数理解析研究所講究録
1163巻 2000年 109-116

複素双曲型空間型から実双曲型空間型への固有な調和写像について

山形大学理学部数理科学科　上野慶介（Keisuke Ueno）

1 準備

(M^m, g) をアダマール多様体，すなわち，単連結，連結，完備なリーマン多様体で非正な断面曲率をもつものとする．速さ1の測地線 $\gamma_1, \gamma_2 : [0, \infty) \to M$ に対して

$$\gamma_1 \sim \gamma_2 \Longleftrightarrow \text{ある定数} C > 0 \text{があって任意の} t \geq 0 \text{に対して} d_M(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) \leq C$$

と定義する．M 上の速さ1の測地線全体の集合をこの同値関係で割った空間を $M(\infty)$ で表わし，これを (M, g) の無限遠境界とよぶ．また，$\overline{M} := M \cup M(\infty)$ を Eberlein-O'Neill によるコンパクト化という．いま (M, g) がアダマール多様体であるから，M は $\mathbf{R}^m$ に微分同型であり，さらに $\overline{M}$ 上には自然な位相が定義でき，位相同型 $\overline{M} \simeq \{x \in \mathbf{R}^m \mid |x| \leq 1\}$，$M(\infty) \simeq S^{m-1}$ が成り立つ．

例1．実双曲型空間型．
実双曲型空間型のモデルとして

$$\mathbf{D}^m = \left(\{x \in \mathbf{R}^m \mid |x| < 1\},\ \frac{1}{(1-|x|^2)^2} \sum_{i=1}^{m} (dx^i)^2 \right)$$

をとる．このとき $\overline{\mathbf{D}^m}$ は単位開球 $\{x \in \mathbf{R}^m \mid |x| < 1\}$ の，$\mathbf{R}^m$ の通常の位相に関する閉包と一致し，$\mathbf{D}^m(\infty) = S^{m-1}$ である．

例2．複素双曲型空間型．
複素双曲型空間型のモデルとして

$$\mathbf{B}^m = \left(\{z \in \mathbf{C}^m \mid |z| < 1\},\ \frac{1}{(1-|z|^2)^2} \sum_{i,j=1}^{m} \left\{ (1-|z|^2)\delta_{ij} + \bar{z}^i z^j \right\} dz^i d\bar{z}^j \right)$$

をとる．このとき $\overline{\mathbf{B}^m}$ は単位開球 $\{z \in \mathbf{C}^m \mid |z| < 1\}$ の，$\mathbf{C}^m$ の通常の位相に関する閉包と一致し，$\mathbf{B}^m(\infty) = S^{2m-1}$ である．

また $\mathbf{D}^m$，$\mathbf{B}^m$ にはそれぞれ $\mathbf{R}^m$，$\mathbf{C}^m$ 内の境界付き多様体としての微分構造が入る．以下，写像の境界までの微分可能性を論じる際には，この微分構造を用いるものとする．

(M^m, g)，(N^n, h) をリーマン多様体，$v \in C^2(M, N)$ とする．M の双対コンパクトな領域 D に対して汎関数 E_D を

$$E_D(v) = \frac{1}{2} \int_D |dv|^2 dx$$

で定義する．このとき $u \in C^2(M,N)$ が調和写像であるとは，任意の双対コンパクトな領域 D に対して u が E_D の停留点になっていることとする．いま $x \in M, u(x) \in N$ の局所座標系を $(U;(x^1,\ldots,x^m)),(V;(u^1,\ldots,u^n))$ とおく．このときオイラー・ラグランジュ方程式は

$$\tau(u)^\alpha = \Delta_M u^\alpha + \sum_{i,j=1}^{m} \sum_{\beta,\gamma=1}^{n} g^{ij}\ {}^N\Gamma_{\beta}{}^{\alpha}{}_{\gamma}(u) u_i^\beta u_j^\gamma = 0 \qquad (1 \le \alpha \le n)$$

で与えられる．ただし，Δ_M は (M,g) のラプラス作用素，リーマン計量 g の成分行列を (g_{ij}) と表わすとき $(g^{ij}) = (g_{ij})^{-1}$，また ${}^N\Gamma_{\beta}{}^{\alpha}{}_{\gamma}$ は (N,h) の接続係数である．

アダマール多様体間の調和写像に関して，次の問題が考えられる．

（調和写像の無限遠境界値問題）

$(M,g),(N,h)$ をアダマール多様体とする．与えられた写像 $f \in C^0(M(\infty),N(\infty))$ に対して調和写像 $u \in C^2(M,N)$ で $u|_{M(\infty)} = f$ を満たすものを見つけよ．

境界付きコンパクトリーマン多様体間の調和写像の境界値問題に関してはHamiltonによる結果が知られている．その場合には，リーマン計量が境界まで定義されていることが本質的に重要であった．アダマール多様体にはEberlein-O'Neillによるコンパクト化が考えられるが，このときリーマン計量は境界まで定義されない，すなわち一般にその成分関数は境界で発散してしまう．これより，調和写像の方程式は境界で主部（ラプラス作用素）が退化する2階の楕円型偏微分方程式になり，境界値問題の解の一意性や存在，微分可能性を導き出すのが著しく困難になる．しかし逆にこのことより，アダマール多様体間の調和写像の境界値になりうる写像は，ある種性質のいいものではないかと期待される．したがって，まずどのような写像が調和写像の境界値として現れるのかを特徴づけようという試みは自然なことである．これに関する結果を2つ紹介する．

Definition. $(M,g),(N,h)$ をアダマール多様体とする．写像 $u \in C^0(M,N)$ が固有な写像であるとは，$x_i \to M(\infty)$ なる M 内の任意の点列 $\{x_i\}$ に対して，$u(x_i) \to N(\infty)$ がなりたつことである．

Fact 1. (Akutagawa[Ak], Li-Tam[LT1])
$u \in C^2(\mathbf{D}^m,\mathbf{D}^n) \cap C^1(\overline{\mathbf{D}^m},\overline{\mathbf{D}^n})$ を固有な調和写像とする．$(r,\theta^1,\ldots,\theta^{m-1})$, $(\rho,\eta^1,\ldots,\eta^{n-1})$ をそれぞれ $\mathbf{D}^m,\mathbf{D}^n$ の極座標系とするとき，$\mathbf{D}^m(\infty)$ において次が成立．

$$\begin{cases} (m-1)\rho_r^2 = e(f), \\ \eta_r^\alpha = 0,\ \rho_{\theta^i} = 0 \quad (1 \le i \le m-1, 1 \le \alpha \le n-1). \end{cases}$$

ただし，$f = u|_{\mathbf{D}^m(\infty)}$ であり，$e(f)$ は f を球面から球面への写像と見たときの，標準計量に関するエネルギー密度関数をあらわす．

特に $m = n = 2$ のときには

$$\rho_r^2 = \eta_\theta^2, \quad \eta_r = \rho_\theta = 0$$

がなりたつので u は無限遠境界ではconformal mapと同じふるまいをすることがわかる.

Fact 2. (Donnelly [Do])
$m,n\geq 2$ とする. $u\in C^2(\mathbf{B}^m,\mathbf{B}^n)\cap C^1(\overline{\mathbf{B}^m},\overline{\mathbf{B}^n})$ を固有な調和写像, $f=u|_{\mathbf{B}^m(\infty)}$ とする. このとき次が成立.

$$d_pf(H_p)\subset H_{f(p)}\qquad \forall p\in\mathbf{B}^m(\infty).$$

ここで $\mathbf{B}^m(\infty)=S^{2m-1}$ であり, Hopf fiber $S^{2m-1}\to\mathbf{C}P^{m-1}$ の点 $p\in S^{2m-1}$ における水平方向を H_p と表した. S^{2m-1} 上には自然に接触形式 ξ が定義され, 各点 p で H_p はその零化空間になる. したがって, とくに $m=n$ のとき, f は接触構造を保存する写像となる.

Note. Akutagawa, Li-Tam, Donnelly はそれぞれ, 境界写像が満たすべき必要条件を導くだけでなく, 無限遠境界値問題の解の一意性, 存在, および微分可能性に関する結果を得ている. 詳しくは [Ak], [LT1], [LT2], [LT3], [Do] を参照のこと.

2 主定理

前節であげた2つの例はいずれも同じタイプの双曲型空間型の間の調和写像に関する結果であったが, この節では複素双曲型空間型から実双曲型空間型への固有な調和写像が境界で満たすべき条件を調べ, 次の定理を証明する.

Theorem. $m,n\geq 2$, $u\in C^2(\overline{\mathbf{B}^m},\overline{\mathbf{D}^n})$ を固有な調和写像とする. このとき, u の境界値は定数写像.

以下, $m,n\geq 2$ とする. また S^{2m-1} で $\mathbf{B}^m$ の無限遠境界を表す.

$\mathbf{B}^m$, $\mathbf{D}^n$ の座標系はユークリッド空間の直交座標系 $z=(z^1,\dots,z^m)\in\mathbf{B}^m$, $x=(x^1,\dots,x^n)\in\mathbf{D}^n$ を用いる. [LN] にならって $\mathbf{C}^m$ のglobalなベクトル場 N,X_j $(1\leq j\leq m)$ を

$$\begin{cases} N=\displaystyle\sum_{i=1}^m z^i\frac{\partial}{\partial z^i}, \\ X_j=\displaystyle\sum_{i=1}^m(\delta_{ij}-z^i\bar z^j)\frac{\partial}{\partial z^i}=\frac{\partial}{\partial z^j}-\langle\frac{\partial}{\partial z^j},N\rangle N \end{cases}$$

で定義する. ここで $\langle\cdot,\cdot\rangle$ は $\mathbf{C}^m$ のHermite内積. このとき,

- $N+\bar N$ は S^{2m-1} の単位外法線ベクトル場.
- $\{X_j+\bar X_j,\ \sqrt{-1}(X_j-\bar X_j),\ \sqrt{-1}(N-\bar N)\}_{j=1}^m$ は TS^{2m-1} のbasis.

また, 次の等式が成立.

Fact 3.(Li-Ni [LN]).

(1) $\sum_{j=1}^{m} z^j X_j = (1-|z|^2)N.$

(2) $L = \sum_{j=1}^{m} X_j \bar{X}_j + (m-|z|^2)\bar{N} + (1-|z|^2)N\bar{N} = \sum_{j=1}^{m} \bar{X}_j X_j + (m-|z|^2)N + (1-|z|^2)\bar{N}N.$

ただし,

$$L = \sum_{i,j=1}^{m} (\delta_{ij} - z^i \bar{z}^j) \frac{\partial^2}{\partial z^i \partial \bar{z}^j}.$$

Lemma 1. $u \in C^2(\mathbf{B}^m, \mathbf{D}^n)$ に対して

$$\tau(u)^\alpha = (1-|z|^2)\left[Lu^\alpha + \frac{2}{a(u)(z)}\{(Nu^\alpha)\langle \bar{N}u, u\rangle + (\bar{N}u^\alpha)\langle Nu, u\rangle - u^\alpha |Nu|^2\}\right]$$
$$+\frac{2}{a(u)(z)} \sum_{j=1}^{m} \{(X_j u^\alpha)\langle \bar{X}_j u, u\rangle + (\bar{X}_j u^\alpha)\langle X_j u, u\rangle - u^\alpha |X_j u|^2\}$$

が成立. ただし,

$$a(u)(z) = \frac{1-|u(z)|^2}{1-|z|^2}.$$

Proof.

$$\tau(u)^\alpha = (1-|z|^2) \sum_{i,j=1}^{m} (\delta_{ij} - z^i \bar{z}^j) \frac{\partial^2}{\partial z^i \partial \bar{z}^j}$$
$$+2(1-|z|^2)(1-|u(z)|^2)^{-1} \sum_{i,j=1}^{m} \sum_{\beta,\gamma=1}^{n} (\delta_{ij} - z^i \bar{z}^j)(u^\beta \delta_{\alpha\gamma} + u^\gamma \delta_{\alpha\beta} + u^\alpha \delta_{\beta\gamma}) u_i^\gamma u_{\bar{j}}^\beta$$
$$= (1-|z|^2) L u^\alpha$$
$$+2a(u)(z)^{-1} \sum_{\beta=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \left[\{\sum_{i=1}^{m} (\delta_{ij} - z^i \bar{z}^j) u_i^\alpha\} u^\beta u_{\bar{j}}^\beta \right.$$
$$\left. + \{\sum_{i=1}^{m} (\delta_{ij} - z^i \bar{z}^j) u_i^\beta\} u_{\bar{j}}^\alpha u^\beta + \{\sum_{i=1}^{m} (\delta_{ij} - z^i \bar{z}^j) u_i^\beta\} u^\alpha u_{\bar{j}}^\beta \right]$$
$$= (1-|z|^2) L u^\alpha$$
$$+2a(u)(z)^{-1} \sum_{\beta=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \{(X_j u^\alpha) u^\beta u_{\bar{j}}^\beta + (X_j u^\beta) u_{\bar{j}}^\alpha u^\beta + (X_j u^\beta) u^\alpha u_{\bar{j}}^\beta\}.$$

$---(*1)$

ここで $\dfrac{\partial}{\partial \bar{z}^j} = \bar{X}_j + z^j \bar{N}$ を用いて

$$
\begin{aligned}
(*1) &= (1-|z|^2)Lu^\alpha \\
&\quad +2a(u)(z)^{-1}\sum_{\beta=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\{(X_ju^\alpha)u^\beta(\bar{X}_ju^\beta + z^j\bar{N}u^\beta) \\
&\qquad\qquad +(X_ju^\beta)u^\beta(\bar{X}_ju^\alpha + z^j\bar{N}u^\alpha) + (X_ju^\beta)u^\alpha(\bar{X}_ju^\beta + z^j\bar{N}u^\beta)\} \\
&= (1-|z|^2)Lu^\alpha \\
&\quad +2a(u)(z)^{-1}\sum_{\beta=1}^{n}\Bigg[\sum_{j=1}^{m}\{(X_ju^\alpha)(u^\beta\bar{X}_ju^\beta) + (\bar{X}_ju^\alpha)(u^\beta X_ju^\beta) + u^\alpha(X_ju^\beta)(\bar{X}_ju^\beta)\} \\
&\qquad +\{(u^\beta\bar{N}u^\beta)(\sum_{j=1}^{m} z^jX_j)u^\alpha + (\bar{N}u^\alpha)u^\beta(\sum_{j=1}^{m} z^jX_j)u^\beta + u^\alpha(\bar{N}u^\beta)(\sum_{j=1}^{m} z^jX_j)u^\beta\}\Bigg] \\
&= (1-|z|^2)Lu^\alpha \\
&\quad +2a(u)(z)^{-1}\sum_{\beta=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\{(X_ju^\alpha)(u^\beta\bar{X}_ju^\beta) + (\bar{X}_ju^\alpha)(u^\beta X_ju^\beta) + u^\alpha(X_ju^\beta)(\bar{X}_ju^\beta)\} \\
&\quad +2(1-|z|^2)a(u)(z)^{-1}\sum_{\beta=1}^{n}\{(Nu^\alpha)(u^\beta\bar{N}u^\beta) + (\bar{N}u^\alpha)(u^\beta Nu^\beta) + u^\alpha(Nu^\beta)(\bar{N}u^\beta)\} \\
&= (1-|z|^2)[Lu^\alpha + \frac{2}{a(u)(z)}\sum_{\beta=1}^{n}\{(Nu^\alpha)(u^\beta\bar{N}u^\beta) + (\bar{N}u^\alpha)(u^\beta Nu^\beta) - u^\alpha(Nu^\beta)(\bar{N}u^\beta)\}] \\
&\quad +\frac{2}{a(u)(z)}\sum_{j=1}^{m}\sum_{\beta=1}^{n}\{(X_ju^\alpha)(u^\beta\bar{X}_ju^\beta) + (\bar{X}_ju^\alpha)(u^\beta X_ju^\beta) - u^\alpha(X_ju^\beta)(\bar{X}_ju^\beta)\}.
\end{aligned}
$$

□

Lemma 2. ([LN, Lemma 2.1]). 関数 $f \in C^2(\mathbf{B}^m) \cap C^1(\overline{\mathbf{B}^m})$ をとる．このとき，任意の点 S^{2m-1} に対して，点列 $\{z_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathbf{B}^m$ で次をみたすものが存在する．

(1) $z_j \to z_0 \quad (j \to \infty)$.

(2) $\lim_{j\to\infty}\{(1-|z|^2)\bar{f}(Lf)\}(z_j) = 0 \quad j \to \infty$.

以上の準備のもとにまず次の Proposition を示す．

Proposition 1. $u \in C^2(\mathbf{B}^m, \mathbf{D}^n) \cap C^1(\overline{\mathbf{B}^m}, \overline{\mathbf{D}^n})$ を固有な調和写像とする．このとき S^{2m-1} 上で次が成立．

$$X_ju^\alpha = 0, \quad \bar{X}_ju^\alpha = 0 \qquad (1 \le j \le m,\ 1 \le \alpha \le n).$$

Proof. $u^\alpha \in \mathbf{R}$ に注意して調和写像の方程式（Lemma 1）から

$$0 = a(u)(z)\langle \tau(u), u\rangle$$

$$= a(u)(z)(1-|z|^2)\langle Lu, u\rangle + 2(1-|z|^2)(2|\langle Nu, u\rangle|^2 - |u|^2|Nu|^2)$$

$$+2\sum_{j=1}^{m}(2|\langle X_j u, u\rangle|^2 - |u|^2|X_j u|^2).$$

任意の $z_0 \in S^{2m-1}$ に対して，Lemma 2 で定まる点列 $\{z_j\}_{j=1}^{\infty}$ を取る．上式に z_j を代入し $j \to \infty$ とすれば

$$(\text{1st term}) \to 0, \qquad (\text{2nd term}) \to 0.$$

また

$$(\text{3rd term}) \to 4\sum_{j=1}^{m}|\langle X_j u, u\rangle|^2 - 2\sum_{j=1}^{m}|u|^2|X_j u|^2.$$

したがって $|u(z_0)|^2 = 1$ に注意して

$$(*2) \qquad 2\sum_{j=1}^{m}|\langle X_j u, u\rangle|^2 = \sum_{j=1}^{m}|X_j u|^2.$$

一方 S^{2m-1} 上で $|u|^2 \equiv 1$ より

$$0 = X_j|u|^2 = 2\langle X_j u, u\rangle.$$

これを (*2) の左辺へ代入して

$$\sum_{j=1}^{m}|X_j u|^2 = 0.$$

よって S^{2m-1} 上で

$$X_j u^\alpha = 0 \quad (1 \le j \le m,\ 1 \le \alpha \le n)$$

が成立．また $u^\alpha \in \mathbf{R}$ より

$$\bar{X}_j u^\alpha = 0 \quad (1 \le j \le m,\ 1 \le \alpha \le n) \quad \text{at } S^{2m-1}.$$

□

Proposition 2. $u \in C^2(\overline{\mathbf{B}^m}, \overline{\mathbf{D}^n})$ を固有な調和写像とする．このとき，

$$(N - \bar{N})u^\alpha = 0 \qquad (1 \le \alpha \le n).$$

Proof. Fact (2) より S^{2m-1} 上で等式

$$(m-1)(N - \bar{N}) = \sum_{j=1}^{m}(X_j\bar{X}_j - \bar{X}_j X_j)$$

が成り立つことに注意すれば，Proposition 1から

$$(m-1)(N-\bar{N})u^\alpha = \sum_{j=1}^{m}(X_j\bar{X}_j - \bar{X}_jX_j)u^\alpha = 0$$

□

Proof of Theorem. Proposition 1, 2より S^{2m-1} 上で

$$X_ju^\alpha = \bar{X}_ju^\alpha = (N-\bar{N})u^\alpha = 0$$

が成り立つ．よって，固有な調和写像 u の境界値は定数写像である． □

実はもっと強く次のことがわかる．

Proposition 3. $u \in C^2(\overline{\mathbf{B}^m}, \overline{\mathbf{D}^n})$ をproperなharmonic mapとする．このとき，

$$Nu^\alpha = 0, \quad \bar{N}u^\alpha = 0 \qquad (1 \le \alpha \le n).$$

Note. このPropositionより S^{2m-1}上で $(N+\bar{N})u^\alpha = 0$, すなわち uの動径方向の微分は境界で0になることがわかる．

Proof. Fact (2) とProposition 1より

$$Lu^\alpha = (m-1)Nu^\alpha = (m-1)\bar{N}u^\alpha. \tag{*3}$$

よって，とくに $Nu^\alpha = \bar{N}u^\alpha \in \mathbf{R}$ であり

$$\langle Lu, u\rangle = (m-1)\langle Nu, u\rangle.$$

一方 S^{2m-1} 上で $X_ju^\alpha = 0, \bar{X}_ju^\alpha = 0$ であることと $u \in C^2(\overline{\mathbf{B}^m}, \overline{\mathbf{D}^n}), \tau(u) = 0$ より

$$a(u)(z)Lu^\alpha + 4Nu^\alpha\langle Nu, u\rangle - 2u^\alpha|Nu|^2 = 0. \tag{*4}$$

ここで $Nu^\alpha = \bar{N}u^\alpha \in \mathbf{R}$ を使った．これより

$$a(u)(z)\langle Lu, Nu\rangle = -4|Nu|^2\langle Nu, u\rangle + 2\langle Nu, u\rangle|Nu|^2$$

$$= -2\langle Nu, u\rangle|Nu|^2.$$

一方，(*3) より

$$a(u)(z)\langle Lu, Nu\rangle = (m-1)a(u)(z)|Nu|^2.$$

よって

$$\{(m-1)a(u)(z) + 2\langle Nu, u\rangle\}|Nu|^2 = 0.$$

ここで

$$a(u)(z) = 2\langle Nu, u\rangle$$

に注意して，結局

$$2m\langle Nu, u\rangle |Nu|^2 = 0. \tag{$*5$}$$

他方，$(*3), (*4)$ の両辺に u^α を掛けて α で和をとることによって

$$\langle Lu, u\rangle = (m-1)\langle Nu, u\rangle,$$

$$a(u)(z)\langle Lu, u\rangle + 4\langle Nu, u\rangle^2 - 2|Nu|^2 = 0$$

をえる．これらから

$$(m-1)a(u)(z)\langle Nu, u\rangle + 4\langle Nu, u\rangle^2 - 2|Nu|^2 = 0.$$

この両辺に $|Nu|^2$ を掛けることによって $(*5)$ から

$$|Nu|^2 = 0$$

をえる． □

参考文献

[Ak] K. Akutagawa, *Harmonic diffeomorphisms of the hyperbolic plane*, Trans. Amer. Math. Soc. **342** (1994), 325–342.

[Do] H. Donnelly *Dirichlet problem at infinity for harmonic maps: rank one symmetric spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **344** (1994), 713–735.

[LN] S-Y. Li and L. Ni, *On the holomorphicity of proper harmonic maps between unit balls with the Bergman metrics*, preprint.

[LT1] P. Li, L.-F. Tam, *The heat equation and harmonic maps of complete manifolds*, Invent. Math. **105** (1991), 1–46.

[LT2] P. Li, L.-F. Tam, *Uniqueness and regularity of proper harmonic maps*, Ann. of Math. **137** (1993), 167–201.

[LT3] P. Li, L.-F. Tam, *Uniqueness and regularity of proper harmonic maps II*, Indiana Univ. Math. J. **42** (1993), 591–635.