数理解析研究所講究録
1164巻 2000年 133-143

On differential subordinations

群馬工業高等専門学校　斎藤　斉

HITOSHI SAITOH
Department of Mathematics, Gunma National College of Technology
Maebashi, Gunma 371-8530, Japan
E-mail; saitoh@nat.gunma-ct.ac.jp

December 22, 1999

実数値関数の微分方程式の分野において、重要な応用をもつ differential inequalities の多くの例がある．たとえば、$I=(-1,1)$ として次の微分作用素

$$D[f](t)=t^2f''(t)+4tf'(t)+2f(t)+6t$$

が、$0<D[f](t)<2$ $(t\in I)$ をみたすと仮定する．このとき、$-1<f(t)<2$ $(t\in I)$ がわかる．この結果は、次のように表すことができる．

$$D[f](t)\subset(0,2)\Longrightarrow f(I)\subset(-1,2) \qquad (1)$$

Miller と Mocanu は、[6], [7] で実数値関数に対する differential inequalities を含む考えを、複素数値関数に拡張した．ここではこれらの考えを用いて second differential subordination について述べたい．

§1 Introduction

前ページで述べた(1)の左のinclusionはnatural complex analog $D[f](U)\subset\Omega$をもつ．ここで$D[f](z)=z^2f''(z)+4zf'(z)+2f(z)+6z$で$U,\Omega\subset\mathbb{C}$かつ$U$は単位円板である．$f:U\to\mathbb{C}$がこのinclusionsをみたせば，(1)と同様次のような表現ができる．

$$D[f](U)\subset\Omega\implies f(U)\subset\Delta \tag{2}$$

Ω,Δを$\mathbb{C}$の任意の集合とし，$p(z)$は$p(0)=a$で単位円内で正則とする．さらに$\psi(r,s,t;z):\mathbb{C}^3\times U\to\mathbb{C}$を考える．この小論では，次の表現で問題を考えてゆく．i.e.,

$$\{\psi(p(z),zp'(z),z^2p''(z);z\mid z\in U\}\subset\Omega\implies p(U)\subset\Delta \tag{3}$$

(注) 上の(2)は$\psi(r,s,t;z)=t+4s+2r+6z$の形をもつ．

ここでsubordinationについて述べておく．

(3)におけるΩ,Δはsimply connected domainとする．fとFはUで正則とし，Fは特に単葉とする．このとき，$f(0)=F(0)$かつ$f(U)\subset F(U)$であればfはFにsubordinateであるといい，$f(z)\prec F(z)$または$f\prec F$と書く．

以下のことが知られている．

1) $\Delta\neq\mathbb{C}$がsimply connectedで$a\in\Delta$であれば，UからΔの上への$g(0)=a$となるconformal mapping gが存在し，(3)は次のように表される．

$$\{\psi(p(z), zp'(z), z^2p''(z); z \mid z\in U\} \subset \Omega \implies p(z) \prec q(z).$$

また、さらに

2) $\Omega \neq \mathbb{C}$ が simply connected ならば、U から Ω の上への $h(0)=\psi(a,0,0;0)$ となる conformal mapping h が存在する.

$\psi(p(z), zp'(z), z^2p''(z); z)$ が U で正則ならば (3) は次のように書ける.

$$\psi(p(z), zp'(z), z^2p''(z); z) \prec h(z) \implies p(z) \prec q(z) \qquad (4)$$

以下この小論で用いられる重要な定義を述べる.

定義 1　$\psi : \mathbb{C}^3 \times U \to \mathbb{C}$ とし、h を U で単葉とする. p が U で正則で、次の (second-order) differential subordination

$$\psi(p(z), zp'(z), z^2p''(z); z) \prec h(z), \qquad (5)$$

をみたすとき、p は differential subordination の解とよばれる. 単葉関数 q は (5) をみたすすべての p に対して $p \prec q$ ならば、differential subordination の (解の) dominant という. さらに、(5) のすべての dominants に対して $\tilde{q} \prec q$ をみたす $\tilde{q}$ を (5) の best dominant という.

(注)　first-order differential subordination については、以下のことがよく知られている。

(I)　Goluzin [2] (1953)

$h(z)$ を convex とし、$zp'(z) \prec h(z)$ が成り立てば

$$p(z) \prec q(z) = \int_0^z \frac{h(t)}{t} dt$$ となり, $q(z)$ は best dominant.

(II) Suffridge [8] (1970)

(I) で $h(z)$ が starlike でも成り立つ.

(III) Hallenbeck & Ruscheweyh [4] (1975)

$h(z)$ を convex, $\gamma \neq 0$, $\mathrm{Re}\,\gamma \geq 0$ とするとき

$$p(z) + \frac{zp'(z)}{\gamma} \prec h(z) \Longrightarrow p(z) \prec q(z) = \frac{\gamma}{z^\gamma} \int_0^z \frac{h(t)}{t^{\gamma-1}} dt$$

ここで、$q(z)$ は best dominant.

上記の differential subordinations は subordination preserving integral operator という視点もある.([7]) i.e.,

$$f \prec g \Longrightarrow A(f) \prec A(g) \tag{6}$$

$H = H(U)$ を単位円内で正則な関数の空間で $K \subset H$ とする. A を $A : K \longrightarrow H$ をある作用素とするとき、どのような条件の下で作用素 A は subordination preserving となるか?

1) $H_0 = \{ f \in H \mid f(0) = 0 \}$ とし、$A : H_0 \longrightarrow H$ を

$$F(z) = \int_0^z \frac{f(t)}{t} dt$$, $F = A(f)$ で定義すると

① $g(z)$: convex $\Rightarrow$ (6) が成り立つ. $\rightarrow$ (I)

② $g(z)$: starlike $\Longrightarrow$ (6) が成り立つ. $\longrightarrow$ (II)

2) $A : H \longrightarrow H$ を

$$F(z)=\frac{\gamma}{z^{\gamma}}\int_0^z \frac{f(t)}{t^{\gamma-1}}\,dt \quad (\gamma\neq 0, \mathrm{Re}\,\gamma\geqq 0)$$, $F=A(f)$ で与えると

$g(z)$: convex $\Longrightarrow$ (6) が成り立つ. $\longrightarrow$ (III)

§2 2nd-order differential subordination の応用

Miller & Mocanu は [6] で 2nd-order differential subordination について、次の結果を示した.

定理 A (Miller & Mocanu 1981)

正則関数 $p(z)$ が 2nd-order differential subordination

$$A\,z^2p''(z)+B\,z\,p'(z)+C\,p(z)\prec z\ ,$$

をみたすとする. ここで $A\geqq 0$, $A+B\geqq 0$ かつ $B+C>0$ とする.

このとき, $p(z)\prec\dfrac{z}{B+C}$ で $\dfrac{z}{B+C}$ は best dominant である.

(注) $z^2p''(z)+a\,z\,p'(z)+b\,p(z)=0$ は Euler の微分方程式とよばれる. 定理 A で $A=1$, $B=a$, $C=b$ とおくと,

$$z^2p''(z)+a\,z\,p'(z)+b\,p(z)\prec z \Longrightarrow p(z)\prec\frac{z}{a+b}$$

$(1+a\geqq 0,\ a+b>0)$ が成り立つ. これを Euler type の 2nd-order differential subordination とよぶことにする.

また, Miller & Mocanu は [7] で次を証明した.

定理B (Miller & Mocanu 1987)

$h(z)$はUでconvexで, $h(0)=0$とし, $A \geqq 0$とする. $B(z)$, $C(z)$はUで正則で次の不等式をみたすとする,

$$\mathrm{Re}\{B(z)\} \geqq A + |C(z)-1| - \mathrm{Re}\{C(z)-1\} \quad (z \in U).$$

pがUで正則かつ$p(0)=0$ならば, 次が成り立つ.

$$A z^2 p''(z) + B(z) z p'(z) + C(z) p(z) \prec h(z) \Rightarrow p(z) \prec h(z).$$

(注) 定理Bで$A=1$, $B(z)=a$, $C(z)=b$とおき, $h(z)=z$にとれば, Euler type の 2nd-order differential subordination を得る.

$\mathrm{Re}\, a \geqq 1 + |b-1| - \mathrm{Re}(b-1)$ のとき

$$z^2 p''(z) + a z p'(z) + b p(z) \prec z \Longrightarrow p(z) \prec z$$

次の微分方程式はBesselの微分方程式として有名である.

$$z^2 T''(z) + z T'(z) + (z^2 - \nu^2) T(z) = 0$$

以下では, Bessel type の 2nd-order differential subordination について考えてみたい. すなわち

$$A z^2 p''(z) + B(z) z p'(z) + C(z) p(z) \prec h(z) \tag{7}$$

定理1 $h(z)$をUでconvex (univalent)で$h(0)=0$とし, $A \geqq 0$とする. $k>1$とし, $B(z)$, $C(z)$はUで正則で

$$k\,\mathrm{Re}\{B(z)\} > A + |C(z)-1| - \mathrm{Re}\{C(z)-1\} \quad (z \in U) \tag{8}$$

をみたすとする．p が U で正則で $p(0)=0$ とし，p が 2nd-order differential subordination (7) をみたせば，$p(z) \prec h(z)$ である．

この証明のためには，次の Miller & Mocanu [6] による補題が必要である．

補題2 (Miller & Mocanu 1981)

p を U で正則，h を $p(0)=h(0)$ となる $\overline{U}$ 上 convex (univalent) とする．p が h に subordinate しないならば，以下の3つの条件をみたす $p(|z|<|z_0|) \subset h(U)$ に対して $z_0 \in U$, $w_0 \in \partial U$ と $m \geqq 1$ が存在する．

(i) $p(z_0) = h(w_0)$,

(ii) $z_0 p'(z_0) = m w_0 h'(w_0)$, and

(iii) $\mathrm{Re}\left\{ \dfrac{z_0^2 p''(z_0)}{w_0 h'(w_0)} \right\} \geqq -m$.

定理1の証明

h は U で convex だから，$h_r(z) = h(rz)$ $(r_0 < r < 1)$ とおくと，h_r は $\overline{U}$ で convex である．さらに $p_r(z) = p(rz)$ とおけば，(7) から次を得る．

$$u_r(z) \equiv A z^2 p_r''(z) + B(rz) z p_r'(z) + C(rz) p_r(z) \prec h_r(z)$$

$(z \in U,\ r_0 < r < 1)$ (9)

補題2を用いて、$p_r(z) \prec h_r(z)$ $(r_0<r<1)$ を示す.

p_r がある r $(r_0<r<1)$ に対して h_r に subordinate でないとする.

補題2より、$z_0 \in U$, $w_0 \in \partial U$, $m \geqq 1$ が存在して、

$$p_r(z_0) = h_r(w_0), \quad z_0 p_r'(z_0) = m w_0 h_r'(w_0),$$

$$\mathrm{Re}\left\{ \frac{z_0^2 p_r''(z_0)}{w_0 h_r'(w_0)} \right\} \geqq -m \tag{10}$$

が成り立つ.

$$V \equiv \frac{u_r(z_0) - h_r(w_0)}{w_0 h_r'(w_0)}$$ とおけば (9) より

$$V = \frac{A z_0^2 p_r''(z_0)}{w_0 h_r'(w_0)} + \frac{B(rz_0) z_0 p_r'(z_0)}{w_0 h_r'(w_0)} + \frac{C(rz_0) p_r(z_0) - h_r(w_0)}{w_0 h_r'(w_0)} \tag{11}$$

ここで $u_r(z_0) = h_r(w_0) + V w_0 h_r'(w_0)$ (12)

である. $\mathrm{Re}\, V > 0$ を示せば矛盾を導ける. h_r は convex で $h_r(0)=0$ であるから

$$\mathrm{Re}\left\{ \frac{w_0 h_r'(w_0)}{h_r(w_0)} \right\} \geqq \frac{1}{2} \quad (|w_0|=1),$$

または $$\left| \frac{h_r(w_0)}{w_0 h_r'(w_0)} - 1 \right| \leqq 1. \tag{13}$$

また、次のことが成り立つ.

W, Z は複素数とし、$|Z-1|<1$ とする. このとき

$$\mathrm{Re}\, WZ = \mathrm{Re}\, W + \mathrm{Re}\, W(Z-1) \geqq \mathrm{Re}\, W - |W|.$$

この不等式で

$$W = C(rz_0)-1 \quad , \quad Z = \frac{h_r(w_0)}{w_0 h'_r(w_0)}$$ とおくと (13) から

$$\mathrm{Re}\left\{(C(rz_0)-1)\cdot\frac{h_r(w_0)}{w_0 h'_r(w_0)}\right\} \geqq \mathrm{Re}\{C(rz_0)-1\} - |C(rz_0)-1| \qquad (14)$$

を得る．(11) において，(8)，(10)，(14) を用いて

$$\begin{aligned}
\mathrm{Re}\, kV &= Ak\,\mathrm{Re}\left\{\frac{z_0^2 p''_r(z_0)}{w_0 h'_r(w_0)}\right\} + k\,\mathrm{Re}\left\{B(rz_0)\frac{z_0 p'_r(z_0)}{w_0 h'_r(w_0)}\right\} \\
&\qquad + k\,\mathrm{Re}\left\{\frac{C(rz_0)p_r(z_0) - h_r(w_0)}{w_0 h'_r(w_0)}\right\} \\
&> Ak(-m) + km\{A + |C(rz_0)-1| - \mathrm{Re}[C(rz_0)-1]\} \\
&\qquad + k\{\mathrm{Re}[C(rz_0)-1] - |C(rz_0)-1|\} \\
&= k(m-1)\{|C(rz_0)-1| - \mathrm{Re}[C(rz_0)-1]\} \\
&\geqq 0 \quad , \text{ i.e., } \quad |\arg V| < \frac{\pi}{2} .
\end{aligned}$$

(12) で convex domain $h_r(U)$ の境界に $w_0 h'_r(w_0)$ が垂直であるということを用いて $u_r(z_0) \notin h_r(U)$ を得る．これは，(9) に矛盾する．よってすべての r ($r_0 < r < 1$) に対して，$p_r \prec h_r$ でなければならない．$r \to 1^-$ とすることにより目的の $p(z) \prec h(z)$ を得る． (証明終)

(注) Brown [1] は Bessel の微分方程式の解である Bessel function についての正則性、単葉性、spiral-like について、

調べている．また ν が実かつ正のときの星型性についても述べている．

定理1において，特別な場合として次の系を得る．

(Bessel type の 2nd-order differential subordinations)

系3 $z^2p''(z)+zp'(z)+(z^2-\nu^2)p(z)\prec z \Rightarrow p(z)\prec z$

系4 $z^2p''(z)+zp'(z)+(z^2-\nu^2)p(z)\prec \dfrac{z}{1-z} \Rightarrow p(z)\prec \dfrac{z}{1-z}$

References

1. Brown, R.K., Univalent solutions of $W''+pW=0$, Canad. J. Math. 14 (1962), 69-78.
2. Goluzin, G.M., On the majorization principle in function theory, Dok. Akad. Nauk. SSSR 42 (1953), 647-650.
3 Goodman, A.W., Univalent Functions, Vol.1,2, Marinar, Tampa, Frorida 1983.
4 Hallenbeck, D.J. and Ruscheweyh St., Subordination by convex functions, Proc. Amer. Math. Soc. 52(1975), 191-195.
5 Miller, S.S. and Mocanu, P.T., Second order differential inequalities in the complex plane, J. Math. Anal. & Appl. 65 (1978), 289-305.

6. Miller, S.S. and Mocanu, P.T., Differential subordinations and univalent functions, Michigan Math. J. 28 (1981), 157-171.

7. Miller, S.S. and Mocanu, P.T., Differential subordinations and inequalities in the complex plane, J. Diff. Equa. 67 (1987), 199-211.

8. Suffridge, T. J., Some remarks on convex maps of the unit disc, Duke Math. J. 37 (1970), 775-777.