数理解析研究所講究録
1168 巻 2000 年 93-114



# Solvability of mixed Monge-Ampére equations and Riemann-Hilbert factorizations

吉野 正史
中央大学 経済学部

## 考える問題

次の Monge-Ampère 方程式を考える。

$$M(u) := \det(u_{x_ix_j}) = f(x),\ u_{x_ix_j} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}, \tag{1}$$

ここで $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \Omega \subset \mathrm{R}^n$ ( or in $\mathrm{C}^n$) であり、$\Omega$は必ずしも有界とは限らない。 今 $u^0(x)$ を$\Omega$ で滑らかな関数とし

$$f_0(x) = \det(u^0_{x_ix_j})$$

とおく。この時、$u^0(x)$は(1)で$f = f_0$とした時の解である。そこで、$z = u_0(x)$から変形としてえられる曲面を考える。すなわちつぎの問題を考える。

$$\det(v_{x_ix_j} + u^0_{x_ix_j}) = f_0(x) + g(x) \quad \text{in } \Omega, \tag{$MA$}$$

ここで $g$ は$\Omega$で滑らか、あるいは解析的とする。

一般に2次元の場合$u_0(x) = x_1^4 + cx_1^2x_2^2 + x_2^4$を考えると$c$の取り方により localize する曲面の極率が変化し、対応するMonge-Ampére 方程式は$u = u_0$でdegenerate elliptic, degenerate hyperbolic あるいはmixed type, i.e., elliptic-hyperbolicとなる。

**例** $n = 2$ と仮定し、$x_1 = x$ $x_2 = y$と置き、Monge-Ampére 方程式を考える。

$$M(u) = u_{xx}u_{yy} - u_{xy}^2 + c(x,y)u_{xy}, \tag{$MA$}$$

ここで $c(x,y)$は $x$ と $y$の多項式である。$u_0$ は次数が4の斉次多項式であると仮定する。 $f_0 = M(u^0)$ とおき(MA)を考える。$P := M'_{u_0}$を $M(u)$ の $u = u^0$での線形化とする。すなわち

$$(u_0)_{xx}\partial_y^2 + (u_0)_{yy}\partial_x^2 - 2(u_0)_{xy}\partial_x\partial_y.$$

従って、discriminant は$-M(u_0)$に等しい。これより、方程式 (MA) は (weakly) hyperbolic であるための必要十分条件は $M(u_0) \leq 0$ であることであり、(MA)が (degenerate) elliptic であるための必要十分条件は$M(u_0) \geq 0$である。

**Example 1.**

$$u^0 = x^2y^2, \quad c(x,y) = kxy \quad k \in R$$

の場合

$$f_0 = M(u^0) = 4(k-3)x^2y^2$$

であり、線形化作用素は

$$P = 2x^2\partial_x^2 + 2y^2\partial_y^2 + (k-8)xy\partial_x\partial_y, \quad \partial_x = \partial/\partial x, \ldots$$

である。特性多項式は

$$-2x^2\xi_1^2 - 2y^2\xi_2^2 - (k-8)xy\xi_1\xi_2$$

であるので discriminat は

$$D = (k-4)(k-12)x^2y^2$$

である。これより、(MA) が degenerate hyperbolic $\Longleftrightarrow k < 4$ or $k > 12$, 他方 degenerate elliptic $\Longleftrightarrow 4 < k < 12$.

後で示すように" もし $k > 4$ ならば方程式 (MA) は可解である"。

**Example 2.** 次の方程式を考える。

$$u^0 = x^4 + kx^2y^2 + y^4, \quad k \in R, \ c \equiv 0.$$

この時、

$$f_0 = M(u^0) = 12(2kx^4 + 2ky^4 + (12-k^2)x^2y^2).$$

簡単な計算よりわかるようにもし $k < -6$ ならば $f_0 \leq 0$ であり、*degenerate hyperbolic.* もし $k > 6$ ならば集合 $\{f_0 = 0\} \subset R^2$ は4つの原点で交わる直線より成る。この時、方程式はこの直線を横切る時elliptic から hyperbolic と型を変える。従って、方程式は混合型である。

この例において もし $k < -6$ あるいは $k > 8$ ならば (MA) は可解である。実際、これは混合型に成る場合を含む。

このような方程式を解くにあたり、内部では方程式の型が変化するのでそれを (Silov) 境界に
"blowing up" し境界上で解く。それを harmonic extension で内部に拡張する。最大値原理によって境界上の一意解から内部での解が構成できる。ここで、本質的な点は連続な解が構成できる点である。

## 常微分方程式の場合

つぎの常微分方程式を考える。

$$p(t, \partial_t) := \sum_{k=0}^{m} a_k(t)\partial_t^k,$$

ここで $a_k(t)$ は $\Omega \subset \mathbf{C}$ で正則な行列とする。今は簡単の為$\Omega = \{|t| < w\}$ $(w > 0)$ と仮定する。次の写像を考える。

$$p : \mathcal{O}(\Omega) \mapsto \mathcal{O}(\Omega),$$

この問題を考えるにあたり、大きな困難は $p$ の $t = 0$ での退化より現れる。そこで $\Omega$ で直接考えるかわりにその境界 $\mathbf{T} = \{|t| = w\}$ に方程式をもちあげる。

$L^2(\mathbf{T})$ をトーラス上で2乗可積分な関数の全体とし、Hardy空間 $H^2(\mathbf{T})$ をつぎで定義する。

$$H^2(\mathbf{T}) := \{u = \sum_{-\infty}^{\infty} u_n e^{in\theta} \in L^2; u_n = 0 \text{ for } n < 0\}.$$

$H^2(\mathbf{T})$ は $L^2(\mathbf{T})$ の閉部分空間である。$\pi$ を $L^2(\mathbf{T})$ から $H^2(\mathbf{T})$ への射影とする。すなわち、

$$\pi\left(\sum_{-\infty}^{\infty} u_n e^{in\theta}\right) = \sum_{0}^{\infty} u_n e^{in\theta}.$$

以上の設定のもとでは、トーラス上の関数と円板内の正則関数の対応は冪級数展開によって与えられる。すなわち

$$\mathcal{O}(\Omega) \ni \sum_{0}^{\infty} u_n z^n \longleftrightarrow \sum_{0}^{\infty} u_n e^{in\theta} \in H^2(\mathbf{T}).$$

## トーラスへのblow upと解の構成

トーラス上にblow upされた作用素をもとめる。極座標 $t = re^{i\theta}$を用いて、

$$t\partial = \frac{1}{2}\left(r\frac{\partial}{\partial r} - i\frac{\partial}{\partial\theta}\right), \quad \overline{t\partial} = \frac{1}{2}\left(r\frac{\partial}{\partial r} + i\frac{\partial}{\partial\theta}\right),$$

ここで $\bar{\partial}$ は Cauchy-Riemann 作用素。 $\bar{\partial}u = 0$と仮定すると $P(t,\partial)u$において 動径方向の微分 $r\partial/\partial r$ は接方向の微分でおきかえることができる。すなわち、

$$r\frac{\partial}{\partial r} = -i\frac{\partial}{\partial\theta}, \quad t\partial = -i\frac{\partial}{\partial\theta} = D_\theta.$$

従って、求める制限はつぎの原理によって与えられる

$$t\frac{\partial}{\partial t} \mapsto D_\theta, \quad t \mapsto e^{i\theta}.$$

よって、トーラス上の作用素は次によって与えられる。

$$\hat{p} = \sum_k a_k(e^{i\theta})e^{-ik\theta}D_\theta(D_\theta - 1)\cdots(D_\theta - k + 1),$$

ここで次を用いた。

$$t^k\partial_t^k = t\partial_t(t\partial_t - 1)\cdots(t\partial_t - k + 1).$$

この時 $\pi\hat{p} = \hat{p}$が成り立つ。
従って、

原点の近傍で与えられた方程式$Pu = f$はトーラス上の方程式$\hat{p}\hat{u} = \hat{f}$ になる。ここで、$\hat{f}$は$f$のトーラスへの制限である。今、解$\hat{u} = \sum_0^\infty u_n e^{in\theta} \in H^2(\mathbf{T})$が求まったとする。この時、$u := \sum_0^\infty u_n z^n$は単位円内で正則な関数である。正則関数 $Pu = f$ は単位円内で正則である。境界上で$\hat{p}\hat{u} = \hat{f}$であるので最大値原理により $Pu = f$である。そこで、トーラス上での可解性を考えればよい。

**注意**　上の計算では結局変換$t=e^{i\theta}$を実行すればよい。この変換はLangerによって原点に極を持つSchrödinger方程式の研究に関して用いられた。

**トーラス上に方程式をblow upしたことの有用性**

作用素 $\langle D_\theta\rangle$ を次によって定義する。

$$\langle D_\theta\rangle u := \sum_n u_n\langle n\rangle e^{in\theta},\ \langle n\rangle = (1+n^2)^{1/2}.$$

正則関数族上での対応する作用素は次で与えられる。

$$\langle t\partial_t\rangle u := \quad (1+(t\partial/\partial t)^2)^{1/2} = \sum u_n\langle n\rangle z^n.$$

ただちにわかるように

$$D_\theta(D_\theta-1)\cdots(D_\theta-k+1)\langle D_\theta\rangle^{-k} = Id+K,$$

ここで $K$ は $H^2$上のコンパクト作用素である。証明は後で与える。従って、$\langle D_\theta\rangle^{-m}$は可逆な作用素であるので$\hat{p}$のかわりに$\hat{p}\langle D_\theta\rangle^{-m}$を考えてもよい。$\hat{p}\langle D_\theta\rangle^{-m} = \pi\hat{p}\langle D_\theta\rangle^{-m}$であり、また$\hat{p}\langle D_\theta\rangle^{-m}$の主部は$a_m(e^{i\theta})e^{-im\theta}$であるので結局コンパクト作用素を法として 次の作用素を考えることに帰着する。

$$(*) \qquad \pi a_m(e^{i\theta})e^{-im\theta} : H^2 \mapsto H^2.$$

実際微分の階数が$m$より小さい部分は$\langle D_\theta\rangle^{-m}$をかけるとコンパクト作用素になる。

この最後に現れた作用素は微分を含まない。またその係数はなめらかであることに注意する。$a_m(t)$は$t=0$で消えるが$a_m(e^{i\theta})$はblow upしたので0ではない。従って、シンボルは消えない。

**定義**　作用素(*)は$H^2(\mathbf{T})$上のToeplitz作用素といわれる。$a_m(e^{i\theta})$はToeplitz作用素のシンボルといわれる。これはトーラス上の滑らかな関数でよい。

この作用素は掛け算作用素と射影から成り立つが、$a_m(e^{i\theta})$が$H^2$の元であれば割り算によって解を構成できる。というのは射影が必要ないからである。一般の場合にRiemann-Hilbert分解を用いて解く方法については後で述べる。

## Riemann-Hilbert 分解と可解性ー1変数の場合

以下ではトーラス上にblow upされた作用素を解くためのRiemann-Hilbert分解の方法について述べることにする。まず常微分方程式の場合について述べる。

**定義**　有理関数 $p(z) := a(z)z^{-m}$ が $|z|=1$に関して *Riemann-Hilbert* 分解可能であるとは

$$p(z) = p_-(z)p_+(z),$$

が成立することである。ここで$p_+(z)$は $|z|<1$で正則かつ連続であって、$|z|\le 1$まで0にならず、$p_-(z)$ は $|z|>1$ で正則、連続であって、$|z|\ge 1$で0にならない。

例　$p(z) := a(z)z^{-m}$、$a(0) \neq 0$の場合
$a(z)$ の零点の位数は $m+n$ であるすると

$$p(z) = c(z-\lambda_1)\cdots(z-\lambda_m)(z-\lambda_{m+1})\cdots(z-\lambda_{m+n})z^{-m}$$

$$= c(1-\frac{\lambda_1}{z})\cdots(1-\frac{\lambda_m}{z})(z-\lambda_{m+1})\cdots(z-\lambda_{m+n}).$$

従って、 Riemann-Hilbert 分解可能であるための必要十分条件は

$$(RH) \qquad |\lambda_1| \le \cdots \le |\lambda_m| < 1 < |\lambda_{m+1}| \le \cdots \le |\lambda_{m+n}|.$$

この条件 (RH) のもとで 写像 (*) の核と余核は消えることをしめそう。実際、証明は同じであるので (*) の核を考える。定義により $\pi pu = 0$ は次と同等になる。

$$p(e^{i\theta})u(e^{i\theta}) = g(e^{i\theta}),$$

ここで $g$ は $e^{i\theta}$の負べキのみより成る。もし $|\lambda_j| < 1$ ならば級数 $(1-\lambda_j e^{-i\theta})^{-1}$ は非負べきから成る。従って

$$(1-\frac{\lambda_j}{e^{i\theta}})U(e^{i\theta}) = \text{negative power} \qquad \Longrightarrow$$

$$U(e^{i\theta}) = (1-\frac{\lambda_j}{e^{i\theta}})^{-1} \times (\text{negative power}) = (\text{negative power}).$$

これを繰り返して

$$(z-\lambda_{m+1})\cdots(z-\lambda_{m+n})u(z), \quad z = e^{i\theta}$$

は負べきのみよりなることがわかる。他方、これは $z$の多項式であったので $u=0$ を得る。

次に可解性をしめす。解くべき方程式は

$$\left(1-\frac{\lambda_1}{e^{i\theta}}\right)\left(e^{i\theta}-\lambda_2\right)u(e^{i\theta}) \equiv f(e^{i\theta}) \quad \text{mod negative power}.$$

従って、

$$\left(e^{i\theta}-\lambda_2\right)u(e^{i\theta}) \equiv \left(1-\frac{\lambda_1}{e^{i\theta}}\right)^{-1} f = f_+ + f_- \equiv f_+.$$

ここで、$f_+, f_-$はそれぞれフーリエ係数の台が非負あるいは負に含まれるような分解とする。特に

$$\left(e^{i\theta}-\lambda_2\right)u(e^{i\theta}) = f_+$$

を解く。求める解は $u(e^{i\theta}) = (e^{i\theta}-\lambda_2)^{-1}f_+$

## blow up の応用一常微分方程式の指数公式

原点で特異な作用素をトーラス上にblow upするとその方程式の特異性が扱いやすくなる。このような応用の例として、常微分方程式の指数公式の初等的な証明を与える。

$\Omega \subset C$をつぎを満たす有界領域とする。

(A.1) 等角写像$\psi : D_w = \{|z| < w\} \mapsto \Omega$で$\psi$ は$\overline{D_w} = \{|z| \leq w\}$の近傍まで正則に拡張できるものが存在する。

$w > 0$, $\mu \geq 0$ として

$$G_w(\mu) = \{u = \sum_n u_n x^n; \|u\|^2 := \sum_n (|u_n| \frac{w^n n!}{(n-\mu)!})^2 < \infty\},$$

ここで $(n-\mu)! = 1$ if $n - \mu \leq 0$. 明らかに、$G_w(\mu)$ はHilbert 空間である。$\mathcal{A}_w(\mu)$ を$\Omega$上で正則な関数$u(x)$ の全体で、$u(\psi(z)) \in G_w(\mu)$ となるものとして定義する。

$N \times N$ $(N \geq 1)$ 行列の常微分作用素

$$P(x, \partial_x) = (p_{ij}(x, \partial_x))$$

を考える。ここで $p_{ij}$は$\overline{\Omega}$で正則な常微分作用素。簡単のため、 実数$\nu_i$, $\mu_j$ $(i, j = 1, \ldots, N)$ が存在して、

$$ord\, p_{ij} \leq \mu_j - \nu_i, \quad ord\, p_{ii} = \mu_i - \nu_i,$$

となっていると仮定する。従って、

$$P(x, \partial_x) : \prod_{j=1}^{N} \mathcal{A}_w(-\mu_j) \longrightarrow \prod_{j=1}^{N} \mathcal{A}_w(-\nu_j). \tag{1}$$

$$p_{ij}(x, \partial_x) = \sum_{k=0}^{\mu_j - \nu_i} a_k(x) \partial_x^k, \tag{2}$$

$a_k(x) \in \mathcal{O}(\overline{\Omega})$ とかくと、変数変換$x = \psi(z)$ によって$p_{ij}$は

$$\tilde{p}_{ij}(z, \partial_z) = \sum_{k=\mu_j - \nu_i} a_k(\psi(z)) \psi'(z)^{-k} \partial_z^k + \cdots, \tag{3}$$

になる。ここで dots はorder が真に$\mu_j - \nu_i$より小さいものであり、これはcompact perturbationsである。

Toeplitz symbol を$Q^{\Omega}(z) := (q_{ij}^{\Omega}(z))$ で定義する。 ここで

$$q_{ij}^{\Omega}(z) = a_{\mu_j - \nu_i}(\psi(z))(z\psi'(z))^{\nu_i - \mu_j}. \tag{4}$$

この時次が成り立つ。

**定理** (A.1) を仮定する。その時、 写像 (1) が Fredholm 作用素であるための必要十分条件は

$$\det Q^{\Omega}(z) \neq 0 \qquad \text{for } \forall z \in \mathbf{C}, |z| = w. \tag{5}$$

もし、 (5) が満足されれば, (1) の Fredholm index $\chi(:= dim_{\mathbf{C}} Ker\, P - codim_{\mathbf{C}} Im\, P)$ はつぎで与えられる。

$$-\chi = \frac{1}{2\pi} \oint_{|z|=w} d(\log \det Q^{\Omega}(z)), \tag{6}$$

ここで積分は正の方向にとる。

**証明の方針**　簡単のため、$\mu_j - \nu_i = m$すなわち$ord\,p_{ij} = m$であるとする。前の計算と同じ理由により、トーラス上に制限された作用素に$\langle D_\theta \rangle^{-m}$は$Q^\Omega$を主部に持つorder零の作用素である。したがって、(5)のもとで楕円型になり、Fredholm性がわかる。その主部の作用素$\pi Q^\Omega : H^2 \to H^2$は低階がコンパクト作用素であるのでFredholm作用素である。これを内部に拡張すれば、(1)のFredholm性がわかる。たとえば、境界上の作用素の核は内部の作用素の核と1対1に対応する。なぜならば、境界上に核は単位円内部に解析的に拡張すると最大値原理により、内部での作用素の核である。逆に内部の核は境界上に制限して境界上の作用素の核である。余核についても同様である。

逆に(1)のFredholm性から(5)が従うことをしめすためには境界上にblow upされた作用素がFredholmであるとしておいてよい。その時(5)をしめす。以下では簡単のため単独の場合にしめす。この証明はいささか技術的であるので括弧の中にかいておく。

トーラス上の作用素$\pi Q^\Omega$を$T$とかく。$Ker\,T$への有限次元射影を$K$であらわす。そのとき、ある定数$c >$が存在して

$$\|Tf\| + \|Kf\| \geq c\|f\|, \qquad \forall f \in H^2.$$

これより、

$$\|\pi Q^\Omega \pi g\| + \|\pi K \pi g\| + c\|(1-\pi)g\| \geq c\|g\|, \qquad \forall g \in L^2.$$

$U$を$e^{i\theta}$の掛け算作用素とすると

$$\|\pi Q^\Omega \pi U^n g\| + \|\pi K \pi U^n g\| + c\|(1-\pi)U^n g\| \geq c\|U^n g\|, \qquad \forall g \in L^2.$$

$U$は距離を保存するので

$$\|U^{-n}\pi Q^\Omega \pi U^n g\| + \|\pi K \pi U^n g\| + c\|U^{-n}(1-\pi)U^n g\| \geq c\|g\|, \qquad \forall g \in L^2.$$

作用素$U^{-n}\pi U^n$は$L^2$で$n$について一様に有界であり、$U^{-n}\pi U^n \quad g \to g$が$L^2$で各三角多項式$g$に対して強収束の意味で成立する。従って、$U^{-n}\pi U^n \quad g \to g$が$L^2$で強収束の意味で成立する。よって$U^{-n}(1-\pi)U^n g$は0に強収束し、

$$U^{-n}\pi Q^\Omega \pi U^n g = U^{-n}\pi U^n Q^\Omega U^{-n}\pi U^n g \to Q^\Omega$$

が強収束の意味で成立する。他方、$U^n$は0に弱収束するので$\pi K \pi U^n g$は0に強収束する。従って、$\|Q^\Omega g\| \geq c\|g\|$がすべての$g \in L^2$に対して、成立する。この時、もし、$Q^\Omega$が消えたとすると、その点の与えられた近傍に台をもち、そのノルムが1であるような$g$が存在する。これは上の不等式に反する。従って、求めることがえられる。

次に指数公式(6)をしめす。簡単のため、$Q^\Omega(z)$は$z$の有理多項式である場合を考える。すなわち

$$Q^\Omega(z) = c(z-\lambda_1)\cdots(z-\lambda_m)(z-\lambda_{m+1})\cdots(z-\lambda_{m+n})z^{-k}.$$

ここで
$$|\lambda_1| \le \cdots \le |\lambda_m| < 1 < |\lambda_{m+1}| \le \cdots \le |\lambda_{m+n}|.$$
この時、(6) の右辺は$m-k$である。作用素
$$\pi Q^\Omega : H^2 \to H^2$$
のFredholm指数が$k-m$であることをしめす。ここで$(z-\lambda_{m+1})\cdots(z-\lambda_{m+n})$は単位円坂内で零にならないのでこれの掛け算は$H^2$ 上の1対1の作用素であるので$Q^\Omega(z) = c(z-\lambda_1)\cdots(z-\lambda_m)z^{-k}$ であるとしてよい。これの核と余核の計算は直接漸化式をつくることでしめせる。アイデアを説明するため$Q^\Omega(z) = (z-\lambda)z^{-k}$ ($|\lambda| < 1$) を考える。この時、$u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n z^n$を
$$\pi(z-\lambda)z^{-k}u = 0$$
に代入すると
$$(z-\lambda)z^{-k}\sum_{n=0}^{\infty} u_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty}(u_{n-1} - \lambda u_n)z^{n-k}$$
であるので係数を比較して順に$n = k-1, \ldots$にたいして次の式を得る。
$$u_{k-1} - u_k\lambda = 0, \quad u_k - \lambda u_{k+1} = 0, \ldots$$
ここで$u_0, u_1, \ldots u_{k-2}$は自由に指定できる。今$u_{k-1} = c \neq 0$と仮定すると
$$u_k = c/\lambda, u_{k+1} = c/\lambda^2, \ldots$$
この時、これから作られる$u$の収束半径は1より真に小さいのでこれはkernelにいらない。そこでkernelは$k-1$次元である。

次に余核は0次元すなわち写像は全射であることをしめす。次の方程式を考える。
$$\pi(z-\lambda)z^{-k}u = f = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n.$$
前と同様にして次の漸化式をえる。
$$u_{k-1} - u_k\lambda = f_0, \quad u_k - \lambda u_{k+1} = f_1, \quad u_{k+1} - \lambda u_{k+2} = f_2, \ldots$$
そこで
$$u_0 = u_1 = \cdots = u_{k-2} = 0,$$
とおいて、上の漸化式より帰納的に
$$\begin{aligned} u_{k-1} &= \lambda u_k + f_0 = f_0 + \lambda f_1 + \lambda^2 u_{k+1} = f_0 + \lambda f_1 + \lambda^2 f_2 + \lambda^3 u_{k+2} + \cdots \\ &= f_0 + \lambda f_1 + \lambda^2 f_2 + \lambda^3 f_3 + \cdots \\ u_k &= \lambda u_{k+1} + f_1 = f_1 + \lambda f_2 + \lambda^2 u_{k+2} = f_1 + \lambda f_2 + \lambda^2 f_3 + \lambda^3 u_{k+3} + \cdots \\ &= f_1 + \lambda f_2 + \lambda^2 f_3 + \lambda^3 f_4 + \cdots \end{aligned}$$
となるので全射である。これより、Ind $= k-1$である。

一般の場合も漸化式を解くことによって示すことができるが、ここでは別の証明を与えておく。そのため次の事実をまず注意しておく。

$\pi z^{-k}$は丁度$k$次元の核を持つ。$1, z, \ldots, z^{k-1}$がその基底である。また$\pi(z-\lambda)$ ($|\lambda| < 1$) は一次元の余核をもつ。なぜならば、$(z-\lambda)\sum u_n z^n = 1$を考えると$u_0 = -1/\lambda$, $u_1 = (-1/\lambda)^2$, $u_2 = (-1/\lambda)^3$, ... となり、これはトーラス上で収束せず$H^2$に入らないからである。

そこで次の定理を注意する。

**定理** (Atkinson) $A : H^2 \to H^2$, $B : H^2 \to H^2$ がFredholm作用素であるならば$BA$もFredholm作用素でありその指数について

$$\text{Ind } BA = \text{Ind } B + \text{Ind } A$$

が成り立つ。

**定理** Toeplitz作用素 $\pi q : H^2 \to H^2$, $\pi p : H^2 \to H^2$に対して$\pi(pq) - (\pi p)(\pi q)$はコンパクト作用素である。

これらの定理により、それぞれの因子に関するFredholm指数を計算することに帰着する。Fredholm指数の加法性によりもとめる公式をえる。

### PDEの場合 - 主なアイデア

Monge-Ampère 方程式に戻る。関数族

$$W_R(D_R) := \{u = \sum_\eta u_\eta x^\eta; \|u\|_R := \sum_\eta |u_\eta| R^\eta < \infty\}$$

を定義する。この時、$g \in W_R(D_R)$に対して、(MA)を解く。我々は(MA)をトーラス$\mathrm{T}^n$上にCauchy-Riemann 方程式を用いて常微分方程式の場合のように制限する。空間 $W_R(D_R)$ は $W_R(\mathrm{T}^n)$ に変換される。 ここで$R = (R_1, \ldots, R_n)$。この時、次を得る。

$$\det\left(z_j^{-1} z_k^{-1} D_j D_k v + u^0_{x_j x_k}(Rz)\right) = f_0 + g,$$

ここで $z_j = R_j e^{i\theta_j}$.

$M$を線形化する。

$$M(u^0 + v) = M(u^0) + \pi P v + R(v),$$

ここで $R(v)$ は剰余項である。これより

$$(*) \qquad \pi P v + R(v) = g \quad \text{on} \quad W_R(\mathrm{T}^n).$$

今$(\pi P)^{-1}$ が存在したと仮定する。 この時、通常のiterationによって(*)を解くことができる。すなわち、 もし $\|g\|_{W_R}$ が十分に小さいならば (*)の一意解$v$が存在する。

$\hat{v}$を$v$の$D_R$への analytic extensionとする。関数

$$M(u^0 + \hat{v}) - f_0 - g$$

は $D_R$において正則であり、 $D_R$の Silov 境界上で消える。最大値原理により、

$$M(u^0+\hat{v}) = f_0 + g \quad \text{in } D_R.$$

すなわち、可解性がわかる。

**局所一意性** 今 (MA) に対し2つの解 $w_1$, $w_2$ で $\|w_j\| \le \varepsilon$ for small $\varepsilon$であるようなものが存在したとする。その時、$\mathrm{T}^n$への制限により、制限された方程式の一意可解性より $\mathrm{T}^n$ 上において $w_1 = w_2$ が成立する。最大値原理により、 $D_R$において $w_1 = w_2$ が成立する。これは一意性を示している。

## 可解性と Riemann-Hilbert 分解について

**制限する時の公式**
blow-up を計算する時つぎの公式を用いる。

$$\partial_{x_j} \mapsto z_j^{-1}\xi_j, x_j \mapsto z_j, \quad z_j = e^{i\theta_j},$$

ここで $\xi_j$ は $\theta_j$の共役変数である。

**Toeplitz symbolの定義**
Toeplitz symbol $\sigma(z,\xi)$ をつぎで定義する。

$$\sigma(z,\xi)$$
$$= (z_1 \cdots z_n)^{-2} \det\left(\xi_j\xi_k + z_j z_k u^0_{x_j x_k}(z)\right) \ - f_0(z).$$

以下では$n=2$と仮定する。

つぎの Riemann- Hilbert 分解可能であるための条件を仮定する。

$$(A.1) \qquad \sigma(z,\xi) \neq 0 \quad \forall z \in \mathrm{T}^2, \forall \xi \in \mathrm{R}^2_+, |\xi| = 1.$$

$$(A.2) \qquad ind_1\, \sigma = ind_2\, \sigma = 0,$$

ここで

$$ind_1\, \sigma = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|\zeta|=1} d_{z_1} \log \sigma(\zeta, z_2, \xi).$$

ここで積分は$z_2$ と $\xi$に関して集合$\mathrm{T}^2 \times \{|\xi|=1\}$のうえで整数値の連続関数であるので連結性より、定数である。

形式級数 $f$に対して $f$の order ord $f$をそれを構成する単項式の最小の次数とする。すなわち$\partial_x^\alpha f_0(0) \neq 0$ for some $|\alpha| = k$ かつ $\partial_x^\beta f_0(0) = 0$ for all $|\beta| \le k-1$をみたすような最小の$k$とする。この時、次が成り立つ。

**定理** 1. $n=2$と仮定する。さらに(A.1) と (A.2)を仮定する。この時、$r>0$ と整数 $N \ge 2$ で $u^0$できまるものが存在して、すべての $g \in W_R$ で $\|g\|_R < r$ $ord\, g \ge N$を満たすものにたいし、方程式 (MA) は $ord\, g \ge N$となるような一意解$w$を持つ。

## 応用ーすべての形式解の収束
## - A theorem of Kashiwara-Kawai-Sjöstrand

非線型の方程式のあるクラスにたいしてすべての形式解が収束するための十分条件を与えよう。

**定理 2.** (A.1) と (A.2) を仮定する。 その時、原点で収束するような任意の $g$ で $\mathrm{ord}\, g \geq 2$ となるものにたいし、すべての (MA) の形式解は原点の近傍で収束する。

## いくつかの注意

この節ではいくつかの注意を述べる。まず、上でトーラス上の作用素を求めたが、これはいわゆる特異点解消によって直接えられることを示しておく。blowing up について以下のことは直接この授業で用いることはないので括弧の中にかいておく。詳しくは、その方面の本を参照にしてほしい。

> $p : \mathbf{C}^2 \setminus O \to \mathbf{CP}^1$ を射影空間への fibration とする。$\Gamma$を$p$のグラフとする。$\Gamma \subset (\mathbf{C}^2 \setminus O) \times \mathbf{CP}^1$ であり、$\Gamma$は$\mathbf{C}^2 \times \mathbf{CP}^1$での滑らかな曲面と考えられる。射影$\pi_1 : \mathbf{C}^2 \times \mathbf{CP}^1 \to \mathbf{C}^2$は$\Gamma$を$\mathbf{C}^2 \setminus O$ に同相に写す。
> その時、写像$p$のグラフ$\Gamma$の$\mathbf{C}^2 \times \mathbf{CP}^1$での閉包は曲面$\Gamma_1 = \Gamma \cup (O \times \mathbf{CP}^1)$ である。実際、$(x, y)$ を$\mathbf{C}^2$の座標とし、$u = y/x$ を$\mathbf{CP}^1$の局所座標とする。その時、$(x, y, u)$ は$\mathbf{C}^2 \times \mathbf{CP}^1$の局所座標である。$\Gamma$は$y = ux, x \neq 0$であり、$\Gamma_1$は$y = ux$である。これは$\Gamma$に$O \times \mathbf{CP}^1$を付け加えることで得られる。
> $\Gamma_1$の滑らかさは第 2 の座標 $(x, y, v), x = vy$を考えてわかる。射影$\pi_2 : \mathbf{C}^2 \times \mathbf{CP}^1 \to \mathbf{CP}^1$は$\Gamma_1$を直線の族で foliate する。
> **定義** $\mathbf{C}^2$ から$\Gamma_1$への手続きは$O \times \mathbf{CP}^1$への blowing up といわれる。

**例** 原点 O で交わる 3 つの直線は$\Gamma_1$においては$\mathbf{CP}^1$ と異なる点で交わる直線になる。これは定義より、ただちにわかる。

$y = x^2, y = 0$の場合にはblowing up で$\Gamma_1$上$u = x, u = 0, x = 0$になる。$y = 0$は$0 = ux$であり、$x = 0, u = 0$であるので、求めることが得られる。

$x^2 = y^3$では$x = vy$として、$v^2 = y$. さらに$y = 0$. これをもう一度blowing up して、求める分解をえる。

上で考えた変換はこれの特別な場合となることを注意する。実際、つぎのいわゆる Grushin 型の作用素を考える。

$$P = \sum_{|\alpha| = |\beta|} a_{\alpha\beta} y^\alpha \left( \frac{\partial}{\partial y} \right)^\beta .$$

ここで簡単のため$a_{\alpha\beta}$は定数であるとする。今、次のようなblowing up をする。

$$y_j = z_j t, \quad j = 1, \ldots, n.$$

これは特異点に$\mathbf{T}^n$を埋め込むことに対応する。$t$は動径のパラメータである。この時、

$$\frac{\partial}{\partial z_j} = \frac{\partial y_j}{\partial z_j} \frac{\partial}{\partial y_j} = t \frac{\partial}{\partial y_j}.$$

従って、$|\alpha| = |\beta|$ であるので

$$y^\alpha \partial_y^\beta = z^\alpha t^{|\alpha|} t^{-|\beta|} \partial_z^\beta = z^\alpha \partial_z^\beta .$$

従って、$P$はつぎの境界上の作用素に変換される。

$$\hat{P} = \sum_{|\alpha|=|\beta|} a_{\alpha\beta} z^{\alpha} \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^{\beta}.$$

これは上で求めた作用素と一致する。

Langer **の変換について** blowing up の変換は$x_j = e^{i\theta_j}$なる変換であるが、これと同様な変換が Langer によって用いられている。彼は$x = 0$で2次の極をもつような Schrödinger 方程式の漸近解析をおこなうとき$x = e^y$なる変換をもちいた。これは$x = 0$での特異性を消す効果がある。

$$-\frac{d^2}{dx^2} + \lambda^2 \left(V(x) + \frac{k(k+1)}{x^2\lambda^2}\right) u = Eu$$

$E = 0$としても差し支えない。Langer の変換で$u(x)x^{-1/2} = w(y)$とおいて

$$\left(-\frac{d^2}{dy^2} + \frac{d}{dy} + \lambda^2 V(e^y)e^{2y} + \frac{k(k+1)}{\lambda^2}\right) w = 0.$$

blow up では$x = e^{iy}$であるので

$$\left(-\frac{d^2}{dy^2} + \frac{d}{dy} + \lambda^2 V(e^{iy})e^{2iy} + \frac{k(k+1)}{\lambda^2}\right) w = 0.$$

従って、この変換は本質的には同一である。

Riemann-Hilbert **分解と可逆性**

一般的な事実　常微分作用素の場合にはトーラス上に blow-up された作用素は projection を別にすれば関数であったが、今の場合には（擬）微分作用素があらわれる。この作用素が、(A1), (A.2) のもとで Hardy 空間 $H^2(T^2)$ での楕円型作用素になることをしめす。（実はこれは (A1), (A2) が成立するための必要十分でもある。
Gårding の定理の Hardy 空間版）以下では簡単のためトーラス上に blow up された作用素は関数であると考えても以下の議論では本質は変わらない。

定義　$T^2 := S \times S$, $S = \{|z| = 1\}$ 上の関数$a(\theta_1, \theta_2) = \sum_\eta a_\eta e^{-\eta\theta}$ が$T^2$に関して Riemann-
Hilbert 分解可能であるとはその（フーリエ展開の）台がそれぞれ$I := \{\eta_1 \geq 0, \eta_2 \geq 0\}$, $II := \{\eta_1 \leq 0, \eta_2 \geq 0\}$, $III := \{\eta_1 \leq 0, \eta_2 \leq 0\}$ $IV := \{\eta_1 \geq 0, \eta_2 \leq 0\}$ に含まれ、$T^2$で消えない関数$a_{++}$, $a_{-+}$, $a_{+-}$, $a_{--}$が存在して、

$$a(\theta_1, \theta_2) = a_{++}a_{-+}a_{+-}a_{--}$$

とあらわせることである。

注意：　擬微分作用素の時はこれはシンボルの条件となる。すなわち、$a(\theta_1, \theta_2)$ は共役変数$\xi$を含む。すなわち　$a = a(\theta_1, \theta_2, \xi_1, \xi_2)$. ただし、定義は同じである。

例　条件(A1), (A.2)が成立する時は$a(\theta_1, \theta_2)$は$T^2$に関してRiemann- Hilbert分解可能である。実際、$\log a(\theta)$は定義され、(A2)によって滑らかな関数になる。よって、フーリエ展開可能である。

$$\log a(\theta) = b_{++} + b_{-+} + b_{--} + b_{+-}$$

と$I, II, III, IV$に台を分解して、

$$a(\theta) = \exp(b_{++}) \exp(b_{-+}) \exp(b_{--}) \exp(b_{+-})$$

が求める分解である。

Riemann- Hilbert分解可能であれば、それに対して可逆性あるいは(Fredholm)作用素としてのregularizerはいろいろ求まっている。ここではその1つを紹介する。われわれの例ではこのようなregularizerはいわゆるパラメトリクスを与える。このため、いくつかの記号を導入する。

$a(\theta, D)$をトーラス上にblow-upされた擬微分作用素とする。この時考える作用素は$\pi a(\theta, D)$である。ここで$\pi$はHardy空間への射影である。

$L^2(T^2)$を2乗可積分な関数の全体とし、$L^2(T^2)$の部分空間 $H_1$, $H_2$を

$$H_1 := \left\{ u \in L^2; u = \sum_{\zeta_1 \geq 0} u_\zeta e^{i\zeta\theta} \right\},$$

$$H_2 := \left\{ u \in L^2; u = \sum_{\zeta_2 \geq 0} u_\zeta e^{i\zeta\theta} \right\}.$$

で定義する。$H^2(T^2) = H_1 \cap H_2$である。射影$\pi_1$, $\pi_2$を

$$\pi_1 : L^2(T^2) \longrightarrow H_1, \quad \pi_2 : L^2(T^2) \longrightarrow H_2.$$

で定義する。この時、射影$\pi : L^2(T^2) \to H^2(T^2)$は定義により、$\pi_1\pi_2$に等しい。Toeplitz作用素$T_{+\cdot}$と$T_{\cdot+}$を次で定義する。

$$T_{+\cdot} := \pi_1 a(\theta, D) : H_1 \longrightarrow H_1$$

$$T_{\cdot+} := \pi_2 a(\theta, D) : H_2 \longrightarrow H_2.$$

Riemann - Hilbert 分解が可能である時、$T_{+\cdot}$と $T_{\cdot+}$はコンパクト作用素を法として可逆であり、その (コンパクト作用素を法とした) 逆は次で与えられる。

$$\begin{aligned} T_{+\cdot}^{-1} &= \pi_1 a_{++}^{-1} a_{+-}^{-1} \pi_1 a_{-+}^{-1} a_{--}^{-1} \pi_1, && (7) \\ T_{\cdot+}^{-1} &= \pi_2 a_{++}^{-1} a_{-+}^{-1} \pi_2 a_{+-}^{-1} a_{--}^{-1} \pi_2, && (8) \end{aligned}$$

ここで等号はコンパクト作用素を法とする。

この時、$\pi a(\theta, D)$ のregularizer $R$は次で与えられる。

$$R = \pi(T_{+\cdot}^{-1} + T_{\cdot+}^{-1} - a(\theta, D)^{-1}), \tag{9}$$

ここで$a(\theta,D)^{-1}$はシンボル$a(\theta,\xi)^{-1}$をもつ擬微分作用素である。

**可逆性の証明**　以下では$A\equiv B$とは$A$と$B$がコンパクト作用素を法として等しいことをあらわす。両辺の主シンボルを比較して、$a(\theta,D)\equiv a_{++}a_{-+}a_{--}a_{+-}$である。

$$
\begin{aligned}
&T_{+\cdot}\pi_1 a_{++}^{-1}a_{+-}^{-1}\pi_1 a_{-+}^{-1}a_{--}^{-1}\pi_1\\
&\equiv \pi_1 a_{++}a_{-+}a_{--}a_{+-}\pi_1 a_{++}^{-1}a_{+-}^{-1}\pi_1 a_{-+}^{-1}a_{--}^{-1}\pi_1\\
&\equiv \pi_1 a_{-+}a_{--}a_{++}a_{+-}a_{++}^{-1}a_{+-}^{-1}\pi_1 a_{-+}^{-1}a_{--}^{-1}\pi_1\\
&+\pi_1 a_{-+}a_{--}a_{++}a_{+-}(I-\pi_1)a_{++}^{-1}a_{+-}^{-1}\pi_1 a_{-+}^{-1}a_{--}^{-1}\pi_1\\
&\equiv \pi_1 a_{-+}a_{--}\pi_1 a_{-+}^{-1}a_{--}^{-1}\pi_1,
\end{aligned}
$$

ここで

$$(I-\pi_1)a_{++}^{-1}a_{+-}^{-1}\pi_1=0$$

を用いた。従って、上の式の右辺は

$$\pi_1 a_{-+}a_{--}a_{-+}^{-1}a_{--}^{-1}\pi_1+\pi_1 a_{-+}a_{--}(I-\pi_1)a_{-+}^{-1}a_{-+}^{-1}\pi_1$$

$\equiv\pi_1$となる。ここで$\pi_1 a_{-+}a_{--}(I-\pi_1)=0$を用いた。同様にして、

$$\pi_1 a_{++}^{-1}a_{+-}^{-1}\pi_1 a_{-+}^{-1}a_{--}^{-1}\pi_1 T_{+\cdot}\equiv\pi_1$$

を示すことができる。証明終わり。

***R*が regularizer であることの証明**　$\pi=\pi_1\pi_2$に注意して

$$
\begin{aligned}
&\pi T_{+\cdot}^{-1}\pi a\pi=\pi T_{+\cdot}^{-1}\pi_1\pi_2 a\pi\\
&=\pi T_{+\cdot}^{-1}\pi_1 a\pi-\pi T_{+\cdot}^{-1}\pi_1(I-\pi_2)a\pi\\
&\equiv\pi-\pi a_{++}^{-1}a_{+-}^{-1}\pi_1 a_{-+}^{-1}a_{--}^{-1}\pi_1(I-\pi_2)a\pi\\
&=\pi-\pi a_{++}^{-1}a_{+-}^{-1}(\pi_1\pi_2+\pi_1(I-\pi_2))\\
&\times a_{-+}^{-1}a_{--}^{-1}\pi_1(I-\pi_2)a\pi.
\end{aligned}
$$

同様にして

$$
\begin{aligned}
&\pi T_{\cdot+}^{-1}\pi a\pi=\pi T_{\cdot+}^{-1}\pi_1\pi_2 a\pi\\
&=\pi T_{\cdot+}^{-1}\pi_2 a\pi-\pi T_{\cdot+}^{-1}\pi_2(I-\pi_1)a\pi\\
&\equiv\pi-\pi a_{++}^{-1}a_{-+}^{-1}\pi_2 a_{+-}^{-1}a_{--}^{-1}\pi_2(I-\pi_1)a\pi\\
&=\pi-\pi a_{++}^{-1}a_{-+}^{-1}(\pi_1\pi_2+\pi_2(I-\pi_1))\\
&\times a_{+-}^{-1}a_{--}^{-1}\pi_2(I-\pi_1)a\pi.
\end{aligned}
$$

他方、$a^{-1}a\equiv I$であるので

$$
\begin{aligned}
&-\pi a^{-1}\pi a\pi=-\pi a^{-1}\pi_1\pi_2 a\pi\\
&\equiv-\pi-\pi a^{-1}(\pi_1\pi_2-I)a\pi.
\end{aligned}
$$

$$\pi_1\pi_2 - I = \pi_1(\pi_2 - I) + (\pi_1 - I)\pi_2 - (\pi_1 - I)(\pi_2 - I)$$

を用いて

$$\begin{aligned}-\pi a^{-1}\pi a\pi \equiv -\pi_1\pi_2 - \pi_1\pi_2 a^{-1}\pi_1(\pi_2 - I)a\pi \\ -\pi a^{-1}(\pi_1 - I)\pi_2 a\pi \\ +\pi a^{-1}(\pi_1 - I)(\pi_2 - I)a\pi.\end{aligned}$$

これらをあわせて

$$\begin{aligned}RT \equiv \pi - \pi a_{++}^{-1}a_{+-}^{-1}(\pi + \pi_1(I - \pi_2)) \\ \times a_{-+}^{-1}a_{--}^{-1}\pi_1(I - \pi_2)a\pi \\ -\pi a_{++}^{-1}a_{-+}^{-1}(\pi + \pi_2(I - \pi_1))a_{+-}^{-1}a_{--}^{-1}\pi_2(I - \pi_1)a\pi \\ -\pi a^{-1}\pi_1(\pi_2 - I)a\pi - \pi a^{-1}(\pi_1 - I)\pi_2 a\pi \\ +\pi a^{-1}(\pi_1 - I)(\pi_2 - I)a\pi.\end{aligned}$$

次に注意する。

$$\pi + \pi_1(I - \pi_2) = I - (\pi_1 - I)(\pi_2 - I) - \pi_2(I - \pi_1),$$

$$\pi + \pi_2(I - \pi_1) = I - (\pi_1 - I)(\pi_2 - I) - \pi_1(I - \pi_2).$$

従って、

$$\begin{aligned}RT - \pi \equiv \pi a_{++}^{-1}a_{+-}^{-1}((\pi_1 - I)(\pi_2 - I) \\ +\pi_2(I - \pi_1))a_{-+}^{-1}a_{--}^{-1}\pi_1(I - \pi_2)a\pi \\ +\pi a^{-1}(\pi_1 - I)(\pi_2 - I)a\pi \\ +\pi a_{++}^{-1}a_{-+}^{-1}((\pi_1 - I)(\pi_2 - I) + \pi_1(I - \pi_2)) \\ \times a_{+-}^{-1}a_{--}^{-1}\pi_2(I - \pi_1)a\pi.\end{aligned}$$

作用素

$$\begin{aligned}\pi\varphi(\pi_1 - I)(\pi_2 - I), \pi_2(I - \pi_1)\varphi\pi_1(I - \pi_2), \\ \pi_1(I - \pi_2)\varphi\pi_2(I - \pi_1)\end{aligned}$$

はコンパクトである。ここで$\varphi$は適当に選ばれた滑らかな関数である。これを示すため、
$u = \sum_\alpha u_\alpha e^{i\alpha\theta} \in L^2$と$\varphi(\xi) = \sum_\beta \varphi_\beta(\xi)e^{i\beta\theta}$を$u \in L^2$と$\varphi \in C^\infty$のフーリエ展開とする。$\varphi(\theta, D)$はorder zeroの滑らかな係数を持った擬微分作用素であるので$\varphi_\beta(\xi)$のフーリエ係数は$|\beta| \to \infty$のとき、$\xi$に一様に急減少する。従って、

$$\pi\varphi(\pi_1 - I)(\pi_2 - I)u$$

$$= \sum_{\mu=\alpha+\beta\in I}\left(\sum_{\alpha+\beta=\mu,\alpha\in III}\varphi_\beta(\mu)u_\alpha\right)e^{i\mu\theta}.$$

$I$と$III$の定義により$\mu \in I$ and $-\alpha \in I$であるので$\beta$は$|\beta| = |\mu - \alpha| \geq |\mu|$を満たす。従って、すべての$n \geq 1$と$\mu$に対して

$$|\mu|^n \sum_{\alpha+\beta=\mu, \alpha\in III} |\varphi_\beta(\mu)||u_\alpha| \leq \sum |\beta|^n |\varphi_\beta(\mu)||u_\alpha|$$

$$< \infty$$

がなりたつ。というのは$|\varphi_\beta(\mu)||\beta|^n$は$\mu$と$\beta$に関して有界であるから。従って、フーリエ係数は$u \in L^2$に関して一様に収束しする。よって、$\pi\varphi(\pi_1 - I)(\pi_2 - I)$はコンパクトである。他の作用素のコンパクト性も同様に示される。よって、$R$はleft regularizerである。同様に$R$は right regularizerである。証明終わり。

## Large parameterを含む場合の解析

考える方程式がlarge parameterを含む場合を考察する。$x = (x_1, \ldots, x_n)$の次数が$m$の多項式係数の微分作用素$p(x, \partial_x)$と有理関数$q(x)$にたいして、次の方程式の$x = 0$での解の$\lambda \to \infty$での挙動を考える。

$$(1) \qquad (p(x, \partial_x) + \lambda^2 q(x))u = f(x).$$

$x \mapsto e^{i\theta} = (e^{i\theta_1}, \ldots, e^{i\theta_n})$とblow upして$T^n$ 上の作用素を得る。

$$(p(e^{i\theta}, e^{-i\theta}D_\theta) + \lambda^2 q(e^{i\theta}))u = f(e^{i\theta}).$$

**$n = 1$ の場合**
$z = e^{i\theta}$とおいて対応するシンボルを

$$\sigma(z, \xi, \lambda) := p(z, z^{-1}\xi) + \lambda^2 q(z)$$

で定義する。この時次の**一様な**R-H**分解**を仮定する。

$$(URH) \qquad \sigma(z, \xi, \lambda) \neq 0 \text{ for } \ 0 \leq \forall z \in \mathbf{T}, \forall(\xi, \lambda) \in \mathbf{R}^2_+, \xi^2 + \lambda^2 = 1,$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1} d_z \log \sigma(z, \xi, \lambda) = 0.$$

ここで後者の条件では$(\xi, \lambda)$はある$(\xi, \lambda)$に対して成立すればよい。この後者の条件は可解性をHardy 族の上で示すために必要である。$\|\cdot\|_s$ は通常のトーラス上のソボレフ空間とする。

**定理** $s > 0$とし、条件(URH)を仮定する。その時、ある整数$N \geq 1$が存在して$deg\, f \geq N$ならば方程式(1)は一意解$u$を持つ。さらに、$C > 0$が存在して評価

$$\|u\|_{s+m} \leq \lambda^{-2}(C\|u\|_s + C^{-1}\|u\|_0)$$

が成り立つ。

**証明の方針** 主部を考え、低階項 を無視する。

$$\pi\sigma(z, z^{-1}D_\theta, \lambda) = (D_\theta^m + \lambda^2)\pi(D_\theta^m + \lambda^2)^{-1}\sigma(z, z^{-1}D_\theta, \lambda).$$

とあらわすと$\pi(D_\theta^m+\lambda^2)^{-1}\sigma(z,z^{-1}D_\theta,\lambda)$ は(URH)によって$\lambda>0$について一様に可逆である。作用素$D_\theta^m+\lambda^2$に対する評価は直接計算すればよい。

**$n=2$のばあい**
$\sigma(z,\xi,\lambda)$ $(z\in\mathbf{T}^2)$ を同様に定義する。この時次の条件を仮定する。

$$(URH) \qquad \sigma(z,\xi,\lambda)\neq 0 \text{ for } 0\leq\forall z\in\mathbf{T},\forall(\xi,\lambda)\in\mathbf{R}^3_+,|\xi|^2+\lambda^2=1,$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1} d_{z_j}\log\sigma(z,\xi,\lambda)=0, \text{ for } j=1,2, \text{ and some } (\xi,\lambda)\in\mathbf{R}^3_+,|\xi|^2+\lambda^2=1.$$

この条件下で作用素$\pi(|\xi|^m+\lambda^2)^{-1}\sigma(z,D_\theta,\lambda)$はregularizerをもつ。従って、コンパクト作用素を法として$\pi\sigma(z,D_\theta,\lambda)$は$\nabla_\theta^{m/2}+\lambda^2$ に変換される。これをフーリエ級数で解くことによって、$n=1$と同様の評価を得ることができる。

**注意** $\lambda$が各領域を動く時には$\lambda=\rho e^{i\alpha}$ $(\theta_1\leq\alpha\leq\theta_2)$ とあらわせる。従って、(URH)において$e^{2i\alpha}q$を$q$の代わりに考えておけば同様にあつかえる。

**turning pointsを含む場合の解析**　この場合にはまだRH分解の方法で漸近挙動を解析する方法は知られていない。いくつかの場合には解を構成する方法はある。

**退化楕円型の場合ー turning pointsの存在**
$\xi$と$\lambda$の作用素が楕円型でないときは(URH)は成立しない。この時簡単な場合として$\xi$と$\lambda$に関して退化楕円型の作用素になる場合を考える。このうち特に$\xi$に関しては強楕円型であり、退化は$\lambda$変数について起こる場合を考える。

**Stokes 幾何と退化楕円性** 常微分作用素の場合に楕円性が退化する事とStokes 幾何の関係について注意する。次の常微分作用素を考える。

$$(2) \qquad \frac{d^2}{dx^2}+\lambda^2 a(x).$$

**定義** $a(x)=0$を満たす点を方程式(2)の**変わり目点**(turning point)という。$z$をturning pointとし、

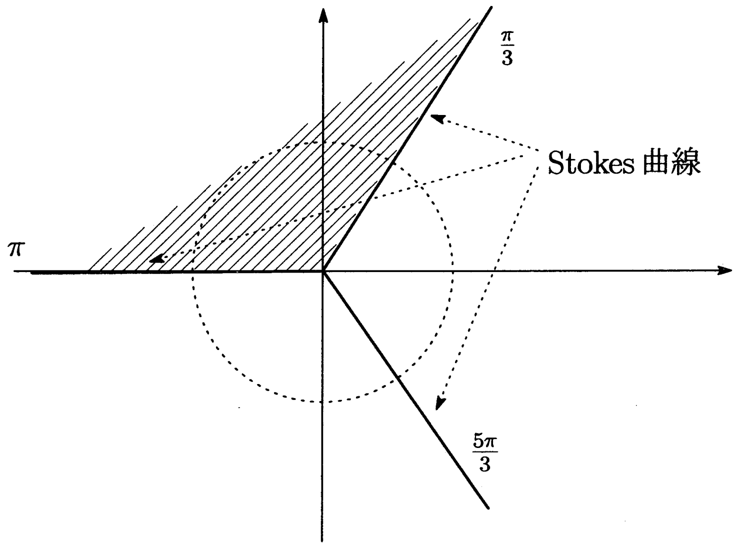
$$\Re S(x,z)=0, \qquad S(x,z)=\int_z^x\sqrt{a(t)}dt,$$

を満たす曲線をStokes 曲線という。

**例1** $a(x)=x$ (Airy 方程式)
方程式に$e^{2i\theta}$をかけてから、blow upすると

$$D_\theta^2-D_\theta+\lambda^2e^{3i\theta}.$$

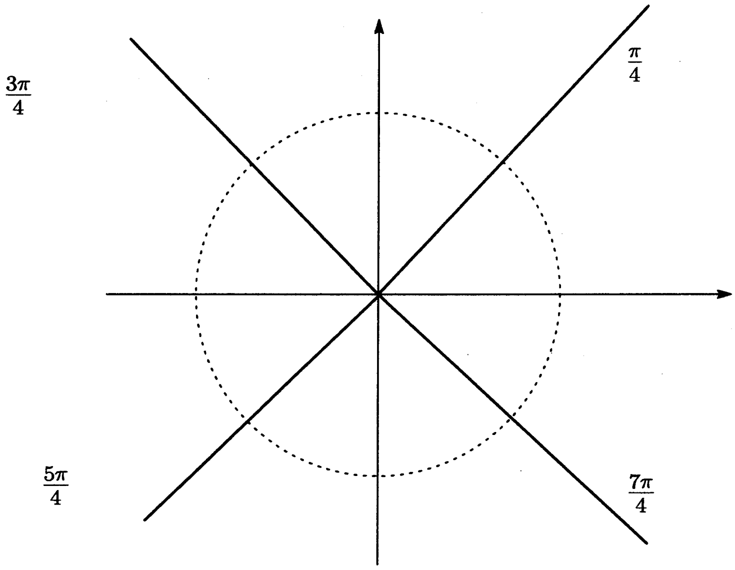
対応する主シンボルは$\xi^2+\lambda^2e^{3i\theta}$. 従って、これが消える点を求めると$\xi/\lambda=1$であって$\theta=\pi/3,\pi,5\pi/3$. これはStokes曲線がトーラスと交わる点である。(次の図を参照)
実際、$S(x)=\int_0^x\sqrt{t}dt=2x^{3/2}/3$. $3\theta/2=\pm\pi/2 \ mod\ 2\pi$より、$\theta=\pi/3,\pi,5\pi/3$. これを図にあらわすと以下のようになる。この場合、turning pointsでは$\xi$と$\lambda$のシンボルは双曲型となる。他方Stokes領域すなわちStokes曲線で分けられる3個の領域(図ではそのうちの一つに斜線をひいてある)においては楕円型である。




**例** 2　(Weber 方程式)
$a(x) = x^2$であり、方程式に$e^{2i\theta}$をかけてから、blow up すると

$$D_\theta^2 - D_\theta + \lambda^2 e^{4i\theta}.$$

対応する主シンボルは$\xi^2 + \lambda^2 e^{4i\theta}$. 従って、これが消える点を求めると$\xi/\lambda = 1$であって$\theta = \pi/4, 3\pi/4, 5\pi/4, 7\pi/4$. これはStokes 曲線がトーラスと交わる点である。(次の図を参照) 今の場合、原点は2重のturning point であり、そこからは4本のStokes 曲線がでている。この場合、turning points では$\xi$と$\lambda$のシンボルは双曲型となる。他方Stokes 領域すなわちStokes 曲線で分けられる4個の領域においては楕円型である。




**例** 3

$$-\frac{d^2}{dx^2} + \lambda^2 \left( U(x) + \frac{k(k+1)}{x^2 \lambda^2} \right).$$

ここで$U(x)$は一位の極を原点に持つとする。簡単のため$U(x)=1/x$とする。トーラス上にblow upすると

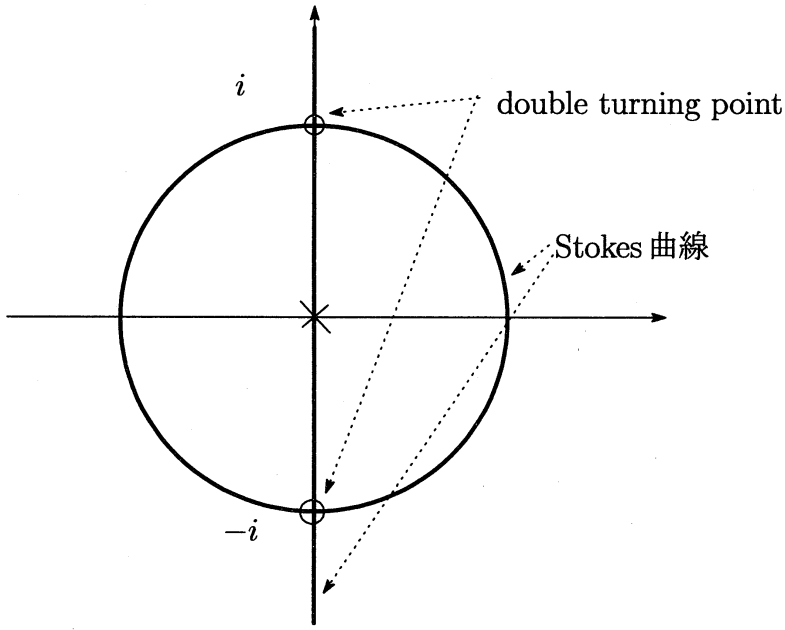
$$-D_\theta^2+D_\theta+\lambda^2\left(U(e^{i\theta})e^{2i\theta}+\lambda^{-2}\right).$$

与えられた作用素の原点から出るStokes 曲線は実軸上を正の方向に行く半直線である。トーラス上の作用素はこの直線と単位円の交点で楕円性が失われる。実際、この交点では双曲型である。この場合は例1あるいは例2に近い。

**例**4

$$a(x)=\frac{1}{x^2}\left(x+\frac{1}{x}\right)^2.$$

Stokes geometryは次のようである。




Stokes lineは単位円と虚軸である。この交点はdouble turning pointsである。原点は不確定特異点であり、そこでのpotential の極のorder は4である。そこでStokes lineは直線である。

前と同様にしてこれを$x=0$でblow upすると次の作用素がえられる。

$$D_\theta^2-D_\theta+4\lambda^2\cos^2\theta,\quad D_\theta=i^{-1}(d/d\theta).$$

これはStokes curveの交点としてあらわれる2つのdouble turning pointsを持つ。この作用素のシンボル (Toeplitz symbol)は次で与えられる。

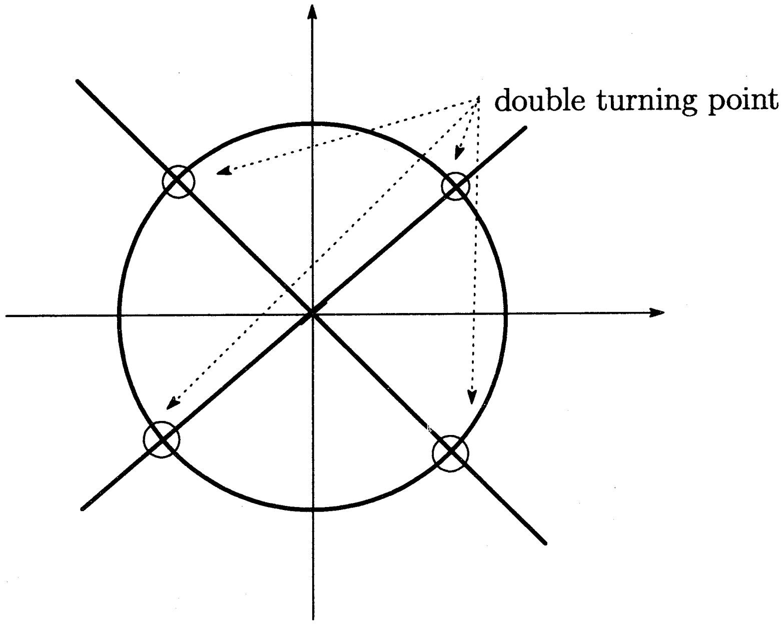
$$\xi^2-\xi+4\lambda^2\cos^2\theta.$$

これはturning points ではellipticではないが、$\xi$に関しては elliptic symbolである。すなわち退化楕円型である。原点でのStokes 曲線の方向に退化する。

**例**5

$$a(x)=\frac{1}{x^2}\left(x^k+\frac{1}{x^k}\right)^2,\quad k=1,2,3,\ldots$$

例5は例4の一般化である。そのturning pointsは$z^{2k}=-1$を満たし、すべてdoubleである。原点は不確定特異点であり、$2k$個の原点からでる直線はStokes lineである。単位円もまたStokes curveである。$k=2$でのStokes geometryは次のようになる。




これを$x=0$でblow upすると次の作用素がえられる。

$$D_\theta^2 - D_\theta + 4\lambda^2 \cos^2 k\theta, \quad D_\theta = i^{-1}(d/d\theta).$$

この作用素のturning pointsは元の作用素のdouble turning pointsと一致する。この作用素のシンボル（Toeplitz symbol)は次で与えられる。

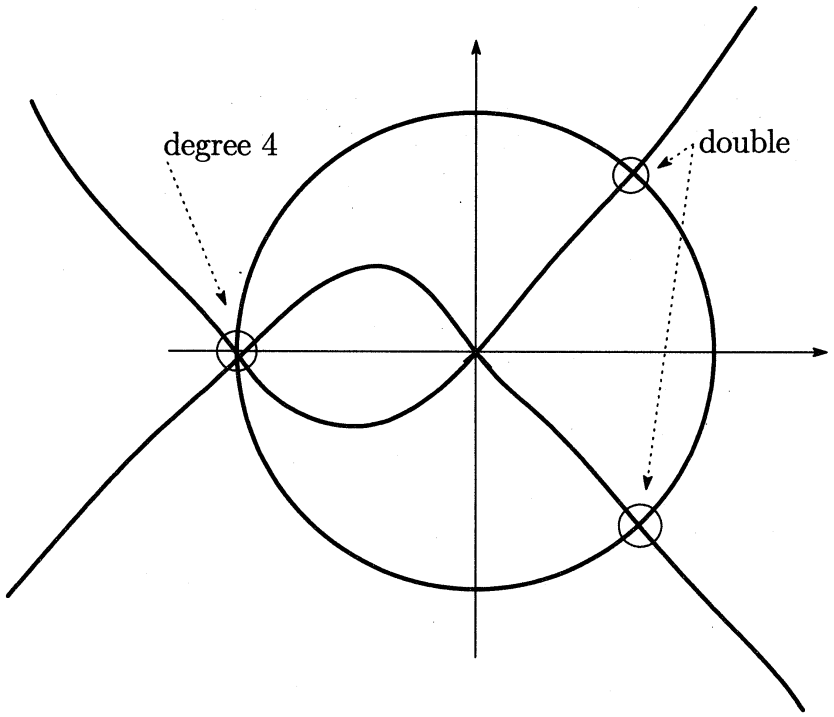
$$\xi^2 - \xi + 4\lambda^2 \cos^2 k\theta.$$

これはturning pointsではellipticではないが、$\xi$に関しては elliptic symbolである。すなわち退化楕円型である。退化は原点からでたStokes 曲線と単位円の交点でおこる。ここでは単位円もStokes曲線であるが、それは関係しない。

**例6**

$$a(x) = \frac{1}{x^2}\left(x^2 + x + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)^2.$$

例5のStokes geometryは次の図のようである。




$e^{\pm\pi/3}$にdouble turning pointsがあり、$-1$にはdegree 4のturning pointがある。原点ではそのStokes curveは直交する曲線である。

例3と同様にして、トーラス上にblow upすると次の作用素がえられる。

$$D_\theta^2 - D_\theta + 4\lambda^2(\cos 2\theta + \cos\theta)^2.$$

これは退化楕円型であり、退化する点は$\cos 2\theta + \cos\theta = 0$. 従って、

$$2\cos^2\theta + \cos\theta - 1 = 0, i.e., (2\cos\theta - 1)(\cos\theta + 1) = 0.$$

$\theta = \pi, \pm\pi/3$. これらの点はdouble, order 4のturning pointsであって、もとの方程式の原点からでたStokes curveと単位円との交点である。それ以外のStokes曲線は関係しない。

**解の構成**

例4,5,6において解の構成をR-H分解を用いて行う。

実際、$\xi$が十分におおきければシンボルは$\xi$に関してRiemann - Hilbert分解可能である。従って、$\lambda$に関して一様ではないが、$\mathbf{T}$上で$\pi(D_\theta^m + \lambda^2)^{-1}\sigma(z, z^{-1}D_\theta, \lambda)$は可逆である。なぜならば主シンボルは$\xi$が十分大きい時には消えないからである。

**多変数の場合**

上の例より、turning pointsをもつ場合でかつそのturning pointsにおいてblow upされた作用素が共役変数$\xi$とparameter $\lambda$に関して退化楕円型になる場合を考える。すなわちつぎを考える。

(1) $$(p(x, \partial_x) + \lambda^2 q(x))u = f(x).$$

$x \mapsto e^{i\theta} = (e^{i\theta_1}, \ldots, e^{i\theta_n})$とblow upして$\mathbf{T}^n$ 上の作用素を得る。

$$(p(e^{i\theta}, e^{-i\theta}D_\theta) + \lambda^2 q(e^{i\theta}))u = f(e^{i\theta}).$$

ここで$q(e^{i\theta}) \geq 0$であって、実際零点を$\mathbf{T}^n$上にもつとする。従って、変わり目点をもつ。

各$\lambda$に関して$p(e^{i\theta}, e^{-i\theta}D_\theta) + \lambda^2 q(e^{i\theta})$はR-H分解ができるとする。たとえば、2変数では分解の条件を仮定する。この条件は$n+1$変数のシンボルがR-H分解できるという条件より弱い。この条件下で(Fredholmの意味で)可解性を示せる。しかし、その漸近挙動はわからない。

## References


[1] Bengel, G. and Gérard, R. Formal and convergent solutions of singular partial differential equations, Manuscripta Math. **38**, 343–373 (1982).

[2] Boutet de Monvel, L. and Guillemin V. The spectral theory of Toeplitz operators, Annals of Mathematics Studies, **99**, Princeton University Press 1981

[3] Böttcher, A. and Silbermann, B., Analysis of Toeplitz operators, Springer Verlag Berlin, 1990.

[4] Gérard, R. and Tahara, H. Singular Nonlinear Partial Differential Equations. Vieweg Verlag, Wiesbaden 1996.

[5] Kashiwara, M., Kawai, T. and Sjöstrand J. On a class of linear partial differential equations whose formal solutions always converge, Ark. für Math. **17**, 83–91 (1979).

[6] Komatsu,H. Linear ordinary differential equations with Gevrey coefficients, J. Differential Eqs. **45**, 272–306 (1982).

[7] Malgrange, B. Sur les points singuliers des équations différentielles linéaires Enseign. Math. **20**, 146–176 (1970).

[8] Miyake, M. and Yoshino, M. Toeplitz operators and an index theorem for differential operators on Gevrey spaces, Funkcialaj Ekvacioj **38**, 329-342 (1995).

[9] Miyake, M. and Yoshino, M. Riemann-Hilbert factorization and Fredholm property of differential operators of irregular singular type, Ark. für Math. **33**, 323–341 (1995).

[10] Ramis, J.P. Théorèmes d'indices Gevrey pour les équations différentielles ordinaires Mem. Amer. Math. Soc. **48**, (1984).

[11] Yoshino, M. Global solvability of Monge-Ampère type equations, to be published in Comm. Partial Differential Equations.