数理解析研究所講究録
1161 巻 2000 年 122-129

An optimal two–stage procedure in comparison with a control

筑波大・数学　青木　充 (Mitsuru Aoki)
筑波大・数学　青嶋　誠 (Makoto Aoshima)

1. はじめに

$k+1$ 個の独立な正規母集団 $\pi_i : N(\mu_i, \sigma^2)$, $i = 0, ..., k$ を仮定する．ただし，π_0 は control 母集団とし，π_i，$i = 1, ..., k$ を test 母集団とする．ここで，全てのパラメータは未知で，分散は共通である．$\boldsymbol{\mu} = (\mu_0, \mu_1, ..., \mu_k)$ とおく．任意の固定された定数 $\delta_1^\star$ と $\delta_2^\star$ $(0 < \delta_1^\star < \delta_2^\star)$ に対して，母集団の集合 $\Omega = (\pi_1, ..., \pi_k)$ は，$\Omega = \Omega_B \cup \Omega_I \cup \Omega_G$, ただし，

$$\Omega_B = (\pi_i : \mu_i \leq \mu_0 + \delta_1^\star),$$
$$\Omega_I = (\pi_i : \mu_0 + \delta_1^\star < \mu_i < \mu_0 + \delta_2^\star),$$
$$\Omega_G = (\pi_i : \mu_i \geq \mu_0 + \delta_2^\star)$$

のように3つの部分集合に分割される．この Ω を，$S_B \supset \Omega_B$ と $S_G \supset \Omega_G$ なる2つの部分集合 $S_B \cup S_G = \Omega$ に分割することが目的である．そのような正しい決定がなされたとき，Correct Decision (CD) と呼ぶことにする．ただし，$\pi_i \in \Omega_I$ に関する決定はいつも正しいものとする．ここでは，この目的に対して，定数 $P^\star$ $(2^{-k} < P^\star < 1)$ を指定して，

$$P(CD|\boldsymbol{\mu}, \sigma^2) \geq P^\star \quad \text{for} \quad {}^\forall(\boldsymbol{\mu}, \sigma^2) \tag{1.1}$$

なる推測法を構築することを考える．

この問題は Tong (1969) によって最初に考えられ，各母集団から等しい個数で抽出される標本にもとづく標本平均を用いて，逐次法と二段階法とで解が与えられている．Control 母集団と test 母集団とで標本数を別にして標本の総数を最小にする試みは，σ^2 が既知の場合に，Sobel and Tong (1971) によって研究された．同じく σ^2 が既知の場合に，Tamhane (1987) は，Sobel and Tong (1971) の推測法における臨界定数をも考慮した最適な推測法の構築を研究している．本論文は σ^2 が未知の場合で，Tamhane (1987) の解析を二段階法に応用して，(1.1) に対する最適な推測法を与える．

本研究に関連する話題として，control 母集団と test 母集団の平均の差に関する固定された大きさの同時信頼区間を構成する問題がある．この問題について，Mukhopadhyay and Solanky (1999) は，逐次法・加速法・三段階法を用いて解を与え，Aoshima and Takada (1999) は二段階法を用いて解を与えている．Aoshima and Takada (1999) は，これまで未解決であった二段階法の2次の漸近有効性の証明も併せて与えている．本論文で提案する手法は，これら一連の研究についても，最適な推測を提供するものである．

2. 推測法の構築

π_0 から大きさ n_0 の，π_i $(i=1,...,k)$ からは大きさ $c^2 n_0$ $(0 < c \le 1)$ の無作為標本を抽出し，標本の総数を $n=(1+kc^2)n_0$ で表す．そのとき，$A=A(c)=(1+kc^2)^{-1/2}$ とおけば $n_0=A^2 n$ と書ける．標本平均 $\overline{X}_{0(n)}=\sum_{j=1}^{A^2 n} X_{0j}/(A^2 n)$，$\overline{X}_{i(n)}=\sum_{j=1}^{c^2A^2n} X_{ij}/(c^2A^2n)$，$i=1,...,k$ を計算し，定数 $d\ (>0)$ に対してルール

$$S_B=(\pi_i:\overline{X}_{i(n)}-\overline{X}_{0(n)}<d),\quad S_G=(\pi_i:\overline{X}_{i(n)}-\overline{X}_{0(n)}\ge d) \tag{2.1}$$

を定義する．ここで，(c,d,n) は (2.1) のルールが (1.1) の要求を満足するように決定される．この推測法を $R(c,d,n)=R(c,d,n|\delta_1^\star,\delta_2^\star,P^\star,k)$ と記す．そのとき，最適な推測法は，(c,d) の最適値 (c_0,d_0) によって $R(c_0,d_0,n)$ と表される．

一般性を失うことなく $\Omega_I=\phi$ とおく．整数 r $(0\le r\le k)$ に対して，$\boldsymbol{\mu}(r)=\{\boldsymbol{\mu}\in R^{k+1}:\mu_i-\mu_0=\delta_1^\star\ \text{ for }\ \pi_i\in\Omega_B,\ i=1,...,r;\ \mu_i-\mu_0=\delta_2^\star\ \text{ for }\ \pi_i\in\Omega_G,\ i=r+1,...,k\}$ を定義する．そのとき，Tamhane (1987) から，

$$\inf_{\boldsymbol{\mu}} P(CD|\boldsymbol{\mu},\sigma^2)=\min_{0\le r\le k} P(CD|\boldsymbol{\mu}(r),\sigma^2)$$

となることが分かる．確率の計算は具体的には，

$$\begin{aligned}
&P(CD|\boldsymbol{\mu}(r),\sigma^2)\\
&=P\left(\overline{X}_{i(n)}-\overline{X}_{0(n)}<d,\ i=1,...,r,\ \overline{X}_{0(n)}-\overline{X}_{i(n)}\le -d,\ i=r+1,...,k|\boldsymbol{\mu}(r),\sigma^2\right)\\
&=P\left(Y_i<\frac{cA(d-\delta_1^\star)\sqrt{n}}{\sqrt{\sigma^2(1+c^2)}},\ i=1,...,r,\ Y_i\le\frac{cA(\delta_2^\star-d)\sqrt{n}}{\sqrt{\sigma^2(1+c^2)}},\ i=r+1,...,k\right)
\end{aligned} \tag{2.2}$$

となる．ここで，$(Y_1,...,Y_r,Y_{r+1},...,Y_k)$ は $N_k(\mathbf{0},\boldsymbol{\Sigma})$，$\boldsymbol{\Sigma}=(\sigma_{ij})$;

$$\sigma_{ij}=\begin{cases}1 & (i=j),\\ \rho & (i\ne j;\ i,j=1,...,r \text{ or } i,j=r+1,...,k),\\ -\rho & (i=1,...,r;\ j=r+1,...,k)\end{cases}$$

に従い，$\rho=c^2/(1+c^2)$ である．(2.2) 式は，$N(0,1)$ の分布関数 $\Phi(\cdot)$ を用いて，

$$\begin{aligned}
&P(CD|\boldsymbol{\mu}(r),\sigma^2)\\
&=\int_{-\infty}^{\infty}\Phi^r\left(cx+\frac{cA(d-\delta_1^\star)\sqrt{n}}{\sigma}\right)\Phi^{k-r}\left(-cx+\frac{cA(\delta_2^\star-d)\sqrt{n}}{\sigma}\right)d\Phi(x)\\
&\equiv\psi(c,d,r|\delta_1^\star,\delta_2^\star,\sigma^2,k)
\end{aligned} \tag{2.3}$$

のようにも書ける．以上の準備のもと，ここではルール (2.1) に対して，

$$\max_{c\in(0,1]}\max_{d>0}\inf_{\boldsymbol{\mu},\sigma^2} P(CD|\boldsymbol{\mu},\sigma^2) \geq P^\star \tag{2.4}$$

なる意味で標本数の総和を最小にする最適な推測法 $R(c_0, d_0, n)$ を構築する．

i) $k = 1$ $(r = 0, 1)$ の場合

(2.2) 式より，$\psi(c,d,r) = \psi(c,d,r|\delta_1^\star,\delta_2^\star,\sigma^2,k)$ について，$A = (1+c^2)^{-1/2}$ に注意すれば

$$\begin{aligned}
&\max_{d>0}\min_{r=0,1}\psi(c,d,r)\\
&= \max_{d>0}\min\left\{\Phi\left(\frac{c(d-\delta_1^\star)\sqrt{n}}{(1+c^2)\sigma}\right), \Phi\left(\frac{c(\delta_2^\star-d)\sqrt{n}}{(1+c^2)\sigma}\right)\right\}\\
&= \Phi\left(\frac{c(\delta_2^\star-\delta_1^\star)\sqrt{n}}{2(1+c^2)\sigma}\right)
\end{aligned}\tag{2.5}$$

となる．ここで，d の最適値は $d_0 = (\delta_1^\star + \delta_2^\star)/2$ である．要求 (1.1) を満たすためには，σ^2 を既知と想定するとき，$\Phi\left(ca(1+c^2)^{-1}\right) = P^\star$ なる $a = a(c,k,P^\star)$ を用いて

$$n \geq \frac{4a^2}{(\delta_2^\star - \delta_1^\star)^2}\sigma^2$$

なることが必要になる．実際には σ^2 は未知であるので，n を次の二段階法で推定する．

固定された初期標本数 m (> 2) に対して，control 母集団と test 母集団から，独立にそれぞれ大きさ A^2m と c^2A^2m の初期標本を抽出して，標本分散

$$S_m^2 = \left\{\sum_{j=1}^{A^2m}(X_{0j} - \overline{X}_{0(m)})^2 + \sum_{j=1}^{c^2A^2m}(X_{ij} - \overline{X}_{1(m)})^2\right\}/\nu$$

を計算する．ただし，$\nu = m-2$ である．二段階法による標本の総数の推定を

$$N = \max\left\{m, \left[\frac{4a_m^2}{(\delta_2^\star - \delta_1^\star)^2}S_m^2\right] + 1\right\} \tag{2.6}$$

で定義する．ここで，$a_m = a_m(c,k,P^\star)$ は要求 (1.1) を満たすように決定される．2 段階目として，control 母集団と test 母集団から，独立にそれぞれ大きさ $A^2(N-m)$ と $c^2A^2(N-m)$ の追加標本を抽出する．各々の母集団で，初期標本と追加標本を合わせて標本平均 $\overline{X}_{0(N)}$ と $\overline{X}_{1(N)}$ を計算する．そのとき，n を N に置き換えたルール (2.1) を考える．

(2.5) 式において，n ($\geq m$) に対して $I(N=n)$ と Y_i ($i=1,...,k$) は独立なので，

$$\begin{aligned}\max_{d>0}\inf_{\boldsymbol{\mu},\sigma^2} P(CD|\boldsymbol{\mu},\sigma^2) &= \inf_{\sigma^2} E\left\{\Phi\left(\frac{c(\delta_2^\star-\delta_1^\star)\sqrt{N}}{2(1+c^2)\sigma}\right)\right\}\\ &\geq E\left\{\Phi\left(\frac{ca_m}{1+c^2}\sqrt{\frac{S_m^2}{\sigma^2}}\right)\right\}\\ &= F_\nu\left(\frac{ca_m}{1+c^2}\right)\end{aligned}$$

となる．ここで，$F_\nu(\cdot)$ は自由度 ν の t 分布の分布関数である．よって，二段階法の標本数の定義式 (2.6) の a_m は，$F_\nu(ca_m(1+c^2)^{-1})=P^\star$ なる a_m として定義する．そのとき，d の最適値 $d_0=(\delta_1^\star+\delta_2^\star)/2$ と 確率を最大にする c の最適値 $c_0=1$ を用いて，二段階法 (2.6) にもとづく $R(1,d_0,N)$ を提案する．

ii) k が偶数の場合

Tamhane (1987) によれば，$\ell=[k/2]$ とすると，(2.3) 式から

$$\begin{aligned}&\max_{d>0}\min_{0\leq r\leq k}\psi(c,d,r)\\ &=\psi(c,d_0,\ell)\\ &=\int_{-\infty}^{\infty}\Phi^\ell\left(cx+\frac{cA(\delta_2^\star-\delta_1^\star)\sqrt{n}}{2\sigma}\right)\Phi^\ell\left(-cx+\frac{cA(\delta_2^\star-\delta_1^\star)\sqrt{n}}{2\sigma}\right)d\Phi(x) \qquad (2.7)\end{aligned}$$

となる．ここで，$d_0=(\delta_1^\star+\delta_2^\star)/2$ である．よって，σ^2 が既知であると想定すれば，

$$n\geq\frac{4b^2}{(\delta_2^\star-\delta_1^\star)^2}\sigma^2$$

のとき要求 (1.1) は満たされる．ただし，$b=b(c,k,P^\star)$ は積分方程式

$$\int_{\infty}^{\infty}\Phi^\ell\Big(c(x+Ab)\Big)\Phi^\ell\Big(c(-x+Ab)\Big)d\Phi(x)=P^\star \qquad (2.8)$$

の解である．標本の総数 n を，次の二段階法で推定する．

$k=1$ のときと同様に，各々の母集団から初期標本を抽出し，標本分散

$$S_m^2=\left\{\sum_{j=1}^{A^2m}(X_{0j}-\overline{X}_{0(m)})^2+\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{c^2A^2m}(X_{ij}-\overline{X}_{i(m)})^2\right\}/\nu \qquad (2.9)$$

を計算する．ただし，$m>k+1$ で $\nu=m-k-1$ である．二段階法の標本数を

$$N=\max\left\{m,\left[\frac{4b_m^2}{(\delta_2^\star-\delta_1^\star)^2}S_m^2\right]+1\right\} \qquad (2.10)$$

と定義する．(2.10) に従って各母集団で追加標本を抽出し，$k=1$ の場合と同様に，n を N で置き換えたルール (2.1) を考える．

(2.10) における $b_m = b_m(c, k, P^\star)$ を決定する．(2.7) 式から

$$\begin{aligned}
&\max_{d>0} \inf_{\boldsymbol{\mu},\sigma^2} P(CD|\boldsymbol{\mu}, \sigma^2)\\
&= \inf_{\sigma^2} E\left\{\int_{-\infty}^{\infty} \Phi^\ell\left(cx + \frac{cA(\delta_2^\star - \delta_1^\star)\sqrt{N}}{2\sigma}\right)\Phi^\ell\left(-cx + \frac{cA(\delta_2^\star - \delta_1^\star)\sqrt{N}}{2\sigma}\right) d\Phi(x)\right\}\\
&\geq E\left\{\int_{-\infty}^{\infty} \Phi^\ell\left(c\left(x + Ab_m\sqrt{\frac{\chi_\nu^2}{\nu}}\right)\right)\Phi^\ell\left(c\left(-x + Ab_m\sqrt{\frac{\chi_\nu^2}{\nu}}\right)\right) d\Phi(x)\right\}\\
&= \int_0^\infty \int_{-\infty}^{\infty} \Phi^\ell\Big(c(x + Ab_m y)\Big)\Phi^\ell\Big(c(-x + Ab_m y)\Big) d\Phi(x) dG_\nu(y)
\end{aligned}$$

となる．ただし，$G_\nu(\cdot)$ は $\sqrt{\chi_\nu^2/\nu}$ の分布関数とし，χ_ν^2 は自由度 ν のカイ二乗分布に従う確率変数である．よって，二段階法の標本数の定義式 (2.10) にある b_m を積分方程式

$$\int_0^\infty \int_{-\infty}^{\infty} \Phi^\ell\Big(c(x + Ab_m y)\Big)\Phi^\ell\Big(c(-x + Ab_m y)\Big) d\Phi(x) dG_\nu(y) = P^\star \tag{2.11}$$

の解として決めれば，要求 (1.1) は満たされる．

ここで，(2.11) の左辺を $c \in (0, 1]$ に関して最大にする最適な推測法を構築する．簡単な計算から，最適な c 値は，

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \int_{-\infty}^{\infty} &\Phi^{\ell-1}(x)\Phi^\ell(-x + 2b_m cAy)\\
&(x - b_m kc^3A^3y)\phi(x/c - b_m Ay) d\Phi(x) dG_\nu(y) = 0
\end{aligned} \tag{2.12}$$

の解 $c = c_m$ として与えられることが分かる．ここで，$\phi(\cdot)$ は $N(0, 1)$ の密度関数である．以上より，k が偶数のとき，$d_0 = (\delta_1^\star + \delta_2^\star)/2$ と (2.11)–(2.12) の解 (b_m, c_m) を用いて，二段階法 (2.10) にもとづく $R(c_m, d_0, N)$ を提案する．

iii) k が 3 以上の奇数の場合

Tamhane (1987) によれば，$\ell = [k/2]$ と $d_\ell < d_0\ (= (\delta_1^\star + \delta_2^\star)/2) < d_{\ell+1}$ に対して，(2.3) 式から

$$\max_{d>0} \min_{0\leq r\leq k} \psi(c, d, r) = \psi(c, d_\ell, \ell) = \psi(c, d_{\ell+1}, \ell + 1) \tag{2.13}$$

となる．ここで $d = d_\ell$ は，$b_1 = (d - \delta_1^\star)\sqrt{n}/\sigma$，$b_2 = (\delta_2^\star - d)\sqrt{n}/\sigma$ とおいた

$$\begin{aligned}
&\ell\int_{-\infty}^{\infty} \Phi^{\ell-1}\Big(c(x + Ab_1)\Big)\Phi^{k-\ell}\Big(c(-x + Ab_2)\Big)\phi\Big(c(x + Ab_1)\Big) d\Phi(x)\\
&= (k - \ell)\int_{-\infty}^{\infty} \Phi^\ell\Big(c(x + Ab_1)\Big)\Phi^{k-\ell-1}\Big(c(-x + Ab_2)\Big)\phi\Big(c(-x + Ab_2)\Big) d\Phi(x)
\end{aligned} \tag{2.14}$$

の解である．よって，σ^2 が既知であると想定すれば，

$$n \geq \frac{4b^2}{(\delta_2^\star - \delta_1^\star)^2}\sigma^2$$

のとき要求 (1.1) は満たされる．ただし，$b=(b_1+b_2)/2$ で，$b_i=b_i(c,k,P^\star)$，$i=1,2$ は積分方程式

$$\int_{-\infty}^{\infty}\Phi^{\ell}\left(c(x+Ab_1)\right)\Phi^{k-\ell}\left(c(-x+Ab_2)\right)d\Phi(x)=P^\star \tag{2.15}$$

と (2.14) 式との連立方程式の解である．そのとき (b_1,b_2) を用いて，$d=d_0+(\delta_2^\star-\delta_1^\star)(b_1-b_2)\{2(b_1+b_2)\}^{-1}$ と書けることに注意する．

二段階法の標本数を，(2.9) 式の S_m^2 を用いて

$$N=\max\left\{m,\left[\frac{4b_m^2}{(\delta_2^\star-\delta_1^\star)^2}S_m^2\right]+1\right\} \tag{2.16}$$

と定義する．ここで，$b_m=(b_{1m}+b_{2m})/2$ とおく．(2.16) に従って各母集団で追加標本を抽出し，$k=1$ の場合と同様に n を N で置き換えて，$d=d_0+(\delta_2^\star-\delta_1^\star)(b_{1m}-b_{2m})\{2(b_{1m}+b_{2m})\}^{-1}(\equiv d_m)$ をもつルール (2.1) を考える．

(2.13) 式から

$$\begin{aligned}
&\max_{d>0}\inf_{\boldsymbol{\mu},\sigma^2}P(CD|\boldsymbol{\mu},\sigma^2)\\
&=\inf_{\sigma^2}E\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\Phi^{\ell}\left(cx+\frac{cA(d_m-\delta_1^\star)\sqrt{N}}{\sigma}\right)\Phi^{k-\ell}\left(-cx+\frac{cA(\delta_2^\star-d_m)\sqrt{N}}{\sigma}\right)d\Phi(x)\right\}\\
&\geq E\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\Phi^{\ell}\left(cx+\frac{cA(d_m-\delta_1^\star)(b_{1m}+b_{2m})}{\delta_2^\star-\delta_1^\star}\sqrt{\frac{\chi_\nu^2}{\nu}}\right)\right.\\
&\qquad\left.\Phi^{k-\ell}\left(-cx+\frac{cA(\delta_2^\star-d_m)(b_{1m}+b_{2m})}{\delta_2^\star-\delta_1^\star}\sqrt{\frac{\chi_\nu^2}{\nu}}\right)d\Phi(x)\right\}\\
&=\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi^{\ell}\Big(c(x+Ab_{1m}y)\Big)\Phi^{k-\ell}\Big(c(-x+Ab_{2m}y)\Big)d\Phi(x)dG_\nu(y)
\end{aligned}$$

となる．よって，二段階法の標本数の定義式 (2.16) と $d=d_m$ の定義式にある (b_{1m},b_{2m}) を，積分方程式

$$\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi^{\ell}\Big(c(x+Ab_{1m}y)\Big)\Phi^{k-\ell}\Big(c(-x+Ab_{2m}y)\Big)d\Phi(x)dG_\nu(y)=P^\star \tag{2.17}$$

ならびに

$$\begin{aligned}
&\ell\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi^{\ell-1}\Big(c(x+Ab_{1m}y)\Big)\Phi^{k-\ell}\Big(c(-x+Ab_{2m}y)\Big)\\
&\qquad y\phi\Big(c(x+Ab_{1m}y)\Big)d\Phi(x)dG_\nu(y)\\
&=(k-\ell)\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi^{\ell}\Big(c(x+Ab_{1m}y)\Big)\Phi^{k-\ell-1}\Big(c(-x+Ab_{2m}y)\Big)\\
&\qquad y\phi\Big(c(-x+Ab_{2m}y)\Big)d\Phi(x)dG_\nu(y)
\end{aligned}\tag{2.18}$$

の連立方程式の解として決めれば，要求 (1.1) は満たされる．なお，d_m に関して，関係式

$$\frac{d_m}{\delta_2^\star - \delta_1^\star} = d_{m0} + \frac{2-\gamma}{\gamma-1} \tag{2.19}$$

が任意の $\delta_1^\star$ と $\delta_2^\star$ $(0 < \delta_1^\star < \delta_2^\star)$ に対して成り立つことは興味深い．ただし，$\gamma = \delta_2^\star/\delta_1^\star$, $d_{m0} = 1.5 + (b_{1m} - b_{2m})\{2(b_{1m} + b_{2m})\}^{-1}$ である．

ここで，(2.17) の左辺を $c \in (0,1]$ に関して最大にする最適な推測法を構築する．簡単な計算から，最適な c 値は，

$$\begin{aligned}
&\ell \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \Phi^{\ell-1}(x)\Phi^{k-\ell}\Big(-x + cA(b_{1m}+b_{2m})y\Big) \\
&\qquad (x - b_{1m}kc^3A^3y)\phi(x/c - b_{1m}Ay)d\Phi(x)dG_\nu(y) \\
&+(k-\ell)\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \Phi^{k-\ell-1}(x)\Phi^{\ell}\Big(-x + cA(b_{1m}+b_{2m})y\Big) \\
&\qquad (x - b_{2m}kc^3A^3y)\phi(x/c - b_{2m}Ay)d\Phi(x)dG_\nu(y) = 0
\end{aligned} \tag{2.20}$$

の解 $c = c_m$ として与えられることが分かる．以上より，k が 3 以上の奇数のとき，(2.17)–(2.18), (2.20) の解 (b_{1m}, b_{2m}, c_m) と (2.19) 式から得られる d_m を用いて，二段階法 (2.16) にもとづく $R(c_m, d_m, N)$ を提案する．

3. 平均の差の同時信頼区間

Control 母集団と test 母集団の平均の差の同時信頼区間を

$$R_n = \{\boldsymbol{\mu} \in R^{k+1} : \mu_i - \mu_0 \in (\overline{X}_{i(n)} - \overline{X}_{0(n)}) \pm d,\ i = 1, ..., k\} \tag{3.1}$$

と定義するとき，与えられた $d\ (>0)$ と $\alpha\ (0 < \alpha < 1)$ に対して，要求

$$P(\boldsymbol{\mu} \in R_n) \geq 1 - \alpha \tag{3.2}$$

を満たす R_n を構築する問題を考える．

Aoshima and Takada (1999) の二段階法を次のように書き換えて，そこで与えられた同時信頼区間のクラスから最適な R_n を探索する．二段階法による標本の総数の推定を

$$N = \max\left\{m,\ \left[\frac{t_m^2 S_m^2}{d^2}\right] + 1\right\} \tag{3.3}$$

と定義する．ここで，S_m^2 は (2.9) 式で与えたものと同一のものである．そのとき，(3.1) 式の n を N に置き換えて得られる同時信頼区間 R_N は，要求 (3.2) を満たす解になる．ここで，$t_m = t_m(c, k, \alpha)$ は積分方程式

$$\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \Big\{\Phi\Big(c(x + At_my)\Big) - \Phi\Big(c(x - At_my)\Big)\Big\}^k d\Phi(x)dG_\nu(y) = 1 - \alpha \tag{3.4}$$

の解であり，$A=(1+kc^2)^{-1/2}$ である．

(3.4) 式の左辺を $c \in (0,1]$ に関して最大化することで，最適な R_N を構築することが可能である．簡単な計算から，最適な c 値は，

$$\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\{\Phi(x)-\Phi(x-2t_m cAy)\}^{k-1} \\ (x-t_m kc^3A^3y)\phi(x/c-t_m Ay)d\Phi(x)dG_\nu(y)=0 \tag{3.5}$$

の解 $c=c_m$ として与えられることが分かる．以上より，(3.4)–(3.5) の解 (t_m, c_m) を用いて，二段階法 (3.3) にもとづく R_N を提案する．なお，固定された $d\ (>0)$ に対して $c^2 > k^{-1/2}$ なることと，$m=m(d)$: $m(d)\to\infty$ as $d\to 0$ のとき $c^2\to k^{-1/2}$ なることも証明できる．

参考文献

[1] Aoshima, M. and Takada, Y. (1999). Second–order properties of a two–stage procedure for comparing several treatments with a control, submitted.

[2] Mukhopadhyay, N. and Solanky, T.K.S. (1999). Multistage methodologies for comparing several treatments with a control, submitted.

[3] Sobel, M. and Tong, Y.L. (1971). Optimal allocation of observations for partitioning a set of normal populations in comparison with a control. *Biometrika,* **58**, 177–181.

[4] Tamhane, A.C. (1987). An optimal procedure for partitioning a set of normal populations with respect to a control. *Sankhya, Series A,* **49**, 335–346.

[5] Tong, Y.L. (1969). On partitioning a set of normal populations by their locations with respect to a control. *Ann. Math. Statist.,* **40**, 1300–1324.