数理解析研究所講究録
1163 巻 2000 年 18-23

On cusps in the boundary of the one-dimensional Teichmüller space

宮地秀樹 (Hideki Miyachi)
大阪市立大学理学研究科

導入

このノートの目的は論文 [6] で得られた、次の定理の証明の概略を与えることである。

主定理 $\mathcal{E}$ を Earle 埋め込みの像とする。このとき、$\mathcal{E}$ の幾何学的有限群が対応する境界点は $\mathcal{E}$ の内方向カスプ (inward-pointing cusp) である。

ここで、$\mathbf{C}$ 内の領域 D の境界点 $x_0 \in \partial D \cap \mathbf{C}$ が D の内方向カスプであるとは、次の性質を持つ原点に接する円板 B が存在することである：任意の $t \in B$ について $x_0 + t^2 \in D$ である（図 1)。

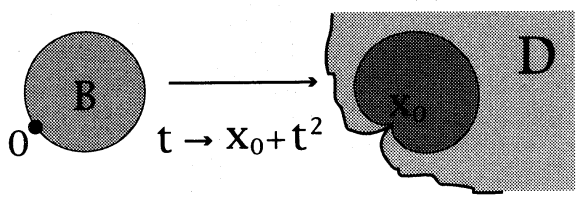

図 1: 内方向カスプ

1 記号の準備

1.1 一点穴あきトーラスの上の単純閉曲線の番号づけ

この章では一点穴あきトーラスの上の単純閉曲線の（拡張された）有理数 $\hat{\mathbf{Q}} = \mathbf{Q} \cup \{1/0\}$、 $(1/0 = \infty)$ 番号付けについてまとめる。以下、有理数 p/q は $q > 0$ を満たす互いに素な整数 p, q で書かれているものとする。

向き付けられた一点穴あきトーラス Σ を固定する。次を満たすような面 Σ の基本群 $\pi_1(\Sigma)$ の生成元 (α, β)(順序対) を固定する (これを標準生成系という、図 3 参照):

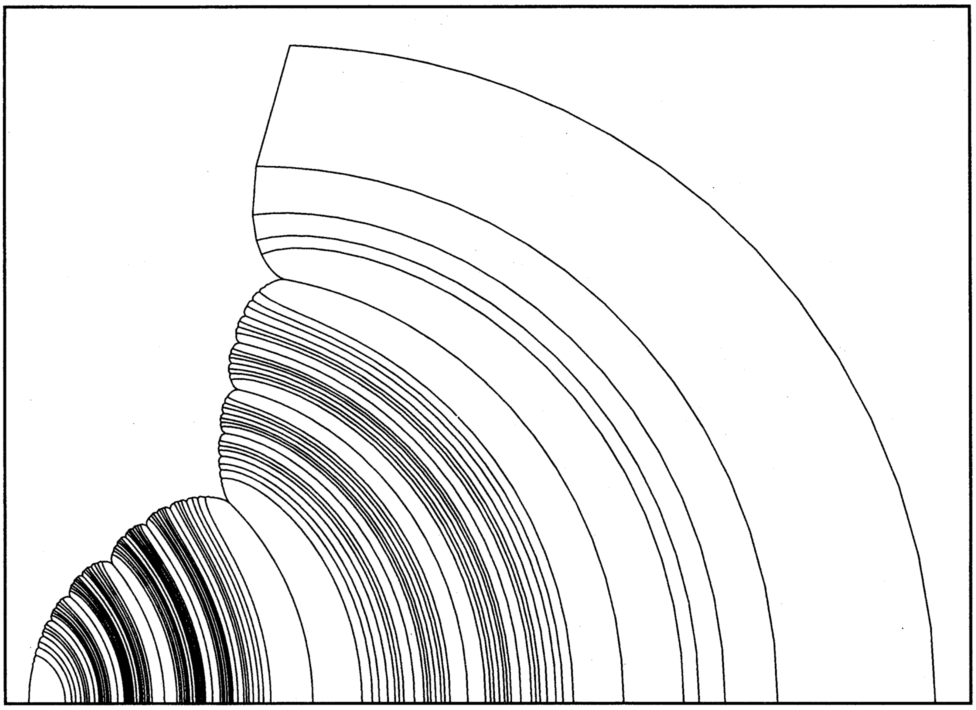

図 2: Earle 埋め込み（上半部分）(*Courtesy of Peter Liepa)*

(i) 対 (α, β) は、この順番で Σ の向きに順応して一点で交わる単純閉曲線からなる代表元を含む。
(ii) 交換子 $[\alpha, \beta]$ は穴を一回廻る曲線に対応する。

このとき $\pi_1(\Sigma)$ は（適当に基点を定めると）α と β で生成される自由群である：$\pi_1(\Sigma) = \langle \alpha, \beta \rangle$。以上の記号の下で $p/q \in \hat{\mathbf{Q}}$ について $\gamma(p/q) \in \pi_1(\Sigma)$ を次の様に帰納的に定義する：

(a) $\gamma(1/0) = \alpha^{-1}$, $\gamma(0/1) = \beta$, $\gamma(n/1) = \alpha^{-n}\beta$ $(n \in \mathbf{Z})$、
(b) $ps-rq = -1$ を満たす $p/q, r/s \in \hat{\mathbf{Q}}$ について $\gamma((p+r)/(q+s)) = \gamma(r/s)\gamma(p/q)$。

この操作により、すべての $p/q \in \hat{\mathbf{Q}}$ について $\gamma(p/q)$ が定義されることが知られている。更に $\gamma(p/q)$ のホモロジー類は $-p[\alpha] + q[\beta]$ で書かれる、ここで、$\gamma \in \pi_1(\Sigma)$ について $[\gamma]$ は γ の含む閉曲線のホモロジー類を表わす。これにより $\gamma(p/q)$ の代表元として単純閉曲線を含む事がわかり、逆に、Σ 上の単純閉曲線を代表元に持つ基本群の元は、ある $\gamma(p/q)$ に共役である事がわかる。

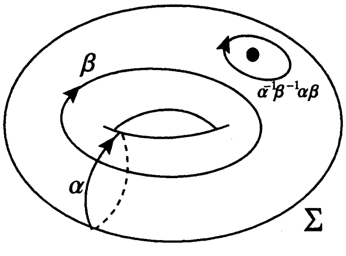

図 3: 標準生成系

1.2 Earle 埋め込み

以下、$\mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})$ の元とメビウス変換の元を自然に同一視する。$d \in \mathbf{C} - \{0\}$ について、$A_d, B_d \in \mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})$ を次の様に定義する。

$$A_d = \begin{bmatrix} \frac{d^2+1}{d} & \frac{d^3}{2d^2+1} \\ \frac{2d^2+1}{d} & d \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad B_d = \begin{bmatrix} \frac{d^2+1}{d} & -\frac{d^3}{2d^2+1} \\ -\frac{2d^2+1}{d} & d \end{bmatrix},$$

そして $\Gamma_d = \langle A_d, B_d \rangle$ とする。ここで、

$$A_d B_d A_d^{-1} B_d^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} =: P$$

である。$\rho_d : \pi_1(\Sigma) \to PSL_2(\mathbf{C})$ を $\rho_d(\alpha) = A_d$, $\rho_d(\beta) = B_d$ で定義する。この記号の下で、$\mathbf{C} - \{0\}$ 内の領域 $\mathcal{E}$ を次のように定める：$d \in \mathbf{C} - \{0\}$ について $d \in \mathcal{E}$ とは次を満たすときにいう。

(a) $\mathrm{Re} d > 0$
(b) ρ_d は忠実 (faithful) である。
(c) Γ_d が $(1,1)$ 型の擬フックス群である。

今、$d \in \mathcal{E}$ について、Γ_d の成分 $\Omega_\pm(d)$ の符号を次のように定める：Δ を Γ_d の成分とするとき $\Delta = \Omega_+(d)$ であるとは、a_d, b_d を Δ/Γ_d 上の A_d と B_d に対応する単純閉曲線とすれば順序対 (a_d, b_d) は Δ/Γ_d 上の標準生成系であるときに言う[1]。このとき $\Theta(z) = -z$ とすると

$$\Theta A_d \Theta = B_d, \quad \Theta B_b \Theta = A_d, \Theta(\Omega_+(d)) = \Omega_-(d) \tag{1}$$

が成立するので、この定義により $\Omega_+(d)$ が一意的に定まる。このとき、対応、

$$\mathcal{E} \ni d \mapsto [\Omega_+(d)/\Gamma_d, (a_d, b_d)] \in T_{1,1}$$

は正則同型である。

[1] Δ/Γ_d、$\Omega_\pm(d)/\Gamma_d$ にはリーマン球面から誘導される向きを入れておく。

$p/q \in \hat{\mathbf{Q}}$ について $E_{p/q,d} = \rho_d(\gamma(p/q))$ とおく。式 (1) と対応するホモロジー類をみることにより、$\Theta E_{p/q,d}\Theta$ は $E_{q/p,d}$ の逆元と Γ_d 内で共役であることがわかる。故に、

$$\mathrm{tr}^2 E_{p/q,d} = \mathrm{tr}^2 E_{q/p,d}, \quad d \in \mathbf{C} - \{0\},\ p/q \in \hat{\mathbf{Q}} \tag{2}$$

が成り立つ。ここで、$p/q \in \mathbf{Q}$ について q/p と書くと $\mathrm{sgn}(p)q/|p|$ を表すことにする。又、$p/q = 1/0$ については $q/p = 0/1$ を表すことにする。更に、次のことが知られている。

定理 (Komori-Series [4]) 任意の $p/q \in \hat{\mathbf{Q}} - \{\pm 1/1\}$ について、次をみたす点 $c(p/q) \in \partial\mathcal{E} \cap (\mathbf{C} - \{0\})$ が唯一つ存在する

(a) $\Gamma_{c(p/q)}$ は $E_{p/q,d}$ と $E_{q/p,d}$ を A.P.T. にもつ maximally parabolic group である。
(b) $-1 < p/q < 1$ ならば $\mathrm{Im}c(p/q) > 0$ そうでないならば $\mathrm{Im}c(p/q) < 0$。さらに $\overline{c(p/q)} = c(q/p)$ が成立する。

この $c(p/q)$ を見つけるには $\mathcal{E}$ 内（故に $T_{1,1}$ 内）で閉曲線 $\gamma(p/q)$ の双曲的長さを 0 にする変形による極限をとればよい。

ここで、上に出てきた maximally parabolic group を定義しておく。その前にまず、G の boundary characteristic $b(G)$ を定義する。$K(G)$ を $\mathbf{H}^3/G$ のコンパクト芯とする。$\partial K(G)$ 上の互いに交わらずかつホモトピックでない曲線族の数の極大数を $\tau(G)$ とする。又、$n(G)$ を G 内の階数 2 の放物型部分群の共役類の個数とする。このとき、G の boundary characteristic を $b(G) := \tau(G) - n(G)$ と定義する。例えば G が (g,n) 型の擬フックス群もしくはその境界群であれば $b(G) = 6g - 6 + 3n$ である。このとき、有限生成 Klein 群 G が maximally parabolic group であるとは次を満たすときに言う：G の階数 1 の放物型部分群の共役類の個数が $b(G)$ である。maximally parabolic group は幾何学的有限であることが知られている (Keen-Maskit-Series [1])。我々の場合では、$\Gamma_{c(p/q)}$ の階数 1 の放物型部分群の共役類の代表系として $\langle E_{p/q,d}\rangle$、$\langle E_{q/p,d}\rangle$ そして $\langle P\rangle$ の 3 つがとれる。そして $b(\Gamma_{c(p/q)}) = 3$ なので、この群は maximally parabolic group である。

2 定理の証明の概略

主定理は次の二つの定理を示すことにより証明される。

定理 A $p/q \in \hat{\mathbf{Q}} - \{\pm 1/1\}$ について、

$$\left.\frac{d}{dc}\mathrm{tr}^2 E_{p/q,c}\right|_{c=c(p/q)} \neq 0 \tag{3}$$

であれば $c(p/q)$ は $\mathcal{E}$ の内方向カスプである。

定理B $\pi_1(\Sigma)$ の表現空間を $\mathcal{R}$ とする。各 $p/q \in \hat{\mathbf{Q}} - \{\pm 1/1\}$ について、正則写像

$$\Phi: \quad \mathcal{R} \ni [\rho] \mapsto \Phi([\rho]) = (\mathrm{tr}^2\rho(\gamma(p/q)), \mathrm{tr}^2\rho(\gamma(q/p))) \in \mathbf{C}^2$$

は $[\rho_{c(p/q)}] \in \mathcal{R}$ で最大階数 2 をもつ。

定理Aは Maskit 埋め込みの場合と同様に証明される (cf. [5])。定理Bを論文[6] において Maskit 埋め込みの場合に得られた定理を使って証明される。これを簡単に説明する：表現 $\rho_{c(p/q)}$ は既約であるので点 $[\rho_{c(p/q)}]$ は $\mathcal{R}$ の正則点である。さらに点 $[\rho_{c(p/q)}]$ は Earle 埋め込みの点であると同時に $\gamma(p/q)$, $\gamma(q/p)$ のそれぞれを A.P.T. とするような 2 つの Maskit Slice の交点でもある。この二つの Maskit Slice を与える複素平面からの正則写像は、点 $[\rho_{c(p/q)}]$ に対応する点で微分がゼロでないことが論文 [6] の結果により分る。この二つの正則写像と Φ の合成を考えると、これら二つの正則写像の与える点 $[\rho_{c(p/q)}]$ での $\mathcal{R}$ の複素接ベクトルは $d\Phi|_{[\rho_{c(p/q)}]}$ により一次独立なベクトルに移ることがわかるので、以上より定理Bの主張を得る。

定理A,Bから主定理が示されることは次の通り：定理Aより、任意の $p/q \in \hat{\mathbf{Q}} - \{\pm 1/1\}$ について式 (3) を示せばよい。

$\mathbf{C} - \{0\}$ 上の正則関数

$$\mathbf{C} - \{0\} \ni d \mapsto \mathrm{tr}^2\rho_d(\gamma(1/0)) = \mathrm{tr}^2 E_{1/0,d} = (2d + 1/d)^2 \in \mathbf{C}$$

が $d = c(p/q)$ で微分が 0 でないことと定理Bより、合成関数 $\Phi([\rho_d])$ は $d = c(p/q)$ で階数 1 であることがわかる。したがって式 (2) より、式 (3) を得る。

参考文献

[1] L. Keen, B.Maskit, and C.Series, *Geometric finiteness and uniqueness for Kleinian groups with circle packing limit sets*, J. reine. angew. Math. 436(1993), 209-219.

[2] Y.Komori, *Minsky's pivot theorem and its application to the Earle slice of punctured torus groups*, Hyperbolic Spaces and Related Topics, RIMS koukyuuroku 1104, RIMS, Kyoto University (1999), 91-102.

[3] Y.Komori and C.Series, *Riley slice revisited*, Warwick Preprint: 48/1997.

[4] Y.Komori and C.Series, *Pleating coordinates of the Earle embedding*, Warwick Preprint: 46/1998.

[5] H. Miyachi, *On the horocyclic coordinate for the Teichmüller space of once punctured tori*, submitted (1999).

[6] H. Miyachi, *On cusps in the boundaries of the Earle slice and the Maskit slice for once punctured torus groups*, preprint (1999).

[7] H. Miyachi, *Cusps in complex boundaries of one-dimensional Teichmüller space*, preprint (2000).

[8] D.J.Wright, *The shape of the boundary of Maskit's embedding of the Teichmüller space of once punctured tori*, Version 0.8, preprint (1988).

[9] D.J.Wright, *Portraits of Maskit's embedding of the Teichmüller space of once punctured tori*, preprint (1998).