数理解析研究所講究録
1170 巻 2000 年 95-98

Painlevé 楕円差分方程式

京大理 (学術振興会特別研究員)　坂井 秀隆

1 Painlevé 楕円差分方程式

いきなり複雑な式を天下りで申し訳ないが、まず得られた差分系を提示してみよう。

$$\begin{pmatrix} \theta_1 & \theta_2 & \theta_3 & \\ \theta_4 & \theta_5 & \theta_6; & x:y:z \\ \theta_7 & \theta_8 & \theta_9 & \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \theta_1+\frac{2}{3}\lambda & \theta_2+\frac{2}{3}\lambda & \theta_3+\frac{2}{3}\lambda & \\ \theta_4-\frac{1}{3}\lambda & \theta_5-\frac{1}{3}\lambda & \theta_6-\frac{1}{3}\lambda; & \overline{x}:\overline{y}:\overline{z} \\ \theta_7-\frac{1}{3}\lambda & \theta_8-\frac{1}{3}\lambda & \theta_9-\frac{1}{3}\lambda & \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned}(\overline{x}:\overline{y}:\overline{z}) \;=\; & P_{\left(\theta_4-\frac{2}{3}\lambda_{456}+\frac{\lambda}{3},\theta_5-\frac{2}{3}\lambda_{456}+\frac{\lambda}{3},\theta_6-\frac{2}{3}\lambda_{456}+\frac{\lambda}{3}\right)} \circ P_{\left(\theta_7+\frac{2}{3}\lambda_{123}+\frac{\lambda_{456}}{3},\theta_8+\frac{2}{3}\lambda_{123}+\frac{\lambda_{456}}{3},\theta_9+\frac{2}{3}\lambda_{123}+\frac{\lambda_{456}}{3},\right)} \circ \\ & \circ P_{\left(\theta_4+\frac{\lambda_{123}}{3},\theta_5+\frac{\lambda_{123}}{3},\theta_6+\frac{\lambda_{123}}{3}\right)} \circ P_{(\theta_1,\theta_2,\theta_3)}(x:y:z), \\ & \lambda_{ijk}=\theta_i+\theta_j+\theta_k, \quad \lambda=\lambda_{123}+\lambda_{456}+\lambda_{789}=\sum_{i=1}^{9}\theta_i,\end{aligned}$$

ここで、

$$P_{(\alpha,\beta,\gamma)}(x:y:z)=\overline{l}_{\alpha,\beta,\gamma}(x:y:z)\begin{pmatrix} p_1(\alpha,\beta,\gamma)\wp(\frac{\alpha-2\beta-2\gamma}{3}) & p_1(\alpha,\beta,\gamma)\wp'(\frac{\alpha-2\beta-2\gamma}{3}) & p_1(\alpha,\beta,\gamma) \\ p_2(\alpha,\beta,\gamma)\wp(\frac{-2\alpha+\beta-2\gamma}{3}) & p_2(\alpha,\beta,\gamma)\wp'(\frac{-2\alpha+\beta-2\gamma}{3}) & p_2(\alpha,\beta,\gamma) \\ p_3(\alpha,\beta,\gamma)\wp(\frac{-2\alpha-2\beta+\gamma}{3}) & p_3(\alpha,\beta,\gamma)\wp'(\frac{-2\alpha-2\beta+\gamma}{3}) & p_3(\alpha,\beta,\gamma) \end{pmatrix},$$

$$\overline{l}_{\alpha,\beta,\gamma}(x:y:z)=\begin{pmatrix} l_{\gamma,\alpha}(x:y:z)\cdot l_{\alpha,\beta}(x:y:z):l_{\alpha,\beta}(x:y:z)\cdot l_{\beta,\gamma}(x:y:z): \\ :l_{\beta,\gamma}(x:y:z)\cdot l_{\gamma,\alpha}(x:y:z) \end{pmatrix},$$

$$l_{\alpha,\beta}(x:y:z)=\det\begin{pmatrix} x & y & z \\ \wp(\alpha) & \wp'(\alpha) & 1 \\ \wp(\beta) & \wp'(\beta) & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} p_1(\alpha,\beta,\gamma) \\ p_2(\alpha,\beta,\gamma) \\ p_3(\alpha,\beta,\gamma) \end{pmatrix} = M\left(\frac{\alpha-2\beta-2\gamma}{3},\frac{-2\alpha+\beta-2\gamma}{3},\frac{-2\alpha-2\beta+\gamma}{3}\right)\begin{pmatrix} \wp\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}\right)(\wp(\beta)-\wp(\gamma)) \\ \wp'\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}\right)(\wp(\gamma)-\wp(\alpha)) \\ \wp(\alpha)-\wp(\beta) \end{pmatrix},$$

$$M(\alpha,\beta,\gamma)=\begin{pmatrix} \wp'(\alpha)-\wp'(\beta) & \wp'(\beta)-\wp'(\gamma) & \wp'(\gamma)-\wp'(\alpha) \\ \wp(\beta)-\wp(\gamma) & \wp(\gamma)-\wp(\alpha) & \wp(\alpha)-\wp(\beta) \\ \wp'(\beta)\wp(\alpha)-\wp'(\gamma)\wp(\beta) & \wp'(\gamma)\wp(\beta)-\wp'(\alpha)\wp(\gamma) & \wp'(\alpha)\wp(\gamma)-\wp'(\beta)\wp(\alpha) \end{pmatrix}$$

とする。

少し説明を加える。この差分系は $(x:y:z)\in\mathbb{P}^2$ に関する時間発展を記述しており、θ_i は方程式に現れる係数である。係数が時間発展に関して動くので、非自励形である。

しかし θ_i ではなく、$\wp(\theta_i)$ たちを係数と思ったほうが良いかも知れない。係数が乗法的に時間発展する離散方程式を q-差分方程式とよぶが ($a_i\mapsto qa_i$ 等)、そのような意味では、この離散方程式は係数が楕円関数の加法公式にしたがって時間発展する

$$
\begin{aligned}
(a_i,a_i') \quad & = (\wp(\theta_i),\wp'(\theta_i)) \\
\mapsto \quad & (\overline{a_i},\overline{a_i'}) = (\wp(\theta_i-\lambda/3),\wp'(\theta_i-\lambda/3)) = \left((\frac{a_i'+p'}{a_i-p})^2-a_i-p,-(\frac{a_i'+p'}{a_i-p})\overline{a_i}-\frac{pa_i'+p'a_i}{a_i-p}\right) \text{等}, \\
& \text{ただし} \quad (p,p') = (\wp(\lambda/3),\wp'(\lambda/3)).
\end{aligned}
$$

我々は以下、このような離散方程式を楕円差分方程式とよび、上にあげた式をとくに Painlevé 楕円差分方程式とよぶ。

続く章で、この方程式をどのように構成したかについてと、Painlevé 微分方程式との関係について、それぞれ論じる。

2 有理曲面の対称性

Painlevé 関数というものがあったとして、それは楕円関数の拡張であるというようにとらえたいのである。ヒントはすでに [4] のなかに出ているのであって、そこでは Painlevé 方程式の初期値空間のまえに楕円関数のみたす二階の微分方程式の初期値空間について計算してある。この初期値空間は有理楕円曲面となっている。

そこで有理楕円曲面についてみてみよう。これは代数幾何において古典的に調べられている曲面で、Halphen 曲面とよばれている。射影平面の九点を適当にもってくると一般にはその九点を通る三次曲線は一意に決まってしまう。ところが九点目をうまくとってやると二つの三次曲線が九点を通るようにできる。このときには射影平面の任意の点とこの九つの点を通る三次曲線がとれ、それらの共通点となるこの九点を blowing-up で分離してやることにより、elliptic fibration の構造が入る。このようにしてできた射影平面の九点 blowing-up が (指数 1 の) Halphen 曲面であった。

我々はより一般の場合を考えたいのだから、九点を通る非特異の三次曲線がただ一つある場合にその九点を blow-up した曲面 X を考える。このような曲面の同型類は射影曲面の九点の類、つまり、

$$\mathrm{PGL}(3)\backslash\mathrm{M}(3,9)/(\mathbb{C}^*)^9$$

のようなもので parameterize される。

しかし blowing-down 構造を忘れて曲面の同型だけ考えると、この parameterization はどの例外曲線を blow-down するかという部分だけ ambiguity をもつ。曲面 X の Picard 群 $\mathrm{Pic}(X)$ は

$$\mathrm{Pic}(X)=\mathbb{Z}\mathcal{E}_0+\mathbb{Z}\mathcal{E}_1+\cdots+\mathbb{Z}\mathcal{E}_9,$$

ただし $\mathcal{E}_0,\mathcal{E}_i(1\le i\le 9)$ はそれぞれ、射影平面上の直線の持ち上げ、および blowing-up で現れる例外曲線の因

子類、というように書ける。よって parameterization の ambiguity は Picard 群の自己同型（基底の取り替え）に帰着する。

いま $\mathrm{Pic}(X)$ の自己同型で

1. 交叉形式をかえない
2. 標準類を動かさない
3. 有効類のなす $\mathrm{Pic}(X)$ の部分半群を不変にする

ものを Cremona isometry といい、それらのなす群を $\mathrm{Cr}(X)$ と書く。

この群を計算するに当たって generic な曲面 X に関しては三番目の条件は考えないでよいことがわかる。標準類に直交している Picard 群の部分を見ると、これが $E_8^{(1)}$ 型のルート・ラティスをなしていることがわかり、その自己同型群として $E_8^{(1)}$ 型の Weyl 群が現れる。

この Weyl 群の作用は曲面の blowing-down 構造のとりかえ、つまり blow-up と blow-down を通して曲面の族に作用している。実はこの作用をある平行移動に関して具体的に書き下したものが Painlevé 楕円差分方程式であった。

3 Painlevé 方程式と generalized Halphen 曲面

まず非特異有理曲面で、$|-\mathcal{K}_X|$ の元で標準型とよばれる因子をもつものを、generalized Halphen 曲面と定義する。

このような曲面は $|-\mathcal{K}_X|$ の次元が 0 か 1 かによって区別される。$\dim|-\mathcal{K}_X| = 1$ のときは、Halphen 曲面で、このときは Painlevé 方程式のかわりに楕円関数のみたす微分方程式が現れる。

$\dim|-\mathcal{K}_X| = 0$ のとき、$D = \sum m_i D_i \in |-\mathcal{K}_X|$ の型 R によって曲面は以下のように分類できる。

	R
elliptic type	$A_0^{(1)}(=I_0)$
multiplicative type	$A_0^{(1)*}(=I_1),\ A_1^{(1)}(=I_2),\ A_2^{(1)}(=I_3),\dots,\ A_6^{(1)}(=I_7),$ $A_7^{(1)},\ A_7^{(1)\prime}(=I_8), A_8^{(1)}(=I_9)$
additive type	$A_0^{(1)**}(=II),\ A_1^{(1)*}(=III),\ A_2^{(1)*}(=IV),$ $D_4^{(1)}(=I_0^*),\dots,D_8^{(1)}(=I_4^*),$ $E_6^{(1)}(=IV^*),\ E_7^{(1)}(=III^*),\ E_8^{(1)}(=II^*)$

ここで、elliptic type, multiplicative type, additive type という区別はそれぞれ rank $H_1(D_{red},\mathbb{Z}) = 2,1,0$ に対応している。(D_{red} は $D = \sum m_i D_i$ にたいし $D_{red} = \cup D_i$ とする。) R は $E_8^{(1)}$ 型のルート系の既約アフィン部分ルート系に対応している。括弧の中の記号は小平の特異ファイバーに対応した記号である。この表の中で、$D_l^{(1)}$, $E_l^{(1)}$ と表される記号に対応した曲面が Painlevé 微分方程式の初期値空間である。$A_0^{(1)}$ が前の章で構成した、楕円差分方程式の住む空間であった。

これらの曲面は射影平面への双有理射をもち、射影平面の九点 blow-up として実現できる。

Painlevé 微分方程式自身についてはアフィン Weyl 群対称性の平行移動部分が離散 Painlevé 方程式として知られる差分系になっていることがわかる。曲面の退化とともに連続極限がとれて、その極限として Painlevé 微分方程式が得られる。

Painlevé 楕円差分方程式をよく見てみよう。係数が複雑に見えるが、射影変換の部分をのぞくとよくしられた standard Cremona 変換とよばれる双有理変換

$$(x : y : z) \mapsto (yz : zx : xy)$$

の四回の合成になっていることがわかる。

純粋に代数的に構成できる、よく知られた Cremona 変換という対象が、Painlevé 微分方程式の起源であった。

4 興味のある問題

たとえば Painlevé 楕円差分方程式は Riccati 型の特殊解をもつことが、幾何学的特徴づけからわかる。このとき線形楕円差分方程式が現れるはずだが、この解は極限として q-超幾何関数、さらには Gauss の超幾何関数をもつことが予想される。このように定義される関数はどのようなものだろうかなどということを考えている。

参考文献

[1] I. Dolgachev, D. Ortland, Point sets in projective spaces and theta functions, *Astérisque* **165**, *Soc. Math. de France* (1988).

[2] B. Grammaticos, Y. Ohta, A. Ramani and H. Sakai, Degeneration through coalescence of the q-Painlevé VI equations, *J. Phys. A : Math. Gen.* **31** (1998),3545–3558.

[3] E. Looijenga, Rational surfaces with an anti-canonical cycle, *Annals of Math.* **114** (1981), 267–322.

[4] K. Okamoto, Sur les feuilletages associés aux équation du second ordre à points crtiques fixes de P. Painlevé, *Japan. J. Math.* **5** (1979), 1–79.

[5] A. Ramani and B. Grammaticos, The grand scheme for the discrete Painlevé equations, *Lecture at the Toda symposium* (1996).

[6] H. Sakai, Rational surfaces associated with affine root systems and geometry of the Painlevé equations, *preprint* (1999).