数理解析研究所講究録
1164 巻 2000 年 53-56

ON THE INNER RADIUS OF UNIVALENCE FOR AN ANNULUS

京都大学理学研究科　能仁信亮 (Shinryo Nonin)

1 INTRODUCTION

円環領域の単射性内半径の評価、及び漸近挙動について考える。

まず単射性内半径を定義しよう。D を Riemann 球面 $\hat{\mathbb{C}}$ 上の領域とするとき、D の単射性内半径 $\sigma_I(D)$ は

$$\sigma_I(D) = \sup\{\sigma \geq 0 : \|S_f\|_D \leq \sigma \Rightarrow f \text{ は } D \text{ 上で単葉}\}$$

と定義される。

ただし $\|S_f\|_D$ は、D における Schwarzian derivative S_f の hyperbolic sup norm で、D 上解析的な関数 f に対して次のように定義する。

$$S_f(z) = \left(\frac{f''(z)}{f'(z)}\right)' - \frac{1}{2}\left(\frac{f''(z)}{f'(z)}\right)^2$$

$$\|S_f\|_D = \sup_{z\in D} |S_f(z)|\rho_D(z)^{-2}$$

ここで $\rho_D(z)|dz|$ は D の hyperbolic metric で、単位円板 U の hyperbolic metric を

$$\rho_U(z)|dz| = \frac{|dz|}{1-|z|^2}$$

としたとき、

$$\rho_D(p(z))|p'(z)| = \rho_U(z)$$

で与えられる。ただし p は U から D への analytic projection とする。

D が単連結領域の場合は、次のような定理がある。

定理 1.1 (Ahlfors-Gehring[1]) D が単連結領域ならば

$$\sigma_I(D) > 0 \Longleftrightarrow D : \textit{quasidisc}$$

具体的な領域の $\sigma_I(D)$ は計算もされている。

定理 1.2

(1) 単位円板 U [1]

$$\sigma_I(U) = 2$$

(2) 無限セクター $S_k = \{z \in \mathbb{C} : 0 < \arg z < k\pi\}$ [1]

$$\sigma_I(S_k) = \begin{cases} 2k^2 & \textit{if} \quad 0 < k \leq 1 \\ 4k - 2k^2 & \textit{if} \quad 1 < k < 2 \end{cases}$$

(3) 最小の角度 $k\pi$ の三角形の内部 T_k、及び外部 $T_k{}^*$ [3]

$$\sigma_I(T_k) = 2k^2 \qquad \sigma_I(T_k{}^*) = 4k - 2k^2$$

(4) 楕円の外部 $E_r = \{z = x + iy \in \mathbb{C} : (rx)^2 + y^2 > 1\}$ [2]

$$\frac{16}{\pi}\arctan q - \frac{32}{\pi^2}(\arctan q)^2 \leq \sigma_I(E_r) \leq \frac{16}{\pi}\arctan r - \frac{32}{\pi^2}(\arctan r)^2$$

ただし $q = r(2 - r^2)^{-1/2}$

D が多重連結領域のときは、定理 1.1 に対応する定理として次が知られている。

定理 1.3 (Osgood[4]) D が有限連結領域ならば

$$\sigma_I(D) > 0 \Longleftrightarrow \text{境界}\partial D\text{ の各成分は、1 点又は } \textit{quasicircle} \text{ からなる。}$$

ところが定理 1.2 に対応する具体的な多重連結領域の単射性内半径の値はほとんど知られていない。そこでここでは、多重連結領域のなかでも比較的計算のしやすそうな円環の単射性内半径について考える。

2 MAIN THEOREM

円環領域 $A_R = \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < R\}$ の単射性内半径を考える。

定理 2.1 (円環 A_R の単射性内半径の評価)

$$2\left(\frac{\pi - 2\alpha}{\pi(\pi - \alpha)}\right)^2 \leq \sigma_I(A_R) \leq \min\left(2, \frac{6(\log R)^2}{\pi^2}\right)$$

ただし $\alpha = \arccos\left(\frac{R-1}{R+1}\right)$ $(0 < \alpha < \pi/2)$

系 2.2 (漸近評価)

$$\sigma_I(A_R) \asymp (R-1)^2 \quad \textit{as } R \to 1$$

$$\lim_{R\to\infty} \sigma_I(A_R) \geq \frac{2}{\pi^2}$$

この定理を証明するために、まず次の補題を証明する。

補題 2.3 $B_R = \{z \in A_R : \operatorname{Im} z > 0\}$ とすると

$$\sigma_I(B_R) \leq \sigma_I(A_R)$$

< 証明 >

f を A_R から $\hat{\mathbb{C}}$ への有理型関数で $\|S_f\|_{A_R} < \sigma_I(B_R)$ をみたすものとする。もし f が単射でないとすると $\exists z_1, z_2 \in A_R$、$z_1 \neq z_2$、$f(z_1) = f(z_2)$ となる。回転により $z_1, z_2 \in \overline{B_R}$ として良い。$B_R \subset A_R$ より $\|S_f\|_{B_R} \leq \|S_f\|_{A_R} < \sigma_I(B_R)$。一般に $\|S_f\|_D < \sigma_I(D)$ なら f は $\hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ への quasiconformal mapping として拡張できる (c.f.[1])。$f|_{B_R}$ の $\hat{\mathbb{C}}$ への quasiconformal 拡張を $\tilde{f}$ とかくと $\tilde{f}(z_1) = \tilde{f}(z_2)$ となり矛盾。よって f は A_R で単射。□

次の定理を使えば $\sigma_I(B_R)$ を下から評価できる。

定理 2.4 (Ahlfors' univalence criterion[1])

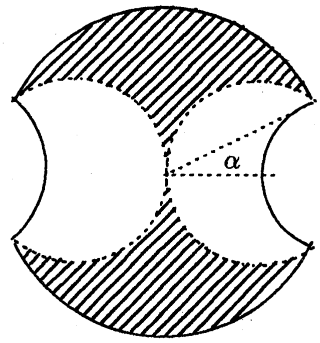
D: quasidisc $\quad$ *λ: quasiconformal reflection in ∂D*

$$\sigma_I(D) \geq 2 \operatorname*{ess.inf}_{z \in D} \frac{|\bar{\partial}\lambda(z)| - |\partial\lambda(z)|}{|\lambda(z) - z|^2 \rho_D(z)^2}$$

この定理の右辺の ess.inf の中は *Möbius* 不変、つまり h を *Möbius* 変換、$\varphi = h \circ \lambda \circ h^{-1}$、$\zeta = h(z)$ とすると、次の式が成り立つ。

$$\frac{|\bar{\partial}\lambda(z)| - |\partial\lambda(z)|}{|\lambda(z) - z|^2 \rho_D(z)^2} = \frac{|\bar{\partial}\varphi(\zeta)| - |\partial\varphi(\zeta)|}{|\varphi(\zeta) - \zeta|^2 \rho_{h(D)}(\zeta)^2}$$

B_R を Möbius 変換 $w = \frac{z - i\sqrt{R}}{z + i\sqrt{R}}$ でうつしたあと (うつした先の領域を C_R とする) に、定理 2.4 にでてくる quasiconformal reflection を構成する。



C_R(斜線部分が C_1)

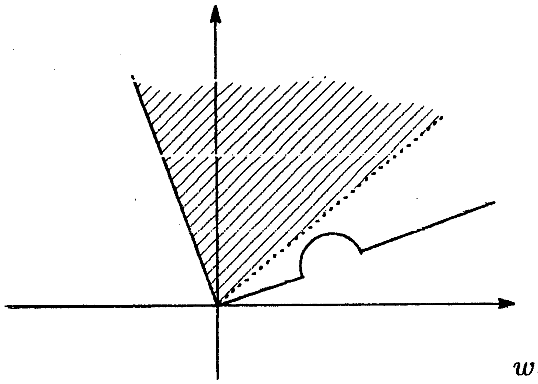
quasiconformal reflection λ を次のように構成しよう。
上図の斜線部分 (C_1 とする) では

$$\lambda_1(z) = \frac{1}{\bar{z}}$$

それ以外の部分 (C_2 とする) では、α を上図のようにとり ($\alpha = \arccos\left(\frac{R-1}{R+1}\right)$)、$\varphi = \frac{z - e^{i\alpha}}{z - e^{-i\alpha}}$ とおき、次のように構成する。

$$\tilde{\lambda}(z) = e^{ip} z^{1-q} \bar{z}^q \qquad \text{ただし } p = \frac{(\pi + 2\alpha)(2\pi - 2\alpha)}{\pi - 2\alpha} \quad , q = \frac{2\pi - 2\alpha}{\pi - 2\alpha}$$

$$\lambda_2(z) = \varphi^{-1} \circ \tilde{\lambda} \circ \varphi$$



$w = \frac{z-e^{i\alpha}}{z-e^{-i\alpha}}$ による C_R の像（斜線部分は C_1 の像）

斜線部分の境界では $\lambda_1(z) = \lambda_2(z)$ であり

$$\left|\frac{\partial\lambda_2}{\bar\partial\lambda_2}\right| = \left|\frac{1-q}{q}\right| = \frac{\pi}{2\pi-2\alpha} < 1 \qquad (0 < \alpha < \frac{1}{2}\pi)$$

より、このように構成した λ は、quasiconformal reflection である。

＜定理 2.1 の証明＞

定理 2.4 の右辺を具体的に計算すると次のようになり、下からの評価がでる。

$$\inf_{z\in C_1} \frac{|\bar\partial\lambda_1(z)| - |\partial\lambda_1(z)|}{|\lambda_1(z)-z|^2\rho_{C_R}(z)^2} \geq \min\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2\tan\alpha}\right)$$

$$\inf_{z\in C_2} \frac{|\bar\partial\lambda_2(z)| - |\partial\lambda_2(z)|}{|\lambda_2(z)-z|^2\rho_{C_R}(z)^2} \geq \left(\frac{\pi-2\alpha}{\pi(\pi-\alpha)}\right)^2$$

上からの評価は、A_R 上で単射でない関数の Schwarz 微分の norm を計算すればよい。$f(z) = z^2$、$g(z) = (\frac{R+z}{R-z})^{i\epsilon}$ $(\epsilon > 0)$ の Schwarz 微分の norm を計算すれば上からの評価がでる。 □

$\alpha = \arccos(\frac{R-1}{R+1})$ に注意すると定理 2.1 から系 2.2 がただちに従う。

参考文献

[1] O.Lehito,Univalent Functions and Teichmüller Spaces, Springer-Verlag(1987).

[2] M.Lehtinen,Estimates of the inner radius of univalency bounded by conic sections, Ann.Acad.Sci.Fenn.,**10**(1985),349-353.

[3] M.Lehtinen,Angles and the inner radius of univalency,Ann.Acad.Sci.Fenn.,**11**(1986),161-165.

[4] B.G.Osgood,Univalence criteria in multiply-connected domains,Trans.Amer.Math.Soc.,**260** (1980),459-473.