数理解析研究所講究録
1163巻 2000年 103-108

又曲型鏡映群と不変式の一例

九大・数理 吉田正章(Masaaki YOSHIDA)

私はこの研究集会で話題になっているどのことにも全くの素人です。素人だから気が付くということもあります。たとえば東京に住んでいる人には「東京都」は「とうきょうと」としか読めないでしょうが，京都に住んでいる人には「ひがしきょうと」と読めるでしょう，意味も込めて．また神戸に住んでいる人にとって，「高速神戸」は駅の名として違和感は無いようですが，私にはとても奇妙に聞えます；高速電車，高速鉄道なら分りますが．今日は素人の私が変だなあと感じている2つのことについて話をします．

まずこの集会の題の双曲空間がおかしいですね。双とは「2つ」という意味で，双曲線は曲線が2つあるからそう呼ばれる訳ですから，双曲空間はおかしい以上に間違いでしょう，私は，

又曲空間，又曲幾何，又曲距離，…

を提唱します。

次に「は」を自頭絡みとか8字結びだとして，「S^3−は」に又曲構造が入ることはよく知られています。式で書くと，

(は) $$S^3 - は \underset{homeo}{\sim} \mathbb{H}^3/\Gamma_{は},$$

ここで S^n はn次元球面，$\mathbb{H}^n$ はn次元(実)又曲空間，$\Gamma_{は}$ は $\mathbb{H}^3$ に働く離散部分群です。私には(は)がとても奇妙に

思えます。右辺の$\Gamma_{\text{は}}$は，はっきりした数論的群で，とても剛い構造を持ってますのに，左辺はぐにゃぐにゃな極端に柔い一件です。私には冗談のように思えるのです。比較のために2次元での様子を見ましょう。「さ」をS^2内の3点としますと

さ　$S^2 -$ さ $\underset{homeo}{\sim}$ $\mathbb{H}^2/\Gamma(2)$,

ここで，

$$\Gamma(1) = SL(2,\mathbb{Z}),\quad \Gamma(2)=\{g\in\Gamma(1) \mid g\equiv id \mod 2\},$$

となりますが，$\Gamma(2)$の基本領域を描いてみれば，境界を同一視後3つ穴があくことは，子供でも分る訳で，さは数学になっていません。S^2を複素射影直線$\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$と視し$\mathbb{H}^2$を1次元双曲空間$\mathbb{H}^1_{\mathbb{C}}$（複素上半平面）と思いますと，さは複素同型で 左$\longrightarrow$右は超幾何関数の比（もしくは，だ円曲線の周期の比）: $\mathbb{P}^1 \ni x \longmapsto u_1(x)/u_2(x)$,

$$u_j(x) = \int_{\gamma_j} \frac{dt}{\sqrt{t(1-t)(x-t)}} \qquad j=1,2,$$

（γ_jは適当な路）で与えられ，左$\longleftarrow$右は，テタ関数の比で表される，保型関数$\lambda(\tau)$であり，$j(\tau)$と簡単な関係にあります。この$j(\tau)$は御存知のように昔から今に至るまで，多くの数学者の生活を支えてきた有難い関数であります。くり返しますが，さを位相同型だとすると，数学以前だけど，左辺にしかるべき座標を入れて，同型写像を書き下すと，色々儲かるという訳です。さて3次元の話にもどりますと，はは未に数学以前の状態にある訳です。左辺にしかるべき座標を入れて，同型を式で書き下すことは誰でも考えそうに思いますが，私がきいて回ったところ誰も考えたこともないらしい

ですね，にわかには信じ難いことですが，どうもそうらしいです。今日は白頭絡みについて，(は)の同型を式で書くということが何とか出来そうだという話をします。以下話し言葉をやめて，書き言葉に変えます。

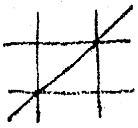
（色付）点配置空間（$\mathbb{P}^{k-1}_{\substack{\mathbb{C}\\ \mathbb{R}}}$ 内の一般の位置にある n 点）を

$$X_{\substack{\mathbb{C}\\ \mathbb{R}}}(k,n) := GL_{\substack{\mathbb{C}\\ \mathbb{R}}}(k)\backslash\{x \in M(k,n;\substack{\mathbb{C}\\ \mathbb{R}}) \mid \forall_{k\text{-minor}} \neq 0\}/(\substack{\mathbb{C}^\times\\ \mathbb{R}^\times})^n$$

で定義する．たとえば，$X(2,3) =$ 一点，$X(2,4) \simeq \mathbb{P}^1 - \{0,1,\infty\}$.
すぐ分ること：対称群 S_n が n 点の色の付け替えとして自然に働く．上記条件を満す任意の $x \in M(k,n)$ は，

$$\begin{pmatrix} 1 & & & 1 & \cdots & 1 \\ & \ddots & & \vdots & & \\ & & 1 & 1 & * & \end{pmatrix}$$

と上の関係で同値なので，$X(k,n)$ は $(k-1)(n-k-1)$-次元のアフィン平面から超曲面を何枚か取り去ったものと同型．従って $X(k,n)$ に「座標」が入る．例をもうひとつ：

$X(2,5) \cong \mathbb{A}^2 -$  .

事実：$X_{\mathbb{C}}(2,n)$ $(n \leq 8)$ は複素双曲構造を有する（Picard，寺田）．$X_{\mathbb{C}}(3,6) - \{$2次曲線上にのっている6点で表される超曲面$\}$も同構造を有する（Allcock他）．

この中のひとつに注目する（他の例については，以下に述べるようなくわしいことが分っている訳ではない）：

配　$\overset{\square}{X}_{\mathbb{C}}(2,6) \underset{\text{bi-holom}}{\simeq} \mathbb{H}^3_{\mathbb{C}}/\Gamma(1-\omega)$,

ここで，$\mathbb{H}^3_{\mathbb{C}}$ は3次元複素双曲空間

$$\mathbb{H}^3_{\mathbb{C}} = \{z \in \mathbb{C}^4 \mid {}^t\bar{z} h z < 0\}/\mathbb{C}^\times, \quad h = \mathrm{diag}(1,1,1,-1),$$
$$\Gamma = \{g \in GL(4,\mathbb{Z}[\omega]) \mid {}^t\bar{g} h g = h\}, \quad \omega^3 = 1,\ \omega \neq 1,$$
$$\Gamma(1-\omega) = \{g \in \Gamma \mid g \equiv id \mod (1-\omega)\}.$$

更に記号の説明を続ける：$X(2,6)$は異る6点のなす空間であった（これを $1+1+1+1+1+1$ と記す）が，この他に以下のような退化配置を付け加える：

$$2+1+1+1+1 \quad : \quad X(2,5) \simeq \mathbb{C}^2 - \#$$
$$2+2+1+1 \quad : \quad X(2,4) \simeq \mathbb{C} - \{2点\}$$
$$2+2+2 \quad : \quad X(2,3) = 一点$$

（意味は自明であろう．）そうして出来たものを $\overset{\square}{X}_{\mathbb{C}}(2,6)$ と記した．実はこれは Segre cubic と呼ばれる代数多様体から，10ヶの特異点を取り去ったものと自然に同一視される．右辺の商多様体には尖点が10ヶあるので，左右共に穴をふさげば，双方 compact 代数多様体となる．
また

$$\Gamma / \Gamma(1-\omega) \simeq S_6 \text{（対称群）}.$$

左 → 右：$X_{\mathbb{C}}(2,6) \ni x = (0, 1, \infty, x_1, x_2, x_3)$ に対し，

$$u_j(x) = \int_{\gamma_j} \frac{dt}{\sqrt[3]{t(t-1)(t-x_1)(t-x_2)(t-x_3)}}, \quad j=1,\cdots,4$$

（γ_j は適当な路）としたとき，

$$\varphi : x \longmapsto u_1(x) : \cdots : u_4(x)$$

で与えられる．u_j は Appell の超幾何関数と思ってもいいし，曲線

$$C(x) : s^3 = t(t-1)(t-x_1)(t-x_2)(t-x_3)$$

の周期と思っても可い．
左 ← 右：（Gonzalez-Dies，松本圭司）対称型式んと1の3乗根 ω というデタにより，埋込み

$$\iota : \mathbb{H}^3_{\mathbb{C}} \hookrightarrow \mathfrak{S}_4 \text{ （degree 4 の Siegel 上半空間）}$$

で，$\iota_*(\Gamma) \hookrightarrow Sp(4, \mathbb{Z})$ となるものが定る．$\mathfrak{S}_4$上

のテタ関数達を $\mathbb{H}^3_{\mathbb{C}}$ 上に制限して，$\Gamma(1-\omega)$-保型形式を得る．それらにより φ^{-1} は具体的に表示さる．

さて，今までは複素数上の配置空間と複素双曲空間の話であったが，実は，同型 配 には実構造があるのである．即実部だけを取っても同型となる幸運に恵まれている：

$$\text{配}_{\mathbb{R}} \qquad \overset{\square}{X}_{\mathbb{R}}(2,6) \underset{\text{実解析的}}{\simeq} \mathbb{H}^3_{\mathbb{R}}/\Lambda(3),$$

ここで，

$$\mathbb{H}^3_{\mathbb{R}} = \{z\in\mathbb{R}^4 \mid {}^t z h z < 0\}/\mathbb{R}^+,$$

$$\Lambda = \Gamma\cap GL(4,\mathbb{R}) = \{g\in GL(4,\mathbb{Z}) \mid {}^t g h g = h\},$$

$$\Lambda(3) = \Gamma(1-\omega)\cap GL(4,\mathbb{R}) = \{g\in\Lambda \mid g\equiv id \bmod 3\},$$

また

$$\Lambda/\Lambda(3)\simeq S_6.$$

更に　Λ は（双曲型）Coxeter群でCoxeterグラフが

 .

幸運なことに，φ^{-1}：左←右 を与えるテタ関数は実数上実数値を取ることが分り（φ：左→右 を与える積分が，実数上実数値は明），同型 配$_{\mathbb{R}}$ が式で書けてしまうことになる．

一方白頭絡みに対応する群は

$$\left\langle \begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&0\\1+i&1\end{pmatrix}\right\rangle \underset{\text{finite index}}{\subset} GL(2,\mathbb{Z}[i])$$

と共役であることはよく知られている．ここで鏡映をひとつ付け加えて，$GL(2,\mathbb{Z}[i])$ の index 2 の拡大を作るとこれは，上と同じグラフを持つCoxeter群になる．即これは Λ と共役である（具体

的な同型も大した困難なく作ることが出来る). そうしてみると, $\Lambda(3)$ と $\Gamma_{は}$ は共に Coxeter 群

$\Lambda \simeq$ 

の有限指数部分群であるので, 同型 配$_{\mathbb{R}}$ を与える解析的式が, 同型 は の式表示という夢を実現してくれると期待している.

References

[1] D. ALLCOCK, J. CARLSON AND D. TOLEDO, A complex hyperbolic structure for Moduli of cubic surfaces. C.R. Acad. Sci. 326(1998), 49–54.

[2] K. MATSUMOTO Theta constants associated with the triple covering of the complex projective line branching at 6 points, preprint, 1999, September.

[3] M. YOSHIDA, The real loci of the configuration space of six points on the projective line and a Picard modular 3-fold, Kumamoto J. of Math. 11(1998), 43–67.

[4] M. YOSHIDA, *Hypergeometric Functions, My Love,* Vieweg Verlag, 1997.