_i}}{(g(\boldsymbol{\theta}))^{n+k}}\,dz_1\cdots dz_l \\
&= \{g(\boldsymbol{\theta})\}^k\int_{z_l>0}\cdots\int_{z_1>0}\frac{B(z_1,\ldots,z_l,m)\prod_{i=1}^{l}[h_i(\boldsymbol{\theta})]^{z_i}}{(g(\boldsymbol{\theta}))^{m}}\,dz_1\cdots dz_l \\
&= \{g(\boldsymbol{\theta})\}^k
\end{aligned}
$$

となるから，G_k は $\{g(\boldsymbol{\theta})\}^k$ の不偏推定量になる．ただし，$m=n+k$ とする．また，(2.2) から，G_k は完備十分統計量 $(Z_1,\ldots,Z_l)$ の関数になる．よって，G_k は $\{g(\boldsymbol{\theta})\}^k$ の UMVUE になる． □

次に，確率密度関数 $f_{X,Y}(x,y;\boldsymbol{\theta})$ の推定問題を考える．

定理 2.3 $(X_1, Y_1), \ldots, (X_n, Y_n)$ を (2.2) の p.d.f. をもつ k 次元指数型分布族からの無作為標本ベクトルとする．ただし，$n \geq 2$ とする．このとき，

$$\Phi_{x,y}(Z_1, \ldots, Z_l, n) = \begin{cases} \dfrac{a(x,y)B(Z_1 - d_1(x,y), \ldots, Z_l - d_l(x,y), n-1)}{B(Z_1, \ldots, Z_l, n)} \\ \qquad\qquad (Z_1 > d_1(x,y), \ldots, Z_l > d_l(x,y)), \\ 0 \qquad\qquad (\text{その他}) \end{cases} \tag{2.5}$$

は，$f_{X,Y}(x, y; \boldsymbol{\theta})$ の UMVUE である．

(証明) (2.5) より，

$$\begin{aligned}
& E_{\boldsymbol{\theta}}[\Phi_{x,y}(Z_1, \ldots, Z_l, n)] \\
= & \int_{z_l > d_l(x,y)} \cdots \int_{z_1 > d_1(x,y)} \frac{a(x,y)B(z_1 - d_1(x,y), \ldots, z_l - d_l(x,y), n-1)}{B(z_1, \ldots, z_l, n)} \\
& \qquad \cdot \frac{B(z_1, \ldots, z_l, n) \prod_{i=1}^{l} [h_i(\boldsymbol{\theta})]^{z_i}}{(g(\boldsymbol{\theta}))^n} dz_1 \cdots dz_l \\
= & \frac{a(x,y) \prod_{i=1}^{l} [h_i(\boldsymbol{\theta})]^{d_i(x,y)}}{g(\boldsymbol{\theta})} \int_{z_l > d_l(x,y)} \cdots \int_{z_1 > d_1(x,y)} B(z_1 - d_1(x,y), \ldots, z_l - d_l(x,y), n-1) \\
& \qquad \cdot \frac{\prod_{i=1}^{l} [h_i(\boldsymbol{\theta})]^{z_i - d_i(x,y)}}{(g(\boldsymbol{\theta}))^{n-1}} dz_1 \cdots dz_l \\
= & \frac{a(x,y) \prod_{i=1}^{l} [h_i(\boldsymbol{\theta})]^{d_i(x,y)}}{g(\boldsymbol{\theta})} \int_{w_l > 0} \cdots \int_{w_1 > 0} \frac{B(w_1, \ldots, w_l, m) \prod_{i=1}^{l} [h_i(\boldsymbol{\theta})]^{w_i}}{(g(\boldsymbol{\theta}))^m} dw_1 \cdots dw_l \\
= & f_{X,Y}(x, y; \boldsymbol{\theta})
\end{aligned}$$

となるから，$\Phi_{x,y}$ は $f_{X,Y}(x, y; \boldsymbol{\theta})$ の不偏推定量になる．ただし，$m = n - 1$ とする．また，(2.2) から，Φ_x は完備十分統計量 $(Z_1, \ldots, Z_l)$ の関数になる．よって，$\Phi_{x,y}$ は $f_{X,Y}(x, y; \boldsymbol{\theta})$ の UMVUE になる． □

定理 2.1 ~ 2.3 による構成法に基づいて，指数分布，正規分布，対数正規分布の母数の UMVUE を求めることができる．

例 2.1 (指数分布). $n \geq 2$ とするとき，$(X_1, Y_1), \ldots, (X_n, Y_n)$ を p.d.f.

$$f_{X,Y}(x, y; \alpha, \beta) = \begin{cases} \alpha\beta e^{-\alpha x - \beta y} & (x > 0,\ y > 0), \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

をもつ指数分布からの無作為標本ベクトルとする．ただし，$\alpha > 0, \beta > 0$ とする．このとき，$(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$ の j.p.d.f. は，

$$f_{\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}; \alpha, \beta) = \begin{cases} \alpha^n \beta^n \exp\left(-\alpha \sum_{i=1}^n x_i - \beta \sum_{i=1}^n y_i\right) & (x_i > 0,\ y_i > 0\,(i = 1, \ldots, n)), \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

になるから，$Z_1 = \sum_{i=1}^n X_i, Z_2 = \sum_{i=1}^n Y_i$ とすると，$\boldsymbol{Z} := (Z_1, Z_2)$ は (α, β) に対して完備十分統計量になる．また，$\boldsymbol{Z} := (Z_1, Z_2)$ の j.p.d.f. は

$$f_{\boldsymbol{Z}}(z_1, z_2; \alpha, \beta) = \begin{cases} \dfrac{\alpha^n \beta^n}{\{(n-1)!\}^2} {z_1}^{n-1} {z_2}^{n-1} \left(e^{-\alpha}\right)^{z_1} \left(e^{-\beta}\right)^{z_2} & (z_1 > 0,\ z_2 > 0), \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases} \tag{2.6}$$

になる．このとき，

$$B(z_1, z_2, n) = \frac{{z_1}^{n-1} {z_2}^{n-1}}{\{(n-1)!\}^2}$$

になる．したがって，定理 2.1 より，$\exp(-\alpha - \beta)$ のUMVUEは，

$$H_2(Z_1, Z_2, n) := \begin{cases} \dfrac{(Z_1 - 1)^{n-1}(Z_2 - 1)^{n-1}}{{Z_1}^{n-1} {Z_2}^{n-1}} = \left(1 - \dfrac{1}{Z_1}\right)^{n-1} \left(1 - \dfrac{1}{Z_2}\right)^{n-1} & \\ & (Z_1 > 1,\ Z_2 > 1), \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

になる．また，定理 2.2 より，$1/(\alpha\beta)$ の UMVUE は，

$$G_1(Z_1, Z_2, n) := \frac{Z_1 Z_2}{n^2}$$

になる．また，定理 2.3 より $f_{X,Y}(x, y; \alpha, \beta)$ の UMVUE は，

$$\Phi_{x,y}(Z_1, Z_2, n) := \begin{cases} \dfrac{\{(n-1)!\}^2}{\{(n-2)!\}^2} \dfrac{(Z_1 - x)^{n-2}(Z_2 - y)^{n-2}}{{Z_1}^{n-1} {Z_2}^{n-1}} & (Z_1 > x,\ Z_2 > y), \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

になる．

特に，$\alpha = 2, \beta = 3$ の場合に $n = 20, 50$ について，その p.d.f. $f_{X,Y}(x, y; 2, 3)$ とその UMVUE $\Phi_{x,y}(Z_1, Z_2, n)$ の値を数値計算によって求め，それらを表 2.1 において，$f_{X,Y}(x, y; 2, 3)$ の値，$\Phi_{x,y}(Z_1, Z_2, n)$ の値，およびその相対誤差 $\{\Phi_{x,y}(Z_1, Z_2, n) - f_{X,Y}(x, y; 2, 3)\}/f_{X,Y}(x, y; 2, 3)$ の値を示す．

表 2.1　各 (x,y) における $\alpha=2,\beta=3$ の p.d.f. $f_{X,Y}(x,y;2,3)$ の値 (上段) とその UMVUE の値 (中段) とその相対誤差 (下段)

$n=20$ の場合

$x \backslash y$	0	0.4	0.8	1.2	1.6	2.0	2.4	2.8	3.2
0	6.0000000	1.8071653	0.5443077	0.1639423	0.0493785	0.0148725	0.0044795	0.0013492	0.0004064
	5.4312391	1.7837811	0.5443633	0.1527686	0.0389262	0.0088636	0.0017676	0.0003007	0.0000422
	-0.0947935	-0.0129397	0.0001021	-0.0681564	-0.2116759	-0.4040253	-0.6054042	-0.7770909	-0.8962286
0.4	2.6959738	0.8120117	0.2445732	0.0736640	0.0221872	0.0066827	0.0020128	0.0006062	0.0001826
	2.5984341	0.8534034	0.2604364	0.0730881	0.0186232	0.0042406	0.0008457	0.0001439	0.0000202
	-0.0361798	0.0509742	0.0648605	-0.0078179	-0.1606305	-0.3654349	-0.5798535	-0.7626571	-0.8895092
0.8	1.2113791	0.3648604	0.1098938	0.0330994	0.0099693	0.0030027	0.0009044	0.0002724	0.0000820
	1.2046138	0.3956312	0.1207363	0.0338831	0.0086336	0.0019659	0.0003920	0.0000667	0.0000094
	-0.0055848	0.0843358	0.0986628	0.0236774	-0.1339861	-0.3452916	-0.5665166	-0.7551230	-0.8860018
1.2	0.5443077	0.1639423	0.0493785	0.0148725	0.0044795	0.0013492	0.0004064	0.0001224	0.0000369
	0.5396182	0.1772267	0.0540850	0.0151783	0.0038675	0.0008806	0.0001756	0.0000299	0.0000042
	-0.0086156	0.0810309	0.0953143	0.0205574	-0.1366255	-0.3472870	-0.5678377	-0.7558694	-0.8863493
1.6	0.2445732	0.0736640	0.0221872	0.0066827	0.0020128	0.0006062	0.0001826	0.0000550	0.0000166
	0.2328285	0.0764678	0.0233360	0.0065489	0.0016687	0.0003800	0.0000758	0.0000129	0.0000018
	-0.0480213	0.0380619	0.0517776	-0.0200079	-0.1709431	-0.3732312	-0.5850154	-0.7655731	-0.8908667
2.0	0.1098938	0.0330994	0.0099693	0.0030027	0.0009044	0.0002724	0.0000820	0.0000247	0.0000074
	0.0964051	0.0316623	0.0096625	0.0027117	0.0006909	0.0001573	0.0000314	0.0000053	0.0000007
	-0.1227433	-0.0434168	-0.0307777	-0.0969287	-0.2360168	-0.4224270	-0.6175880	-0.7839736	-0.8994327
2.4	0.0493785	0.0148725	0.0044795	0.0013492	0.0004064	0.0001224	0.0000369	0.0000111	0.0000033
	0.0381448	0.0125279	0.0038232	0.0010729	0.0002734	0.0000623	0.0000124	0.0000021	0.0000003
	-0.2275023	-0.1576488	-0.1465190	-0.2047704	-0.3272491	-0.4913988	-0.6632544	-0.8097707	-0.9114421
2.8	0.0221872	0.0066827	0.0020128	0.0006062	0.0001826	0.0000550	0.0000166	0.0000050	0.0000015
	0.0143515	0.0047135	0.0014384	0.0004037	0.0001029	0.0000234	0.0000047	0.0000008	0.0000001
	-0.3531630	-0.2946724	-0.2853531	-0.3341289	-0.4366842	-0.5741320	-0.7180321	-0.8407149	-0.9258476
3.2	0.0099693	0.0030027	0.0009044	0.0002724	0.0000820	0.0000247	0.0000074	0.0000022	0.0000068
	0.0051047	0.0016765	0.0005116	0.0001436	0.0000366	0.0000083	0.0000017	0.0000003	0.0000000
	-0.4879573	-0.4416555	-0.4342782	-0.4728896	-0.5540734	-0.6628786	-0.7767914	-0.8739083	-0.9413002

表 2.1 (続)　各 (x,y) における $\alpha=2,\beta=3$ の p.d.f. $f_{X,Y}(x,y;2,3)$ の値 (上段) とその UMVUE の値 (中段) とその相対誤差 (下段)

$n=50$ の場合

$x\backslash y$	0	0.4	0.8	1.2	1.6	2.0	2.4	2.8	3.2
0	6.0000000	1.8071653	0.5443077	0.1639423	0.0493785	0.0148725	0.0044795	0.0013492	0.0004064
	6.0617391	1.8532571	0.5498516	0.1580702	0.0439560	0.0118021	0.0030536	0.0007597	0.0001813
	0.0102898	0.0255050	0.0101852	-0.0358185	-0.1098151	-0.2064500	-0.3183161	-0.4369149	-0.5537983
0.4	2.6959738	0.8120117	0.2445732	0.0736640	0.0221872	0.0066827	0.0020128	0.0006062	0.0001826
	2.7189366	0.8312612	0.2466308	0.0709009	0.0197160	0.0052937	0.0013697	0.0003408	0.0000813
	0.0085175	0.0237060	0.0084130	-0.0375100	-0.1113767	-0.2078422	-0.3195120	-0.4379027	-0.5545811
0.8	1.2113791	0.3648604	0.1098938	0.0330994	0.0099693	0.0030027	0.0009044	0.0002724	0.0000820
	1.2030563	0.3678107	0.1091275	0.0313717	0.0087238	0.0023423	0.0006060	0.0001508	0.0000360
	-0.0068705	0.0080862	-0.0069734	-0.0521957	-0.1249354	-0.2199289	-0.3298949	-0.4464792	-0.5613773
1.2	0.5443077	0.1639423	0.0493785	0.0148725	0.0044795	0.0013492	0.0004064	0.0001224	0.0000369
	0.5248720	0.1604693	0.0476104	0.0136869	0.0038060	0.0010219	0.0002644	0.0000658	0.0000157
	-0.0357072	-0.0211848	-0.0358071	-0.0797163	-0.1503439	-0.2425792	-0.3493522	-0.4625514	-0.5741132
1.6	0.2445732	0.0736640	0.0221872	0.0066827	0.0020128	0.0006062	0.0001826	0.0000550	0.0000166
	0.2256764	0.0689961	0.0204708	0.0058849	0.0016365	0.0004394	0.0001137	0.0000283	0.0000068
	-0.0772643	-0.0633677	-0.0773599	-0.1193768	-0.1869607	-0.2752210	-0.3773925	-0.4857132	-0.5924672
2.0	0.1098938	0.0330994	0.0099693	0.0030027	0.0009044	0.0002724	0.0000820	0.0000247	0.0000074
	0.0955779	0.0292211	0.0086697	0.0024924	0.0006931	0.0001861	0.0000481	0.0000120	0.0000029
	-0.1302703	-0.1171720	-0.1303604	-0.1699637	-0.2336652	-0.3168555	-0.4131578	-0.5152561	-0.6158777
2.4	0.0493785	0.0148725	0.0044795	0.0013492	0.0004064	0.0001224	0.0000369	0.0000111	0.0000033
	0.0398500	0.0121834	0.0036147	0.0010392	0.0002890	0.0000776	0.0000201	0.0000050	0.0000012
	-0.1929682	-0.1808141	-0.1930518	-0.2298001	-0.2889095	-0.3661026	-0.4554626	-0.5502008	-0.6435686
2.8	0.0221872	0.0066827	0.0020128	0.0006062	0.0001826	0.0000550	0.0000166	0.0000050	0.0000015
	0.0163473	0.0049979	0.0014828	0.0004263	0.0001185	0.0000318	0.0000082	0.0000020	0.0000005
	-0.2632097	-0.2521135	-0.2632860	-0.2968358	-0.3508005	-0.4212750	-0.5028574	-0.5893499	-0.6745913
3.2	0.0099693	0.0030027	0.0009044	0.0002724	0.0000820	0.0000247	0.0000074	0.0000022	0.0000068
	0.0065939	0.0020160	0.0005981	0.0001719	0.0000478	0.0000128	0.0000033	0.0000008	0.0000002
	-0.3385801	-0.3286190	-0.3386486	-0.3687665	-0.4172108	-0.4804761	-0.5537129	-0.6313576	-0.7078792

例 2.2 (正規分布). $n \geq 3$ とするとき，$(X_1, Y_1), \ldots, (X_n, Y_n)$ を p.d.f.

$$f_{X,Y}(x, y; \sigma_1, \sigma_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{\sigma_1{}^2} + \frac{y^2}{\sigma_2{}^2}\right)\right\}$$

をもつ 2 次元正規分布 $N_2(0, 0, \sigma_1{}^2, \sigma_2{}^2, 0)$ からの無作為標本ベクトルとする．ただし，$-\infty < x < \infty$, $-\infty < y < \infty$ で，$\sigma_1{}^2 > 0$, $\sigma_2{}^2 > 0$ とする．このとき，$Z_1 := \sum_{i=1}^n X_i{}^2, Z_2 := \sum_{i=1}^n Y_i^2$ とすると，$\boldsymbol{Z} := (Z_1, Z_2)$ は $(\sigma_1{}^2, \sigma_2{}^2)$ に対して完備十分統計量になり，$\boldsymbol{Z} := (Z_1, Z_2)$ の j.p.d.f. は，

$$f_{\boldsymbol{Z}}(z_1, z_2; \sigma_1{}^2, \sigma_2{}^2) = \begin{cases} \dfrac{(z_1 z_2)^{(n-2)/2}}{2^n \left\{\Gamma(\frac{n}{2})\right\}^2} \dfrac{\left(e^{-\frac{1}{2\sigma_1{}^2}}\right)^{z_1} \left(e^{-\frac{1}{2\sigma_2{}^2}}\right)^{z_2}}{(\sigma_1\sigma_2)^n} & (z_1 > 0,\ z_2 > 0), \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases} \tag{2.7}$$

になる．このとき，

$$B(z_1, z_2, n) = \frac{(z_1 z_2)^{(n-2)/2}}{2^n \left\{\Gamma(\frac{n}{2})\right\}^2}$$

になる．したがって，定理 2.1 より，$\exp(-\frac{1}{2\sigma_1{}^2} - \frac{1}{2\sigma_2{}^2})$ の UMVUE は，

$$H_2(Z_1, Z_2, n) = \begin{cases} \left\{\left(1 - \dfrac{1}{Z_1}\right)\left(1 - \dfrac{1}{Z_2}\right)\right\}^{(n-2)/2} & (z_1 > 1,\ z_2 > 1), \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

になる．また，定理 2.3 より，$f_{X,Y}(x, y; \sigma_1{}^2, \sigma_2{}^2)$ の UMVUE は，

$$\Phi_{x,y}(Z_1, Z_2, n) = \frac{1}{\left\{B(\frac{1}{2}, \frac{n-1}{2})\right\}^2} \frac{\{(Z_1 - x^2)(Z_2 - y^2)\}^{(n-3)/2}}{(Z_1 Z_2)^{(n-2)/2}} \mathcal{X}_{(Z_1, Z_2)}((x^2, \infty) \times (y^2, \infty))$$

になる．

特に，$\sigma_1{}^2 = 1$, $\sigma_2{}^2 = 4$ の場合，すなわち 2 次元正規分布 $N_2(0, 0, 1, 4, 0)$ の場合に $n = 20, 50$ について，その p.d.f. $f_{X,Y}(x, y; 1, 4)$ とその UMVUE $\Phi_{x,y}(Z_1, Z_2, n)$ の値を数値計算によって求め，それらを表 2.2 において，$f_{X,Y}(x, y; 1, 4)$ の値，$\Phi_{x,y}(Z_1, Z_2, n)$ の値，およびその相対誤差 $\{\Phi_{x,y}(Z_1, Z_2, n) - f_{X,Y}(x, y; 1, 4)\}/f_{X,Y}(x, y; 1, 4)$ の値を示す．

また，$X_1, \ldots, X_n$ を正規分布 $N(0, \sigma^2)$ からの無作為標本とすれば，$Z := \sum_{i=1}^n X_i{}^2$ は σ_2 に対する完備十分統計量になり，上記のことから $N(0, \sigma^2)$ の p.d.f. $f_X(x; \sigma^2)$ の UMVUE は

$$\Phi_x(Z, n) = \frac{Z^{-(n-2)/2}}{B\left(\frac{1}{2}, \frac{n-1}{2}\right)} (Z - x^2)^{(n-3)/2} \mathcal{X}_Z((x^2, \infty))$$

となる ([JD90], [VN93])．特に，$\sigma^2 = 1$ の場合，すなわち $N(0, 1)$ の場合に，$n = 20, 50$ について，その p.d.f. $f_X(x; 1)$ とその UMVUE $\Phi_x(Z, n)$ の様子を図 2.1 によって示し，数値計算の結果を表 2.3 で示す．

表 2.2　各 (x, y) における $N_2(0,0,1,4,0)$ の p.d.f. $f_{X,Y}(x, y; 1, 4)$ の値 (上段) とその UMVUE の値 (中段) とその相対誤差 (下段)

$n = 20$ の場合

$x \backslash y$	±4.0	±3.5	±3.0	±2.5	±2.0	±1.5	±1.0	±0.5	0
±4.0	0.0000036	0.0000058	0.0000087	0.0000122	0.0000162	0.0000202	0.0000236	0.0000259	0.0000267
	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
	-0.9113980	-0.8999360	-0.8922260	-0.8875350	-0.8849980	-0.8838340	-0.8834260	-0.8833470	-0.8833470
±3.5	0.0000236	0.0000376	0.0000565	0.0000797	0.0001056	0.0001314	0.0001536	0.0001687	0.0001741
	0.0000121	0.0000218	0.0000353	0.0000519	0.0000703	0.0000884	0.0001037	0.0001139	0.0001176
	-0.4870760	-0.4207250	-0.3760920	-0.3489310	-0.3342470	-0.3275060	-0.3251460	-0.3246860	-0.3246900
±3.0	0.0001196	0.0001912	0.0002870	0.0004047	0.0005362	0.0006673	0.0007802	0.0008568	0.0008840
	0.0001133	0.0002046	0.0003307	0.0004867	0.0006593	0.0008289	0.0009724	0.0010687	0.0011027
	-0.0526267	0.0699250	0.1523620	0.2025290	0.2296510	0.2421000	0.2464600	0.2473090	0.2473030
±2.5	0.0004732	0.0007561	0.0011351	0.0016008	0.0021207	0.0026392	0.0030856	0.0033888	0.0034964
	0.0005186	0.0009360	0.0015133	0.0022270	0.0030168	0.0037925	0.0044495	0.0048901	0.0050453
	0.0960174	0.2377980	0.3331690	0.3912080	0.4225850	0.4369870	0.4420310	0.4430130	0.4430060
±2.0	0.0014575	0.0023291	0.0034964	0.0049307	0.0065321	0.0081294	0.0095042	0.0104383	0.0107696
	0.0015107	0.0027263	0.0044081	0.0064870	0.0087877	0.0110472	0.0129608	0.0142443	0.0146964
	0.0364758	0.1705540	0.2607440	0.3156300	0.3453020	0.3589220	0.3636920	0.3646210	0.3646140
±1.5	0.0034964	0.0055872	0.0083874	0.0118281	0.0156697	0.0195013	0.0227993	0.0250402	0.0258350
	0.0031902	0.0057574	0.0093088	0.0136990	0.0185576	0.0233291	0.0273702	0.0300808	0.0310355
	-0.0875712	0.0304601	0.1098560	0.1581730	0.1842940	0.1962840	0.2004830	0.2013010	0.2012950
±1.0	0.0065321	0.0104383	0.0156697	0.0220979	0.0292749	0.0364332	0.0425948	0.0467812	0.0482662
	0.0052407	0.0094579	0.0152919	0.0225039	0.0304852	0.0383236	0.0449621	0.0494148	0.0509832
	-0.1977070	-0.0939224	-0.2410970	0.0183750	0.0413433	0.0518858	0.0555781	0.0562970	0.0562919
±0.5	0.0095042	0.0151876	0.0227993	0.0321522	0.0425948	0.0530100	0.0619750	0.0680662	0.0702269
	0.0069652	0.0125702	0.0203240	0.0299092	0.0405169	0.0509345	0.0597575	0.0656755	0.0677600
	-0.2671430	-0.1723410	-0.1085710	-0.0697631	-0.0487827	-0.0391526	-0.0357798	-0.0351232	-0.0351278
0	0.0107696	0.0172098	0.0258350	0.0364332	0.0482662	0.0600682	0.0702269	0.0771291	0.0795775
	0.0076421	0.0137918	0.0222992	0.0328159	0.0444545	0.0558846	0.0655651	0.0720582	0.0743452
	-0.2904020	-0.1986090	-0.1368620	-0.0992863	-0.0789718	-0.0696472	-0.0663816	-0.0657458	-0.0657502

表 2.2 (続)　各 (x, y) における $N_2(0,0,1,4,0)$ の p.d.f. $f_{X,Y}(x, y; 1, 4)$ の値 (上段) とその UMVUE の値 (中段) とその相対誤差 (下段)

$n = 50$ の場合

$x \backslash y$	±4.0	±3.5	±3.0	±2.5	±2.0	±1.5	±1.0	±0.5	0
±4.0	0.0000036	0.0000058	0.0000087	0.0000122	0.0000162	0.0000202	0.0000236	0.0000259	0.0000267
	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000112	0.0000149	0.0000181	0.0000204	0.0000212
	-0.5827610	-0.5015110	-0.4265130	-0.3605500	-0.3054190	-0.2621170	-0.2310920	-0.2124780	-0.2062780
±3.5	0.0000236	0.0000376	0.0000565	0.0000797	0.0001056	0.0001314	0.0001536	0.0001687	0.0001741
	0.0000140	0.0000267	0.0000461	0.0000724	0.0001042	0.0001378	0.0001679	0.0001889	0.0001964
	-0.4069600	-0.2914770	-0.1848780	-0.0911232	-0.0127628	0.0487843	0.0928810	0.1193380	0.1281510
±3.0	0.0001196	0.0001912	0.0002870	0.0004047	0.0005362	0.0006673	0.0007802	0.0008568	0.0008840
	0.0000822	0.0001570	0.0002711	0.0004263	0.0006135	0.0008111	0.0009882	0.0011116	0.0011559
	-0.3126660	-0.1788210	-0.0552729	0.0533895	0.1442090	0.2155420	0.2666510	0.2973140	0.3075290
±2.5	0.0004732	0.0007561	0.0011351	0.0016008	0.0021207	0.0026392	0.0030856	0.0033888	0.0034964
	0.0003341	0.0006379	0.0011017	0.0017324	0.0024930	0.0032959	0.0040154	0.0045168	0.0046968
	-0.2938410	-0.1563300	-0.0293977	0.0822408	0.1755480	0.2488350	0.3013430	0.3328460	0.3433410
±2.0	0.0014575	0.0023291	0.0034964	0.0049307	0.0065321	0.0081294	0.0095042	0.0104383	0.0107696
	0.0009918	0.0018936	0.0032703	0.0051423	0.0073998	0.0097833	0.0119187	0.0134070	0.0139415
	-0.3195040	-0.1869900	-0.0646711	0.0429103	0.1328270	0.2034500	0.2540500	0.2844080	0.2945210
±1.5	0.0034964	0.0055872	0.0083874	0.0118281	0.0156697	0.0195013	0.0227993	0.0250402	0.0258350
	0.0022356	0.0042681	0.0073712	0.0115906	0.0166790	0.0220514	0.0268646	0.0302193	0.0314241
	-0.3606040	-0.2360940	-0.1211620	-0.0200786	0.0644070	0.1307650	0.1783090	0.2068340	0.2163360
±1.0	0.0065321	0.0104383	0.0156697	0.0220979	0.0292749	0.0364332	0.0425948	0.0467812	0.0482662
	0.0039285	0.0075002	0.0129531	0.0203679	0.0293095	0.0387502	0.0472084	0.0531035	0.0552206
	-0.3985850	-0.2814710	-0.1733660	-0.0782870	0.0011801	0.0635965	0.1083160	0.1351470	0.1440840
±0.5	0.0095042	0.0151876	0.0227993	0.0321522	0.0425948	0.0530100	0.0619750	0.0680662	0.0702269
	0.0054747	0.0104522	0.0180512	0.0283843	0.0408451	0.0540016	0.0657888	0.0740041	0.0769544
	-0.4239680	-0.3117970	-0.2082550	-0.1171890	-0.0410758	0.0187062	0.0615382	0.0872364	0.0957969
0	0.0107696	0.0172098	0.0258350	0.0364332	0.0482662	0.0600682	0.0702269	0.0771291	0.0795775
	0.0061088	0.0116628	0.0201420	0.0316719	0.0455759	0.0602563	0.0734087	0.0825755	0.0858675
	-0.4327750	-0.3223190	-0.2203610	-0.1306870	-0.0557373	0.0031306	0.0453078	0.0706130	0.0790426

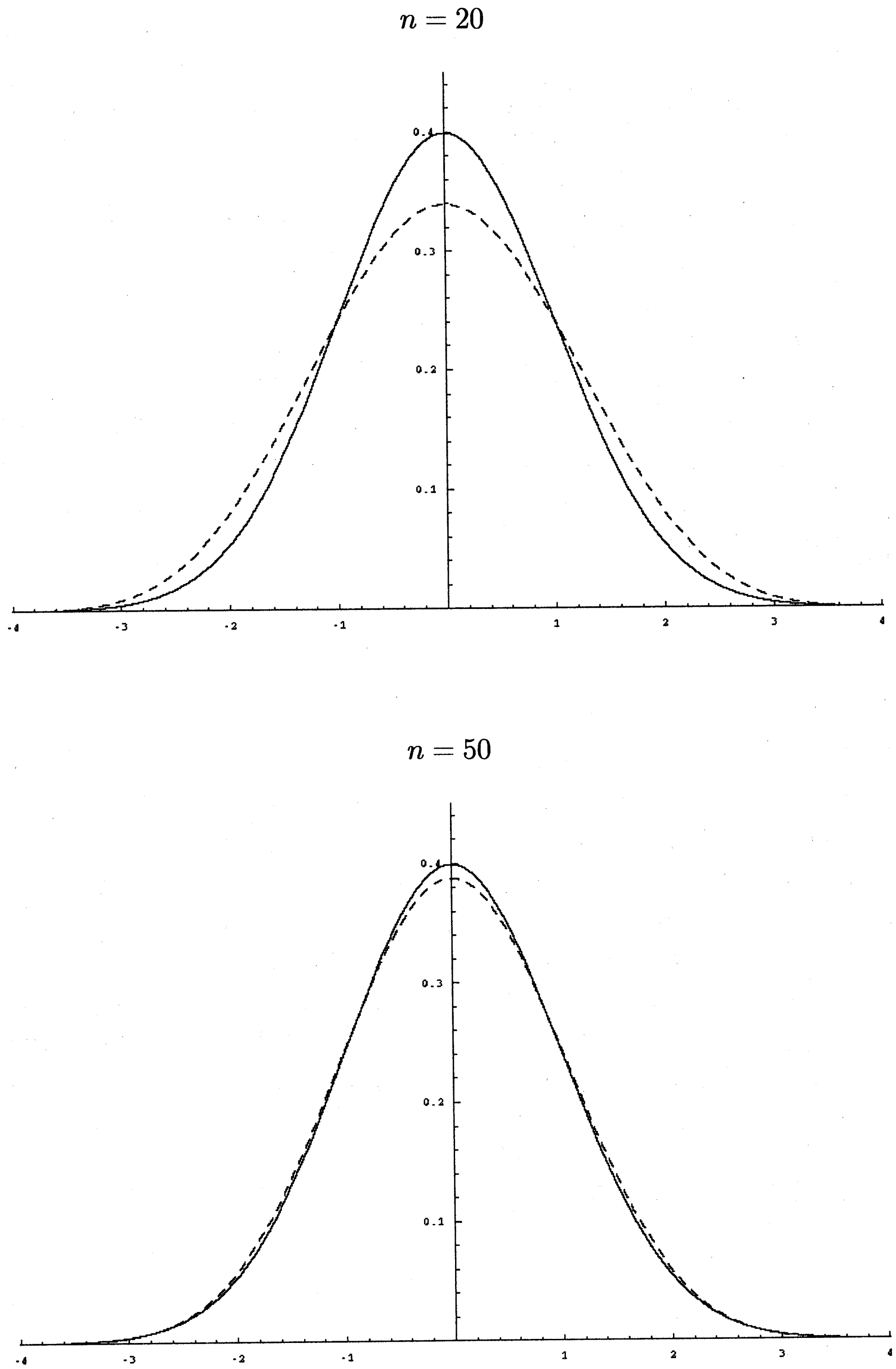

図 2.1　$N(0,1)$ の p.d.f. $f_X(x;1)$ (実線) とその UMVUE $\Phi_x(Z,n)$ (点線)

表 2.3　$N(0,1)$ の p.d.f. $f_X(x;1)$ の値 (真値), UMVUE $\Phi_x(Z,n)$ の値とその相対誤差

$n=20$ の場合

x	真値	UMVUE	相対誤差
±4.0	0.00013	0.00008	-0.39754
±3.8	0.00029	0.00029	-0.00512
±3.6	0.00061	0.00084	0.36974
±3.4	0.00123	0.00205	0.66268
±3.2	0.00238	0.00440	0.84584
±3.0	0.00443	0.00852	0.92210
±2.8	0.00792	0.01513	0.91175
±2.6	0.01358	0.02500	0.84079
±2.4	0.02239	0.03882	0.73345
±2.2	0.03547	0.05708	0.60909
±2.0	0.05399	0.07999	0.48148

x	真値	UMVUE	相対誤差
±1.8	0.07895	0.10734	0.35956
±1.6	0.11092	0.13849	0.24853
±1.4	0.14973	0.17233	0.15098
±1.2	0.19419	0.20737	0.06787
±1.0	0.24197	0.24177	-0.00083
±0.8	0.28969	0.27357	-0.05567
±0.6	0.33323	0.30079	-0.09733
±0.4	0.36827	0.32167	-0.12653
±0.2	0.39104	0.33481	-0.14380
0	0.39894	0.33929	-0.14952

$n=50$ の場合

x	真値	UMVUE	相対誤差
±4.0	0.00013	0.00006	-0.54941
±3.8	0.00029	0.00017	-0.43058
±3.6	0.00061	0.00042	-0.31609
±3.4	0.00123	0.00097	-0.21241
±3.2	0.00238	0.00209	-0.12398
±3.0	0.00443	0.00420	-0.05302
±2.8	0.00792	0.00792	0.00014
±2.6	0.01358	0.01408	0.03663
±2.4	0.02239	0.02370	0.05850
±2.2	0.03547	0.03790	0.06831
±2.0	0.05399	0.05770	0.06873

x	真値	UMVUE	相対誤差
±1.8	0.07895	0.08387	0.06231
±1.6	0.11092	0.11662	0.05137
±1.4	0.14973	0.15540	0.03786
±1.2	0.19419	0.19873	0.02342
±1.0	0.24197	0.24423	0.00934
±0.8	0.28969	0.28872	-0.00336
±0.6	0.33323	0.32858	-0.01394
±0.4	0.36827	0.36022	-0.02185
±0.2	0.39104	0.38059	-0.02673
0	0.39894	0.38762	-0.02838

例 **2.3 (対数正規分布).** $n \geq 3$ とするとき，$X_1, \ldots, X_n$ を p.d.f.

$$f_X(x;,\sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\frac{1}{x}\exp\left\{-\frac{(\log x - \mu_0)^2}{2\sigma^2}\right\}\ (x > 0)$$

をもつ対数正規分布 (lognormal distribution) $LN(\mu_0, \sigma^2)$ からの無作為標本とする．ただし，$\sigma^2 > 0$ とし，μ_0 は既知とする．このとき，$\boldsymbol{X} := (X_1, \ldots, X_n)$ の j.p.d.f. は，

$$f_{\boldsymbol{X}}(x_1, \ldots, x_n; \sigma^2) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{n/2}}\frac{1}{\prod_{i=1}^{n} x_i}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(\log x_i - \mu_0)^2\right\}$$
$$(x_i > 0\,(i = 1, \ldots, n))$$

になる．したがって，$Z := \sum_{i=1}^{n}(\log X_i - \mu_0)^2$ とすると，Z は σ^2 に対して完備十分統計量になり，Z の p.d.f. は，

$$f_Z(z; \sigma^2) = \begin{cases} \dfrac{1}{(2\sigma^2)^{n/2}\Gamma(\frac{n}{2})} z^{(n-2)/2}\left(e^{-\frac{1}{2\sigma^2}}\right)^z & (z > 0), \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases} \tag{2.8}$$

になる．このとき，

$$B(z, n) = \frac{z^{(n-2)/2}}{(2\sigma^2)^{n/2}\Gamma(\frac{n}{2})}$$

になる．したがって，定理 2.1 より $\exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\right)$ の UMVUE は，

$$H_1(Z, n) := \begin{cases} \left(1 - \dfrac{1}{Z}\right)^{(n-2)/2} & (Z > 1), \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

になる．ここで，$-1/(2\sigma^2)$ は自然母数であることに注意．また，定理 2.3 より，$f_X(x; \sigma^2)$ の UMVUE は，

$$\Phi_x(Z, n) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{\pi Z}x}\dfrac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\left\{1 - \dfrac{1}{Z}(\log x - \mu_0)^2\right\}^{(n-3)/2} & (Z > (\log x - \mu_0)^2), \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

になる．

3　多母数指数型分布族における最小分散不偏推定 (II)

ここでは，前節とは異なる方法で指数型分布族の自然母数に関する最小分散不偏推定量を構成する．

3.1 指数型分布族とその制約条件

$(X_1, Y_1), \ldots, (X_n, Y_n)$ を (2.1) からの大きさ n の無作為標本ベクトルとすると，その同時分布もまた指数型分布族に属し，

$$f_{\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}; \boldsymbol{\theta}) = \prod_{j=1}^{n} a(x_j, y_j) b^n(\boldsymbol{\theta}) \exp\left[\langle \boldsymbol{c}(\boldsymbol{\theta}),\, \boldsymbol{d}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \rangle\right] \tag{3.1}$$

となる．ただし，$\boldsymbol{c}(\boldsymbol{\theta}) := (c_1(\boldsymbol{\theta}), \ldots, c_l(\boldsymbol{\theta}))$, $\boldsymbol{d}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) := (\sum_{j=1}^{n} d_1(x_j, y_j), \ldots, \sum_{j=1}^{n} d_l(x_j, y_j))$ とし，$\langle \cdot, \cdot \rangle$ は内積を表すとする．このとき，統計量 $\boldsymbol{Z} = (Z_1(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}), \ldots, Z_q(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})) := \boldsymbol{d}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$ の j.p.d.f. は，

$$f_{\boldsymbol{Z}}(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{\theta}) = B_n(\boldsymbol{z}) \psi_n(\boldsymbol{\theta})^{-1} \left[\exp\left(\langle \boldsymbol{c}(\boldsymbol{\theta}),\, \boldsymbol{z} \rangle\right)\right] \mathcal{X}_{\mathcal{T}}(\boldsymbol{z}) \tag{3.2}$$

となる．ただし，$\boldsymbol{z} := (z_1, \ldots, z_q)$ で，$\mathcal{T}$ を $\boldsymbol{Z}$ の値域とし，また $\boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta} \subset \boldsymbol{R}^p\,(q \leq p)$ で，$B_n(\boldsymbol{z})$ は微分可能な正値関数，$\psi_n(\boldsymbol{\theta})$ は正値関数とする．このとき，定理 2.1.1 より $\boldsymbol{Z}$ は完備十分統計量である．さらに，次の条件 (A), (B) を考える．

(A) $\mathcal{T} = \times_{i=1}^{q} (a_i,\, b_i)$ とするとき，各 $n = 1, 2, \ldots$ について，

$$\begin{aligned}
\lim_{z_i \to a_i + 0} B_n(\boldsymbol{z}) \exp\left[c_i(\boldsymbol{\theta})\, z_i\right] &= 0 \quad (i = 1, \ldots, q), \\
\lim_{z_i \to b_i - 0} B_n(\boldsymbol{z}) \exp\left[c_i(\boldsymbol{\theta})\, z_i\right] &= 0 \quad (i = 1, \ldots, q)
\end{aligned}$$

が成り立つ．

(B) $\mathcal{T} = \times_{i=1}^{q} (a_i,\, b_i)$, $\tilde{B}_{ni}(\boldsymbol{z}) := \int_{a_i}^{z_i} B_n(\boldsymbol{z}) dz_i\,(i = 1, \ldots, q)$ とするとき，各 $n = 1, 2, \ldots$ について，

$$\lim_{z_i \to b_i - 0} \tilde{B}_{ni}(\boldsymbol{z}) \exp\left[c_i(\boldsymbol{\theta})\, z_i\right] = 0 \quad (i = 1, \ldots, q)$$

が成り立つ．

3.2 自然母数に関する一様最小分散不偏推定量の構成

指数型分布族において，$\boldsymbol{c}(\boldsymbol{\theta})$ および $\boldsymbol{c}(\boldsymbol{\theta})^{-1}$ の推定を考える．実は，(3.2) において，$\boldsymbol{\eta} := \boldsymbol{c}(\boldsymbol{\theta})$ とおくと，(3.2) は

$$f_{\boldsymbol{Z}}(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{\eta}) = B_n(\boldsymbol{z}) \psi_n^*(\boldsymbol{\eta})^{-1} \exp[\langle \boldsymbol{\eta},\, \boldsymbol{z} \rangle] \mathcal{X}_{\mathcal{T}}(\boldsymbol{z}) \tag{3.3}$$

と表せ，これを標準型 (canonical form) といい，$\boldsymbol{\eta} = (\eta_1, \ldots, \eta_q)$ を自然母数 (natural parameter) という ([LC98])．したがって，本節では自然母数 $\boldsymbol{\eta}$ に関する推定を考えていることに注意．

定理 3.1 確率ベクトル $(X_1, Y_1), \ldots, (X_n, Y_n)$ の j.p.d.f を (3.1) とする．そのとき，条件 (A) の下で，

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{c}}_n(\boldsymbol{Z}) &:= -\frac{\nabla B_n(\boldsymbol{Z})}{B_n(\boldsymbol{Z})} \\ &= \left(-\frac{\frac{\partial}{\partial Z_1} B_n(\boldsymbol{Z})}{B_n(\boldsymbol{Z})}, \ldots, -\frac{\frac{\partial}{\partial Z_q} B_n(\boldsymbol{Z})}{B_n(\boldsymbol{Z})} \right) \end{aligned} \tag{3.4}$$

は，$\boldsymbol{c}(\boldsymbol{\theta})$ の UMVUE である．

(証明) (3.4) と条件 (A) より，各 $i = 1, \ldots, q$ について

$$\begin{aligned} & E_{\boldsymbol{\theta}}\left[-\frac{\frac{\partial}{\partial Z_i} B_n(\boldsymbol{Z})}{B_n(\boldsymbol{Z})} \right] \\ =& -\frac{1}{\psi_n(\boldsymbol{\theta})} \int_T \left\{ \frac{\partial}{\partial z_i} B_n(\boldsymbol{z}) \right\} \exp[\langle \boldsymbol{c}(\boldsymbol{\theta}),\, \boldsymbol{z} \rangle]\, d\boldsymbol{z} \\ =& -\frac{1}{\psi_n(\boldsymbol{\theta})} \int_{a_1}^{b_1} \cdots \int_{a_{i-1}}^{b_{i-1}} \int_{a_{i+1}}^{b_{i+1}} \cdots \int_{a_q}^{b_q} \int_{a_i}^{b_i} \left\{ \frac{\partial}{\partial z_i} B_n(\boldsymbol{z}) \right\} \exp[\langle \boldsymbol{c}(\boldsymbol{\theta}),\, \boldsymbol{z} \rangle] \\ & \hspace{20em} dz_i\, dz_1 \cdots dz_{i-1}\, dz_{i+1} \cdots dz_q \\ =& -\frac{1}{\psi_n(\boldsymbol{\theta})} \int_{a_1}^{b_1} \cdots \int_{a_{i-1}}^{b_{i-1}} \int_{a_{i+1}}^{b_{i+1}} \cdots \int_{a_q}^{b_q} \left\{ \Big[B_n(\boldsymbol{z}) \exp[\langle \boldsymbol{c}(\boldsymbol{\theta}),\, \boldsymbol{z} \rangle] \Big]_{a_i}^{b_i} \right. \\ & \left. \qquad - c_i(\boldsymbol{\theta}) \int_{a_i}^{b_i} B_n(\boldsymbol{z}) \exp[\langle \boldsymbol{c}(\boldsymbol{\theta}),\, \boldsymbol{z} \rangle]\, dz_i \right\} dz_1 \cdots dz_{i-1}\, dz_{i+1} \cdots dz_q \\ =& \; c_i(\boldsymbol{\theta}) \int_T B_n(\boldsymbol{z}) \psi_n(\boldsymbol{\theta})^{-1} \exp[\langle \boldsymbol{c}(\boldsymbol{\theta}),\, \boldsymbol{z} \rangle]\, d\boldsymbol{z} \\ =& \; c_i(\boldsymbol{\theta}) \end{aligned}$$

となるから，$\hat{\boldsymbol{c}}_n(\boldsymbol{Z})$ は $\boldsymbol{c}(\boldsymbol{\theta})$ の不偏推定量になる．また，(2.1) から $\hat{\boldsymbol{c}}_n(\boldsymbol{Z})$ は完備十分統計量の関数であるから，$\hat{\boldsymbol{c}}_n(\boldsymbol{Z})$ は $\boldsymbol{c}(\boldsymbol{\theta})$ の UMVUE になる． □

また，次の定理が成り立つ．

定理 3.2 確率ベクトル $(X_1, Y_1), \ldots, (X_n, Y_n)$ の j.p.d.f を (3.1) とする．条件 (B) の下で，

$$\hat{\boldsymbol{C}}_n(\boldsymbol{Z}) := \left(-\frac{\tilde{B}_{n1}(\boldsymbol{Z})}{B_n(\boldsymbol{Z})}, \ldots, -\frac{\tilde{B}_{nq}(\boldsymbol{Z})}{B_n(\boldsymbol{Z})} \right) \tag{3.5}$$

は，$\boldsymbol{c}(\boldsymbol{\theta})^{-1}$ の UMVUE である．

(証明) (3.5) と条件 (B) より，各 $i = 1, \ldots, q$ について

$$E_{\boldsymbol{\theta}}\left[-\frac{\tilde{B}_{ni}(\boldsymbol{Z})}{B_n(\boldsymbol{Z})} \right]$$

$$
\begin{aligned}
&= -\frac{1}{\psi_n(\boldsymbol{\theta})}\int_{\mathcal{T}} \frac{\tilde{B}_{ni}(\boldsymbol{z})}{B_n(\boldsymbol{z})} B_n(\boldsymbol{z}) \exp[\langle \boldsymbol{c}(\boldsymbol{\theta}),\, \boldsymbol{z}\rangle]\, d\boldsymbol{z} \\
&= -\frac{1}{\psi_n(\boldsymbol{\theta})}\int_{a_1}^{b_1}\cdots\int_{a_{i-1}}^{b_{i-1}}\int_{a_{i+1}}^{b_{i+1}}\cdots\int_{a_q}^{b_q}\int_{a_i}^{b_i} \tilde{B}_{ni}(\boldsymbol{z}) \left(c_i(\boldsymbol{\theta})^{-1} \exp[\langle \boldsymbol{c}(\boldsymbol{\theta}),\, \boldsymbol{z}\rangle]\right)' \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad dz_i\, dz_1 \cdots dz_{i-1}\, dz_{i+1} \cdots dz_q \\
&= -\frac{1}{\psi_n(\boldsymbol{\theta})}\int_{a_1}^{b_1}\cdots\int_{a_{i-1}}^{b_{i-1}}\int_{a_{i+1}}^{b_{i+1}}\cdots\int_{a_q}^{b_q} \left\{ \left[c_i(\boldsymbol{\theta})^{-1}\tilde{B}_{ni}(\boldsymbol{z}) \exp[\langle \boldsymbol{c}(\boldsymbol{\theta}),\, \boldsymbol{z}\rangle]\right]_{a_i}^{b_i} \right. \\
&\qquad\qquad \left. - c_i(\boldsymbol{\theta})^{-1}\int_{a_i}^{b_i} B_n(\boldsymbol{z}) \exp[\langle \boldsymbol{c}(\boldsymbol{\theta}),\, \boldsymbol{z}\rangle]\, dz_i \right\} dz_1 \cdots dz_{i-1}\, dz_{i+1} \cdots dz_q \\
&= c_i(\boldsymbol{\theta})^{-1}\int_{\mathcal{T}} B_n(\boldsymbol{z})\psi_n(\boldsymbol{\theta})^{-1} \exp[\langle \boldsymbol{c}(\boldsymbol{\theta}),\, \boldsymbol{z}\rangle]\, d\boldsymbol{z} \\
&= c_i(\boldsymbol{\theta})^{-1}
\end{aligned}
$$

となるから，$\hat{\boldsymbol{C}}_n(\boldsymbol{Z})$ は $\boldsymbol{c}(\boldsymbol{\theta})^{-1}$ の不偏推定量になる．また，(2.1) から $\hat{\boldsymbol{C}}_n(\boldsymbol{Z})$ は完備十分統計量の関数であるから，$\hat{\boldsymbol{C}}_n(\boldsymbol{Z})$ は $\boldsymbol{c}(\boldsymbol{\theta})^{-1}$ の UMVUE になる． □

定理 3.1, 3.2 による構成法に基づいて，第 2 節の例におけるいくつかの分布の他にワイブル分布，パレート分布において自然母数の関数の UMVUE を求める．

例 2.1 (続) (指数分布). $n \geq 2$ とするとき，$(X_1, Y_1), \ldots, (X_n, Y_n)$ を p.d.f.

$$
f(x,y) = \begin{cases} \alpha\beta e^{-\alpha x - \beta y} & (x > 0,\, y > 0), \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}
$$

をもつ分布からの無作為標本ベクトルとする．このとき，$Z_1 := \sum_{i=1}^n X_i, Z_2 := \sum_{i=1}^n Y_i$ とおくと，$\boldsymbol{Z} := (Z_1, Z_2)$ は $\boldsymbol{\theta} := (\alpha, \beta)$ に対して完備十分統計量になり，その j.p.d.f は (2.6) になる．このとき，$B_n(\boldsymbol{z}) = (z_1 z_2)^{n-1}/\{(n-1)!\}^2$ となり，条件 (A), (B) は満たされる．よって，定理 3.1 より

$$
\hat{\boldsymbol{c}}_n(\boldsymbol{Z}) := \left(-\frac{n-1}{Z_1},\, -\frac{n-1}{Z_2}\right)
$$

は，$\boldsymbol{c}(\boldsymbol{\theta}) = (-\alpha,\, -\beta)$ の UMVUE になる．また，定理 3.2 より

$$
\hat{\boldsymbol{C}}_n(\boldsymbol{Z}) := \left(-\frac{Z_1}{n},\, -\frac{Z_2}{n}\right)
$$

は，$\boldsymbol{c}(\boldsymbol{\theta})^{-1} = (-1/\alpha,\, -1/\beta)$ の UMVUE になる．

例 2.2 (続) (正規分布). $n \geq 3$ とするとき，$(X_1, Y_1), \ldots, (X_n, Y_n)$ を 2 次元正規分布 $N_2(0, 0, {\sigma_1}^2, {\sigma_2}^2, 0)$ からの無作為標本ベクトルとする．このとき，$Z_1 := \sum_{i=1}^n {X_i}^2, Z_2 := \sum_{i=1}^n {Y_i}^2$ とすると，$\boldsymbol{Z} := (Z_1, Z_2)$ は $\boldsymbol{\theta} := ({\sigma_1}^2, {\sigma_2}^2)$ に対する完備十分統計量になり，その j.p.d.f. は，(2.7) になる．このとき，$B_n(\boldsymbol{z}) = (z_1 z_2)^{(n-2)/2}$ となり，条件 (A) は満たされる．よって，定理 3.1 より，

$$
\hat{\boldsymbol{c}}_n(\boldsymbol{Z}) := \left(-\frac{n-2}{2Z_1},\, -\frac{n-2}{2Z_2}\right) .
$$

は，$\boldsymbol{c}(\boldsymbol{\theta}) = (-1/(2\sigma_1{}^2),\ -1/(2\sigma_2{}^2))$ の UMVUE になる．また，定理 3.2 より，

$$\hat{\boldsymbol{C}}_n(\boldsymbol{Z}) := \left(-\frac{2Z_1}{n},\ -\frac{2Z_2}{n}\right)$$

は，$\boldsymbol{c}(\boldsymbol{\theta})^{-1} = (-2\sigma_1{}^2,\ -2\sigma_2{}^2)$ の UMVUE になる．

例 3.1 (ワイブル分布). $n \geq 2$ とするとき，確率ベクトル $(X_1, Y_1), \ldots, (X_n, Y_n)$ を p.d.f.

$$f(x, y; \theta_1, \theta_2) = \begin{cases} \dfrac{\beta_1\beta_2}{\theta_1\theta_2} x^{\beta_1 - 1} y^{\beta_2 - 1} \exp\left(-\dfrac{x^{\beta_1}}{\theta_1} - \dfrac{y^{\beta_2}}{\theta_2}\right) & (x > 0,\ y > 0), \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

をもつワイブル (Weibull) 分布からの無作為標本ベクトルとする．ただし，$\theta_1 > 0,\ \theta_2 > 0,\ \beta_1 > 0,\ \beta_2 > 0$ とし，β_1, β_2 は既知とする．このとき，$(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$ の j.p.d.f. は，

$$f_{\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}; \theta_1, \theta_2) = \begin{cases} \left(\dfrac{\beta_1\beta_2}{\theta_1\theta_2}\right)^n \prod_{i=1}^n \left(x_i{}^{\beta_1 - 1} y_i{}^{\beta_2 - 1}\right) \exp\left\{-\displaystyle\sum_{i=1}^n \left(\dfrac{x_i{}^{\beta_1}}{\theta_1} + \dfrac{y_i^{\beta_2}}{\theta_2}\right)\right\} & \\ & (x_i > 0,\ y_i > 0\,(i = 1, \ldots, n)), \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

になる．したがって，$Z_1 := \sum_{i=1}^n X_i{}^{\beta_1}, Z_2 := \sum_{i=1}^n Y_i^{\beta_2}$ とすると，$\boldsymbol{Z} := (Z_1, Z_2)$ は $\boldsymbol{\theta} := (\theta_1, \theta_2)$ に対する完備十分統計量になり，$\boldsymbol{Z} := (Z_1, Z_2)$ の j.p.d.f. は，

$$f_{\boldsymbol{Z}}(\boldsymbol{z}; \theta_1, \theta_2) = \begin{cases} \dfrac{(z_1 z_2)^{n-1}}{(\theta_1\theta_2)^n\{\Gamma(n)\}^2} \exp\left(-\dfrac{z_1}{\theta_1} - \dfrac{z_2}{\theta_2}\right) & (z_1 > 0,\ z_2 > 0), \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

になる．このとき，$B_n(z_1, z_2) = (z_1 z_2)^{n-1}$ となり，条件 (A), (B) は満たされる．よって，定理 3.1 より，

$$\hat{\boldsymbol{c}}_n(\boldsymbol{Z}) := \left(-\frac{n-1}{Z_1},\ -\frac{n-1}{Z_2}\right)$$

は，$\boldsymbol{c}(\boldsymbol{\theta}) = (-1/\theta_1, -1/\theta_2)$ の UMVUE になる．また，定理 3.2 より，

$$\hat{\boldsymbol{C}}_n(\boldsymbol{Z}) := \left(-\frac{Z_1}{n},\ -\frac{Z_2}{n}\right)$$

は，$\boldsymbol{c}(\boldsymbol{\theta})^{-1} = (-\theta_1, -\theta_2)$ の UMVUE になる．

例 3.2 (パレート分布). $n \geq 2$ とするとき，確率ベクトル $(X_1, Y_1), \ldots, (X_n, Y_n)$ を p.d.f.

$$f(x, y; \theta_1, \theta_2) = \begin{cases} \theta_1\theta_2\mu_1{}^{\theta_1}\mu_2{}^{\theta_2} x^{-\theta_1 - 1} y^{-\theta_2 - 1} & (x > \mu_1,\ y > \mu_2), \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases} \tag{3.6}$$

をもつパレート (Pareto) 分布からの無作為標本ベクトルとする．ただし，$\theta_1 > 0, \theta_2 > 0, \mu_1 > 0, \mu_2 > 0$ とし，μ_1, μ_2 は既知とする．このとき，(3.6) は

$$f(x, y; \theta_1, \theta_2) = \begin{cases} \dfrac{\theta_1\theta_2}{xy} \exp\left(-\theta_1 \log \dfrac{x}{\mu_1} - \theta_2 \log \dfrac{y}{\mu_2}\right) & (x > \mu_1,\, y > \mu_2), \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

になり，指数型分布族となる．このとき，$(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$ の j.p.d.f. は，

$$f_{\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}; \theta_1, \theta_2) = \begin{cases} \dfrac{(\theta_1\theta_2)^n}{\prod_{i=1}^{n}(x_i y_i)} \exp\left(-\theta_1 \sum_{i=1}^{n} \log \dfrac{x_i}{\mu_1} - \theta_2 \sum_{i=1}^{n} \log \dfrac{y_i}{\mu_2}\right) & \\ \qquad\qquad (x_i > \mu_1,\, y_i > \mu_2\, (i = 1, \ldots, n)), & \\ 0 \qquad\qquad (\text{その他}) & \end{cases}$$

になる．したがって，$Z_1 := \sum_{i=1}^{n} \log(X_i/\mu_1), Z_2 := \sum_{i=1}^{n} \log(Y_i/\mu_2)$ とすると，$\boldsymbol{Z} := (Z_1, Z_2)$ は $\boldsymbol{\theta} := (\theta_1, \theta_2)$ に対する完備十分統計量になり，$\boldsymbol{Z} := (Z_1, Z_2)$ の j.p.d.f. は，

$$f_{\boldsymbol{Z}}(z_1, z_2; \theta_1, \theta_2) = \begin{cases} \dfrac{(\theta_1\theta_2)^n (z_1 z_2)^{n-1}}{\{\Gamma(n)\}^2} \exp(-\theta_1 z_1 - \theta_2 z_2) & (z_1 > 0, z_2 > 0), \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

になる．このとき，$B_n(\boldsymbol{z}) = (z_1 z_2)^{n-1}$ となり，条件 (A), (B) は満たされる．よって，定理 3.1 より，

$$\hat{\boldsymbol{c}}_n(\boldsymbol{Z}) := \left(-\frac{n-1}{Z_1}, -\frac{n-1}{Z_2}\right)$$

は，$\boldsymbol{c}(\boldsymbol{\theta}) = (-\theta_1, -\theta_2)$ の UMVUE になる．また，定理 3.2 より，

$$\hat{\boldsymbol{C}}_n(\boldsymbol{Z}) := \left(-\frac{Z_1}{n}, -\frac{Z_2}{n}\right)$$

は，$\boldsymbol{c}(\boldsymbol{\theta})^{-1} = (-1/\theta_1, -1/\theta_2)$ の UMVUE になる．

例 2.3 (続) (対数正規分布). $n \geq 3$ とするとき，$X_1, \ldots, X_n$ を対数正規分布 $LN(\mu_0, \sigma^2)$ からの無作為標本とする．このとき，$Z := \sum_{i=1}^{n}(\log X_i - \mu_0)^2$ とすると，定理 2.1.1 より，Z は，σ^2 に対して完備十分統計量になり，その p.d.f. は，(2.8 になる．このとき，$B_n(z) = z^{(n-2)/2}$ となり，条件 (A), (B) は満たされる．よって，定理 3.1 より，

$$\hat{c}_n(Z) := -\frac{n-2}{2Z}$$

は，$c(\theta) = -1/(2\sigma^2)$ の UMVUE になる．また，定理 3.2 より，

$$\hat{C}_n(Z) := -\frac{2Z}{n}$$

は，$c(\theta)^{-1} = -2\sigma^2$ の UMVUE になる．

参考文献

[JD90] Jani, P. N. and Dave, H. P. (1990). Minimum variance unbiased estimation in a class of exponential family of distributions and some of its applications. *Metron* **48**, 493-507.

[LC98] Lehmann, E. L. and Casella, G. (1998). *Theory of Point Estimation* (2nd ed.). Springer, New York

[R97] Roussas, G. G. (1997). *A Course in Mathematical Statistics* (2nd ed.). Academic Press, San Diego

[VN93] Voinov, V. G. and Nikulin, M. S. (1993). *Unbiased estimators and their applications*, Vol. 1 : Univariate Case. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht

[WMI56] Washio, Y., Morimoto, H. and Ikeda, N. (1956). Unbiased estimation based on sufficient statistics. *Bull. Math. Stat.*, 6, 69-94.

[Z71] Zacks, S. (1971). *The Theory of Statistical Inference.* Wiley, New York