

## Painlevé 方程式の有理解に対する Schur 関数型表示

同志社大学工学部 増田 哲 (Tetsu Masuda)  
同志社大学工学部 梶原 健司 (Kenji Kajiwara)

### 1 Painlevé 方程式とその古典解

Painlevé 方程式は、初期値に位置が依存する特異点が高々極しかないという、いわゆる Painlevé 性で特徴づけられる 6 種の 2 階非線形常微分方程式である。Painlevé 方程式については非常に多くの研究がなされているが、ここでは以下の事実注目する。

- (1) Painlevé 方程式の解は一般に還元不能である [1, 2].
- (2) Painlevé 方程式は、パラメータが特殊な値を取る場合に、超越古典解 (特殊関数解) や代数解のような古典解を許容する。

還元不能な解の中に、古典解はどのような形で埋め込まれているのであろうか。そのような疑問に対しては、次の事実

- Painlevé 方程式は Bäcklund 変換を許容し、Bäcklund 変換は Affine Weyl 群をなす。

が重要な役割を果たす。Okamoto は Painlevé 方程式の Bäcklund 変換が本質的に Toda 方程式で記述されることを見出し、それを用いて解の構造を議論した [3, 4, 5, 6]. その結果、特に超越古典解について浮かび上がってきた構造は「ソリトンの」なものであった。

例として、Painlevé II 方程式 (P<sub>II</sub>)

$$\frac{d^2y}{dt^2} = 2y^3 - 4ty + 4 \left( \alpha + \frac{1}{2} \right), \tag{1.1}$$

(スケールおよびパラメータの取り方を少し変えてある) を取り上げよう。(1.1) は  $\alpha = N \in \mathbb{Z}$  の場合に超越古典解を持ち、それは

$$y = \frac{d}{dt} \log \frac{\rho_{N+1}}{\rho_N}, \quad \rho_N = \det \left( \frac{d^{i+j-2}}{dt^{i+j-2}} f \right)_{1 \leq i, j \leq N}, \tag{1.2}$$

$$\frac{d^2}{dt^2} f = 2tf, \tag{1.3}$$

で与えられる。(1.3) は Airy 方程式である。従って、(1.1) の超越古典解は、Airy 関数を行列式の中に配置し、サイズを一つ変えた行列式との比を取って log 微分したものであり、これはソリトン方程式のソリトン解と全く同じ構造である。また、P<sub>III</sub>, P<sub>IV</sub>, P<sub>V</sub> の超越古典解も全く同様の構造を持つ。この構造は

- いくつかの Painlevé 方程式はソリトン方程式のリダクションによって得られる。

と全く符合する。

一方、代数解、特に有理解に関しては次の事実が知られていた。

- パラメータ空間における, Affine Weyl 群の作用の基本領域の重心には有理解が存在する.  
(他にも有理解はあるが)
- その有理解はある多項式の比の  $\log$  微分で表わされる.

このような, 有理解を特徴づける多項式 (以下, 特殊多項式と呼ぶ) は Yablonskii, Vorob'ev, Okamoto, Umemura, Noumi, Okada らによって研究され, 特に Umemura, Okamoto, Noumi, Okada はそれらの多項式に一種の組み合わせ論的構造があることを見出した [7, 8]. では, それらの多項式の「正体」は何だろうか. 超越古典解の構造から類推すると, 有理解もソリトン方程式の有理解と何らかの関係があるはずだと考えられる. 現在, いくつかの Painlevé 方程式に対する上記特殊多項式が, KP hierarchy の有理解を特徴づける Schur 関数の特殊化として捉えられることが明らかになりつつある.

本稿では, Painlevé 方程式に付随した特殊多項式の Schur 関数型の表示を議論する. 併せて, Painlevé VI 方程式の超越古典解に関する最近の結果を述べる.

## 2 Painlevé 方程式の有理解

### 2.1 Schur 関数

$Y$  を分割  $(i_N, i_{N-1}, \dots, i_2, i_1)$ ,  $i_N > i_{N-1} > \dots > i_1 > 0$  に対応する Young 図形とするとき, Schur 関数は次式で定義される  $t = (t_1, t_2, t_3, \dots)$  に関する多項式である.

$$S_Y = \begin{vmatrix} p_{i_N} & p_{i_N+1} & \cdots & p_{i_N+N-2} & p_{i_N+N-1} \\ p_{i_{N-1}-1} & p_{i_{N-1}} & \cdots & p_{i_{N-1}+N-3} & p_{i_{N-1}+N-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ p_{i_2-N+2} & p_{i_2-N+3} & \cdots & p_{i_2} & p_{i_2+1} \\ p_{i_1-N+1} & p_{i_1-N+2} & \cdots & p_{i_1-1} & p_{i_1} \end{vmatrix}, \quad (2.1)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n(t) \lambda^n = \exp \sum_{k=1}^{\infty} t_k \lambda^k, \quad p_n(t) = 0 \text{ for } n < 0. \quad (2.2)$$

Schur 関数には次の性質がある.

- 定義から直ちにわかるように,  $t_k$  の重みを  $k$  と定義すれば,  $p_n(t)$  は  $n$  次の同次多項式であり, さらに  $S_Y(t)$  は  $i_1 + \dots + i_N$  次の同次多項式である.
- $p_n$  は漸化式

$$\frac{\partial p_n}{\partial t_k} = p_{n-k}, \quad (2.3)$$

を満足する.

- Schur 関数は KP hierarchy と呼ばれる無限個の双線形方程式の系列を満足する [9].

KP hierarchy の理論では, 解に制限を加えることによって  $t_k, t_{2k}, t_{3k}, \dots$  依存性を落とす操作を  $k$ -reduction と呼ぶ. Schur 関数に対しては, Young 図形として特別なものを考えることに

よって  $k$ -reduction を実現することができる。例えば、 $Y$  を分割  $(N, N-1, \dots, 2, 1)$  に対応した Young 図形に制限したもの

$$S_Y = \begin{vmatrix} p_N & p_{N+1} & \cdots & p_{2N-2} & p_{2N-1} \\ p_{N-2} & p_{N-1} & \cdots & p_{2N-4} & p_{2N-3} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ p_{-N+4} & p_{-N+5} & \cdots & p_2 & p_3 \\ p_{-N+2} & p_{-N+3} & \cdots & p_0 & p_1 \end{vmatrix}, \quad (2.4)$$

は、(2.3) から容易にわかるように  $t_{2n}$ ,  $n = 1, 2, \dots$  に依存しない。(2.4) を 2-reduced Schur 関数と呼ぶ。

## 2.2 Painlevé II 方程式

Painlevé II 方程式

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = 2y^3 - 4ty + 4 \left( \alpha + \frac{1}{2} \right), \quad (2.5)$$

は次の有理解を持つ [10].

$\tau$  関数

$$\sigma_N = \begin{vmatrix} q_N & q_{N+1} & \cdots & q_{2N-1} \\ q_{N-2} & q_{N-1} & \cdots & q_{2N-3} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{-N+2} & q_{-N+3} & \cdots & q_1 \end{vmatrix}, \quad (2.6)$$

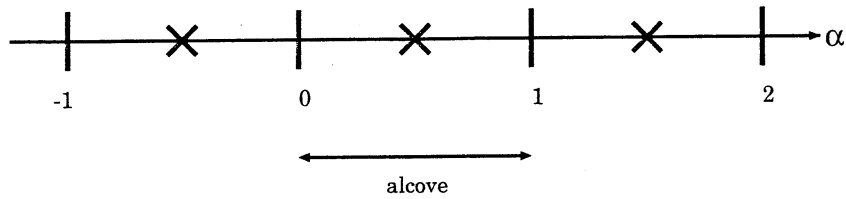
$$\sum_{n=0}^{\infty} q_n(t) \xi^k = \exp \left( t\xi + \frac{\xi^3}{3} \right), \quad q_n = 0 \quad \text{for } n < 0. \quad (2.7)$$

従属変数変換およびパラメータ

$$y = \frac{d}{dt} \log \frac{\sigma_{N+1}}{\sigma_N}, \quad \alpha = N + \frac{1}{2}. \quad (2.8)$$

コメント

- (1)  $\sigma_N$  は Yablonskii-Vorob'ev 多項式と呼ばれるが、これは Schur 関数の 2-reduction の特殊化であり、上の証明も KP hierarchy の理論を経由して行われる [10].
- (2) パラメータ空間での有理解の位置は下の図の通りであり、これが全ての有理解を尽くしていることが知られている [11].



× Rational solutions

Parameter space for  $P_{II}$

### 2.3 Painlevé IV 方程式

Painlevé IV 方程式

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{1}{2y} \left( \frac{dy}{dt} \right)^2 + \frac{3}{2} y^3 + 4ty^2 + 2(t^2 - \alpha)y + \frac{\beta}{y}, \quad (2.9)$$

$$\alpha = -\kappa_0 + 2\theta_\infty + 1, \quad \beta = -2\kappa_0^2, \quad (2.10)$$

は次の有理解を持つ [12, 13].

$\tau$  関数

$$\tau_M^N = \begin{pmatrix} \cdots & \cdots & p_{3N-3} & p_{3N-2} & p_{3N-1} \\ \cdots & \cdots & p_{3N-6} & p_{3N-5} & p_{3N-4} \\ & & \ddots & \vdots & \vdots \\ \cdots & \cdots & p_3 & p_4 & p_5 \\ \cdots & \cdots & p_0 & p_1 & p_2 \\ \cdots & \cdots & p_{3M-4} & p_{3M-3} & p_{3M-2} \\ \cdots & \cdots & p_{3M-7} & p_{3M-6} & p_{3M-5} \\ & & \ddots & \vdots & \vdots \\ \cdots & \cdots & p_2 & p_3 & p_4 \\ \cdots & \cdots & p_{-1} & p_0 & p_1 \end{pmatrix}, \quad (2.11)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n(x) \lambda^n = \exp \left( x\lambda + \frac{\lambda^2}{2} \right), \quad p_n = 0 \quad \text{for } n < 0. \quad (2.12)$$

従属変数変換およびパラメータ

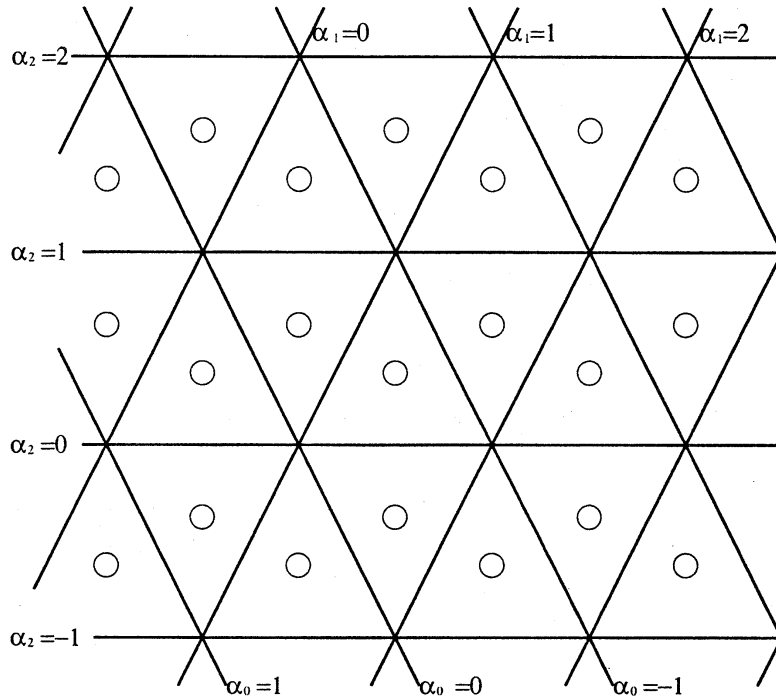
$$y = \sqrt{\frac{2}{3}} \left( \frac{d}{dx} \log \frac{\tau_{M+1}^N}{\tau_M^N} - x \right), \quad t = \sqrt{\frac{3}{2}} x, \quad \kappa_0 = -N - \frac{2}{3}, \quad \theta_\infty = M - N - \frac{1}{3}, \quad (2.13)$$

また

$$y = \sqrt{\frac{2}{3}} \left( \frac{d}{dx} \log \frac{\tau_M^{N+1}}{\tau_M^N} - x \right), \quad t = \sqrt{\frac{3}{2}} x, \quad \kappa_0 = M + \frac{1}{3}, \quad \theta_\infty = N + \frac{2}{3}. \quad (2.14)$$

コメント

- (1)  $\tau_M^N$  は 3-reduced Schur 関数の特殊化であり, 証明も KP hierarchy の理論を経由してできる. さらに,  $\tau_0^N, \tau_N^0$  は特に Okamoto 多項式と呼ばれる.
- (2) 上記有理解のパラメータ空間における位置は下の図の通りであり, 基本領域の重心にあることがわかる. また, 他の有理解は超越古典解の特別の場合であることがわかっており, 各領域の頂点に存在する [11, 12, 13].



○ Rational solutions

Parameter space for  $P_{IV}$

$$\kappa_0 = \alpha_1, \quad \theta_\infty = -\alpha_2, \quad \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 = 1.$$

### 2.4 Painlevé III 方程式

Painlevé III 方程式

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{1}{y} \left( \frac{dy}{dt} \right)^2 - \frac{1}{t} \frac{dy}{dt} + \frac{\alpha y^2 + \beta}{t} + y^3 - \frac{1}{y}, \tag{2.15}$$

$$\alpha = -2\theta_\infty, \quad \beta = -2(\theta_0 + 1), \tag{2.16}$$

に対する特殊多項式 [7] はようやく最近になって構造が判明した [14]. Bäcklund 変換の対称性は  $B_2^{(1)}$  型とも  $C_2^{(1)}$  型, あるいは  $A_1^{(1)} \times A_1^{(1)}$  型とされており, 特殊多項式に期待される行列式構造はよくわからなかったが, 得られた結果は意外なものであった.

τ 関数

$$\tau_N(t; v) = \begin{vmatrix} p_N & p_{N+1} & \cdots & p_{2N-1} \\ p_{N-2} & p_{N-1} & \cdots & p_{2N-3} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{-N+2} & p_{-N+3} & \cdots & p_1 \end{vmatrix}, \tag{2.17}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n(t; v) \lambda^n = (1 + \lambda)^{v+1/2} \exp(t\lambda), \quad p_n = 0 \text{ for } n < 0. \tag{2.18}$$

従属変数変換およびパラメータ

$$y(t) = \frac{\tau_{N+1}(t; v) \tau_N(t; v-1)}{\tau_{N+1}(t; v-1) \tau_N(t; v)}, \tag{2.19}$$

$$\theta_{\infty} = -v + N + 1, \quad \theta_0 = v + N. \tag{2.20}$$

コメント

(1) (2.17), (2.18) は 2-reduced Schur 関数の特殊化である。実際,  $p_n$  の母関数は

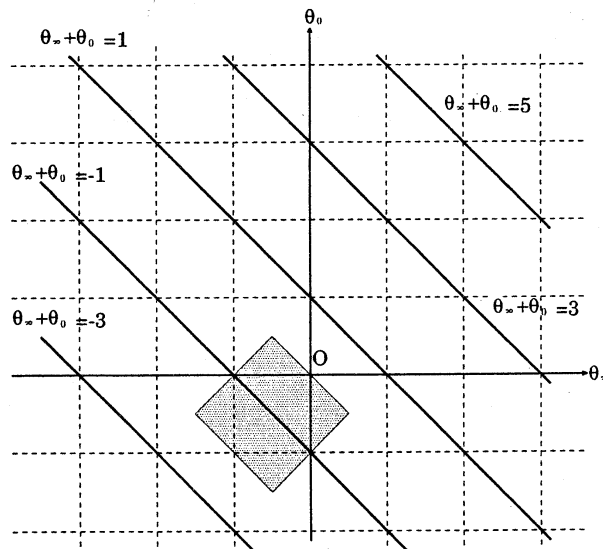
$$(1 + \lambda)^{v+1/2} \exp(t\lambda) = \exp\left(\sum_{k=1}^{\infty} t_k \lambda^k\right), \tag{2.21}$$

$$t_1 = t + v + \frac{1}{2}, \quad t_k = (-1)^{k+1} \frac{v + 1/2}{k} \text{ for } k \geq 2, \tag{2.22}$$

となっている。

(2) 多項式  $p_n(t; v)$  は Laguerre 多項式  $L_n^{(\alpha-n)}(-t)$ ,  $\alpha = v + \frac{1}{2}$  である。

(3) 上記有理解のパラメータ空間における位置は下の図で与えられる。上の結果は  $P_{III}$  の全ての特殊多項式を尽くしていると考えられる。



— Rational solutions

▨ alcove

Parameter space for  $P_{III}$

## 2.5 Painlevé V 方程式

Painlevé V 方程式

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = \left( \frac{1}{2y} + \frac{1}{y-1} \right) \left( \frac{dy}{dt} \right)^2 - \frac{1}{t} \frac{dy}{dt} + \frac{(y-1)^2}{t^2} \left( \alpha y + \frac{\beta}{y} \right) + \frac{\gamma}{t} y - \frac{y(y+1)}{2(y-1)}, \quad (2.23)$$

$$\alpha = \frac{1}{2}\kappa_\infty^2, \quad \beta = -\frac{1}{2}\kappa_0^2, \quad \gamma = -(\theta + 1), \quad (2.24)$$

の有理解に関しては, Noumi-Yamada による次の結果が知られている [15].

$\tau$  関数

$$\tau_N(t; v) = \begin{vmatrix} p_N & p_{N+1} & \cdots & p_{2N-1} \\ p_{N-2} & p_{N-1} & \cdots & p_{2N-3} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{-N+2} & p_{-N+3} & \cdots & p_1 \end{vmatrix}, \quad (2.25)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n(t; v) \lambda^n = (1-\lambda)^{4v-N-2} \exp\left(\frac{t\lambda}{1-\lambda}\right), \quad p_n = 0 \text{ for } n < 0. \quad (2.26)$$

従属変数変換およびパラメータ

$$y(t) = -\frac{\tau_{N+1}(t; v + 3/4)\tau_N(t; v)}{\tau_{N+1}(t; v + 1/4)\tau_N(t; v + 1/2)}, \quad (2.27)$$

$$\kappa_\infty = -2v + N + 1, \quad \kappa_0 = 2v, \quad \theta = N. \quad (2.28)$$

コメント

(1)  $p_n(t; v)$  は Laguerre 多項式  $L_n^{(\alpha)}(-\frac{t}{2})$ ,  $\alpha = -4v + N + 1$  である. さらに,

$$(1-\lambda)^{4v-N-2} \exp\left(\frac{t\lambda}{1-\lambda}\right) = \exp\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{t}{2} + \frac{-4v + N + 2}{k}\right) \lambda^k, \quad (2.29)$$

であるから, (2.25) は 2-reduced Schur 関数に対して

$$t_k = \frac{t}{2} + \frac{-4v + N + 2}{k}, \quad (2.30)$$

という特殊化を施したものであると見なすことができる.

(2) (2.25), (2.26) は  $P_V$  の全ての特殊多項式を尽くしていない. 実際, 特殊多項式はパラメータ空間の平面

$$\kappa_\infty + \kappa_0 - \theta = 1, \quad (2.31)$$

と, 平面 (の族)

$$\kappa_\infty + \kappa_0 + \theta = 2N + 1, \quad (2.32)$$

との交線上に存在する. または, Noumi-Yamada による対称形式の言葉でいえば, 平面

$$\alpha_2 = \frac{1}{2}, \quad (2.33)$$

と, 平面 (の族)

$$\alpha_0 = -N - \frac{1}{2}, \quad (2.34)$$

との交線上に存在する. ここで,

$$\kappa_\infty = \alpha_1, \quad \kappa_0 = \alpha_3, \quad \theta = \alpha_2 - \alpha_0 - 1, \quad \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1, \quad (2.35)$$

である. 同様の特殊多項式はパラメータ空間の

$$\frac{1}{2}(\kappa_\infty + \kappa_0 + \theta) = \text{half-integer}, \quad \kappa_\infty + \kappa_0 = \text{integer}, \quad (2.36)$$

というところにも存在すると考えられる. Bäcklund 変換は  $A_3^{(1)}$  型の対称性を持つことから, 全ての特殊多項式を包括するような表示が得られた際には 4-reduced Schur 関数の構造が現れることが期待される.

### 3 $P_{VI}$ の有理解

最後に Painlevé VI 方程式

$$\begin{aligned} \frac{d^2 y}{dt^2} = & \frac{1}{2} \left( \frac{1}{y} + \frac{1}{y-1} + \frac{1}{y-t} \right) \left( \frac{dy}{dt} \right)^2 - \left( \frac{1}{t} + \frac{1}{t-1} + \frac{1}{y-t} \right) \frac{dy}{dt} \\ & + \frac{y(y-1)(y-t)}{2t^2(t-1)^2} \left[ \kappa_\infty^2 - \kappa_0^2 \frac{t}{y^2} + \kappa_1^2 \frac{t-1}{(y-1)^2} + (1-\theta^2) \frac{t(t-1)}{(y-t)^2} \right], \end{aligned} \quad (3.1)$$

について述べよう.  $P_{VI}$  (3.1) については, 超幾何関数  $F(a, b, c; t)$  で表される解が存在することが知られている. 超幾何関数は, パラメータを適当に制限すれば Jacobi 多項式  $F(-n, p+n, q; t) = G_n(p, q; t)$  となるから, これにより  $P_{VI}$  の有理解を得ることができる.

#### 注意

こうして得られる有理解は, 前節までで議論してきた基本領域の重心にある有理解とは異なるものである. ■

以下では, 超幾何関数を要素とする Casorati 行列式解を構成できたので, その結果について述べることにする.

#### 定理

8つの  $\tau$ -関数を次のように定義する.

$$\tau_{2N}^0 = \begin{vmatrix} [0]_0 & [1]_0 & \cdots & [N-1]_0 & [1]_1 & \cdots & [N-1]_1 & [N]_1 \end{vmatrix}, \quad (3.2)$$

$$\tau_{2N}^1 = \begin{vmatrix} [0]_2 & [1]_2 & \cdots & [N-1]_2 & [1]_3 & \cdots & [N-1]_3 & [N]_3 \end{vmatrix}, \quad (3.3)$$

$$\tau_{2N}^2 = \begin{vmatrix} [0]_1 & [1]_1 & \cdots & [N-1]_1 & [0]_0 & [1]_0 & \cdots & [N-1]_0 \end{vmatrix}, \quad (3.4)$$

$$\tau_{2N}^3 = \begin{vmatrix} [0]_3 & [1]_3 & \cdots & [N-1]_3 & [0]_2 & [1]_2 & \cdots & [N-1]_2 \end{vmatrix}, \quad (3.5)$$

$$\tau_{2N-1}^0 = \begin{vmatrix} [0]_0 & [1]_0 & \cdots & [N-1]_0 & [1]_1 & \cdots & [N-1]_1 \end{vmatrix}, \quad (3.6)$$



$$\tau_{2N-1}^1 = \left| \begin{array}{cccccc} [0]_2 & [1]_2 & \cdots & [N-1]_2 & [1]_3 & \cdots & [N-1]_3 \end{array} \right|, \quad (3.7)$$

$$\tau_{2N-1}^2 = \left| \begin{array}{cccccc} [0]_1 & [1]_1 & \cdots & [N-1]_1 & [0]_0 & [1]_0 & \cdots & [N-2]_0 \end{array} \right|, \quad (3.8)$$

$$\tau_{2N-1}^3 = \left| \begin{array}{cccccc} [0]_3 & [1]_3 & \cdots & [N-1]_3 & [0]_2 & [1]_2 & \cdots & [N-2]_2 \end{array} \right|, \quad (3.9)$$

ここで,  $[j]_i$  は列ベクトル

$$[j]_i = \begin{pmatrix} f_i^{(j)} \\ \delta f_i^{(j)} \\ \delta^2 f_i^{(j)} \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad (3.10)$$

を表す. ただし  $\delta = t \frac{d}{dt}$  であり,

$$f_i^{(j)} = (1-t)^j f_i(t), \quad (3.11)$$

および

$$\begin{aligned} f_0(t) &= F(a, b, c; t), & f_1(t) &= F(a, b+1, c; t), \\ f_2(t) &= \frac{c-a}{c} F(a, b+1, c+1; t), & f_3(t) &= \frac{a}{c} F(a+1, b+1, c+1; t), \end{aligned} \quad (3.12)$$

である. このとき,

$$y = \frac{\tau_{2N}^2 \tau_{2N-1}^1}{\tau_{2N}^3 \tau_{2N-1}^0}, \quad (3.13)$$

は,  $P_{VI}$  (3.1) の解を与える. ただし,

$$\kappa_\infty = b + N, \quad \kappa_0 = a - c + N, \quad \kappa_1 = -b + c + N - 1, \quad \theta = -a + N, \quad (3.14)$$

である. また,

$$y = \frac{\tau_{2N+1}^2 \tau_{2N}^1}{\tau_{2N+1}^3 \tau_{2N}^0}, \quad (3.15)$$

は,  $P_{VI}$  (3.1) の解を与える. ただし,

$$\kappa_\infty = a + N, \quad \kappa_0 = b - c + N + 1, \quad \kappa_1 = c - a + N, \quad \theta = -b + N, \quad (3.16)$$

である. ■

この結果は,  $q$ - $P_{VI}$  の超幾何関数解 [16] の連続極限として得られる. また上述したように, パラメータを適当に制限すれば有理解を得る.

## 4 退化極限

最後に, 特殊多項式に関連する有理解の退化について触れておく. はじめに述べたように, Painlevé 方程式は  $P_{VI}$  から出発して適当な極限操作により,  $P_V, P_{IV}, \dots$  と順次退化していく. 具体的には, 以下のように変数およびパラメータを置き換え,  $\varepsilon \rightarrow 0$  の極限をとればよい [17].

(1)  $P_{VI} \rightarrow P_V$ :

$$t \rightarrow 1 - \varepsilon t, \quad \kappa_1 \rightarrow \varepsilon^{-1} + \theta + 1, \quad \theta \rightarrow -\varepsilon^{-1}. \quad (4.1)$$

(2)  $P_V \rightarrow P_{IV}$ :

$$t \rightarrow \varepsilon^{-2}(1 + \varepsilon\sqrt{2}t), \quad y \rightarrow \varepsilon \frac{y}{\sqrt{2}}, \quad \kappa_\infty \rightarrow -\varepsilon^{-2}, \quad \theta \rightarrow \varepsilon^{-2} + 2\theta_\infty - \kappa_0. \quad (4.2)$$

(3)  $P_V \rightarrow P_{III}$ : これは, 2つのステップにわかれる. まず,

$$t \rightarrow \frac{1}{2}\varepsilon t, \quad y \rightarrow 1 + \varepsilon y, \quad \kappa_\infty \rightarrow -\frac{1}{2}\varepsilon^{-1} + \theta_\infty, \quad \kappa_0 \rightarrow \frac{1}{2}\varepsilon^{-1}, \quad \theta \rightarrow \theta_0, \quad (4.3)$$

と置き換え,  $\varepsilon \rightarrow 0$  の極限をとり, 更に

$$y \rightarrow ty, \quad t \rightarrow t^2, \quad (4.4)$$

と置き換える.

(4)  $P_{IV} \rightarrow P_{II}$ :

$$t \rightarrow -\varepsilon^{-3}(1 + \varepsilon^4 t), \quad y \rightarrow \varepsilon^{-3}(1 - \varepsilon^2 y), \quad \kappa_0 \rightarrow \frac{1}{2}\varepsilon^{-6}, \quad \theta_\infty \rightarrow \alpha. \quad (4.5)$$

(5)  $P_{III} \rightarrow P_{II}$ :

$$t \rightarrow \varepsilon^{-3}(1 - \varepsilon^2 t), \quad y \rightarrow 1 - \varepsilon y, \quad \theta_0 \rightarrow -\varepsilon^{-3} + 2\alpha, \quad \theta_\infty \rightarrow \varepsilon^{-3}. \quad (4.6)$$

なお, 以下で定義される量  $E$  は, 退化極限の操作を通じて不変であることに注意せよ.

$$P_{VI}: \quad E = \frac{1}{2}(\kappa_\infty + \kappa_0 + \kappa_1 + \theta - 1), \quad (4.7)$$

$$P_V: \quad E = \frac{1}{2}(\kappa_\infty + \kappa_0 + \theta), \quad (4.8)$$

$$P_{IV}: \quad E = \theta_\infty, \quad (4.9)$$

$$P_{III}: \quad E = \frac{1}{2}(\theta_\infty + \theta_0), \quad (4.10)$$

$$P_{II}: \quad E = \alpha. \quad (4.11)$$

さて, このような退化図式は, 有理解のレベルでも成り立つのだろうか? 解に含まれているパラメータの個数に注目すれば,  $P_{IV}$  から  $P_{II}$ ,  $P_V$  から  $P_{III}$  への退化が不可能であることがわかる. また,  $E$  の値を比較することにより,  $P_V$  から  $P_{IV}$  へも退化しないことがわかる.

そこで,  $P_{III}$  から  $P_{II}$  への退化を考えよう. まず,  $\tau$ -関数 (2.17) を次のように書き換える.

$$\tau_N(t; v) = \begin{vmatrix} \bar{p}_N & \bar{p}_{N+1} & \cdots & \bar{p}_{2N-1} \\ \bar{p}_{N-2} & \bar{p}_{N-1} & \cdots & \bar{p}_{2N-3} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{p}_{-N+2} & \bar{p}_{-N+3} & \cdots & \bar{p}_1 \end{vmatrix}, \quad (4.12)$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \bar{p}_k(t; v) \lambda^k = (1 + \lambda)^{v+1/2} \exp\left(t\lambda + \frac{v}{2}\lambda^2\right), \quad \bar{p}_k = 0 \text{ for } k < 0. \quad (4.13)$$

式 (4.6) に従い, 変数およびパラメータを

$$t \rightarrow \varepsilon^{-3}(1 - \varepsilon^2 t), \quad v = -\varepsilon^{-3} + N + 1, \quad (4.14)$$

と置き換え, 更に  $\lambda = -\varepsilon\xi$ ,  $\bar{q}_k = (-\varepsilon)^k \bar{p}_k$  ( $k > 0$ ) とすれば, (4.13) は

$$\sum_{k=0}^{\infty} \bar{q}_k(t; v) \xi^k = \exp \left[ \left( t\xi + \frac{\xi^3}{3} \right) + \varepsilon \left( -\frac{\xi}{2} + \frac{\xi^4}{4} \right) + O(\varepsilon^2) \right], \quad (4.15)$$

と書き換えられる. よって, (2.7) から,

$$\bar{q}_k(t; v) = q_k(t) + \varepsilon \left[ -\frac{1}{2} q_{k-1}(t) + \frac{1}{4} q_{k-4}(t) \right] + O(\varepsilon^2), \quad \text{for } k > 0, \quad (4.16)$$

が得られる. こうして,  $\varepsilon \rightarrow 0$  の極限において,  $\tau$ -関数 (2.17) は (2.6) へ退化することがわかる. では, 従属変数変換はどうだろうか. 上と同様の議論から,

$$\bar{q}_k(t; v-1) = q_k(t) + \varepsilon \left[ \frac{1}{2} q_{k-1}(t) + \frac{1}{4} q_{k-4}(t) \right] + O(\varepsilon^2), \quad (4.17)$$

である. 関係式

$$\frac{d}{dt} q_k = q_{k-1}, \quad (4.18)$$

を用いれば,

$$\begin{aligned} \tau_N(t; v) &\simeq \sigma_N - \frac{\varepsilon}{2} \frac{d}{dt} \sigma_N + \varepsilon \kappa_N + O(\varepsilon^2), \\ \tau_N(t; v-1) &\simeq \sigma_N + \frac{\varepsilon}{2} \frac{d}{dt} \sigma_N + \varepsilon \kappa_N + O(\varepsilon^2), \end{aligned} \quad (4.19)$$

であることがわかる. ここで, (4.16), (4.17) の第3項からの寄与をまとめて  $\kappa_N$  と表した. これらから,

$$\frac{\tau_{N+1}(t; v) \tau_N(t; v-1)}{\tau_{N+1}(t; v-1) \tau_N(t; v)} \simeq 1 - \varepsilon \frac{d}{dt} \log \frac{\sigma_{N+1}}{\sigma_N} + O(\varepsilon^2), \quad (4.20)$$

を得る. 従属変数の置き換えは,  $y \rightarrow 1 - \varepsilon y$  で与えられるから,  $\varepsilon \rightarrow 0$  の極限において,  $P_{\text{III}}$  の有理解は  $P_{\text{II}}$  の有理解へ退化することがわかる. 方程式の退化については明らかであるから, 結局,  $P_{\text{III}}$  から  $P_{\text{II}}$  への退化は有理解のレベルでも成り立っていることが示せた.

次に,  $P_{\text{V}}$  の有理解 (2.25)-(2.27) について考えてみる. 天下りだが, 変数およびパラメータを

$$t \rightarrow \varepsilon^{-3}(1 + 2\varepsilon^2 t), \quad y \rightarrow -1 + 2\varepsilon y, \quad 4v = \frac{1}{2}\varepsilon^{-3} + N + 1, \quad (4.21)$$

と置き換えて  $\varepsilon \rightarrow 0$  の極限をとってみる. すると意外なことに, 上と全く同様の議論によって,  $P_{\text{IV}}$ ,  $P_{\text{III}}$  を経由することなく, 直接  $P_{\text{II}}$  の有理解に帰着することが示せる.

## 5 まとめ

本稿では,  $P_{\text{II}}$ ,  $P_{\text{III}}$ ,  $P_{\text{IV}}$ ,  $P_{\text{V}}$  の有理解の Schur 関数型表示について述べた. 明らかに, これらの表示には方程式の対称性や, 補助線形問題の特異点などの構造が強く反映されている.

今後の課題として, まずは  $P_{\text{VI}}$  の特殊多項式の構造を明らかにすることが挙げられる. また,  $P_{\text{V}}$  の有理解について, 基本領域の重心に存在する解の全体を捉えたときに 4-reduction の構造が表れるかどうかは, 興味のある問題である. 更には,  $q$ -差分, 楕円差分 [18] も含めた多くの離散 Painlevé 方程式および超離散 Painlevé 方程式についても, 今後の研究が望まれる.

## 参考文献

- [1] H. Umemura and H. Watanabe, *Nagoya Math. J.* **148** (1997) 151.
- [2] H. Umemura, *Irreducibility of the Painlevé Equations—Evolution in the Past 100 Years*, preprint, to appear in *Proceeding of the workshop on the Painlevé Transcendents* (Montreal, 1996)
- [3] K. Okamoto, *Ann. Mat. Pura Appl.* **146** (1987) 337.
- [4] K. Okamoto, *Japan J. Math.* **13** (1987) 47.
- [5] K. Okamoto, *Math. Ann.* **275** (1986) 221.
- [6] K. Okamoto, *Funkcialaj Ekvacioj* **30** (1987) 305.
- [7] H. Umemura, *Special Polynomials Associated with the Painlevé Equations I*, preprint, to appear in *Proceeding of the workshop on the Painlevé Transcendents* (Montreal, 1996)
- [8] M. Noumi, S. Okada, K. Okamoto and H. Umemura, in *Proceedings of the Taniguchi Symposium 1997: "Integrable Systems and Algebraic Geometry"*, eds. M.-H. Saito, Y. Shimizu and K. Ueno, (World Scientific, 1998.) 349.
- [9] M. Jimbo and T. Miwa, *Publ. RIMS, Kyoto Univ.* **19** (1983) 943.
- [10] K. Kajiwara and Y. Ohta, *J. Math. Phys.* **37** (1996) 4693.
- [11] Y. Murata, *Funkcialaj Ekvacioj* **28** (1985) 1.
- [12] K. Kajiwara and Y. Ohta, *J. Phys. A: Math. Gen.* **31** (1998) 2431.
- [13] M. Noumi and Y. Yamada, *Nagoya Math. J.* **153** (1999) 53.
- [14] K. Kajiwara and T. Masuda, *Phys. Lett. A* **260** (1999) 462.
- [15] M. Noumi and Y. Yamada, *Phys. Lett. A* **247** (1998) 65.
- [16] H. Sakai, *Nonlinearity* **11** (1998) 823.
- [17] 岡本和夫：パンルヴェ方程式序説，上智大学数学講究録，**19** (1985).
- [18] H. Sakai, *Rational surfaces associated with affine root systems and geometry of Painlevé equations* (1999), preprint Kyoto-Math 99-10.