数理解析研究所講究録
1171 巻 2000 年 164-189

擬斉次孤立特異点の標準形に対する双対基底の計算

田島 慎一 (新潟大学工学部) (S. Tajima)
中村 弥生 (お茶の水女子大学大学院) (Y.Nakamura)

$X = \mathbf{C}^n$ に対し, $\mathcal{O}_X$ を X 上の正則関数の層とする. 与えられた擬斉次多項式 $f(z)$ に対して, $I = \langle f_1, \ldots, f_n\rangle$, $f_j := \partial f/\partial z_j$ とおく. 本稿では, グロタンディックの双対性によって与えられる局所環 $\mathcal{O}_X/I$ の双対基底を, 微分作用素を用いて具体的に計算する方法を与える. それを用いて, 擬斉次孤立特異点の標準形の代表的なものに対し, その双対基底を計算する.

key words: 擬斉次孤立特異点, 代数的局所コホモロジー類, グロタンディックの双対性

1 擬斉次多項式と代数的局所コホモロジー類

$f(z)$ を重み $w_1, \ldots, w_n$, 擬次数 d_w の擬斉次多項式とする. $f(z)$ が次の微分方程式を満たすことはよく知られている.

$$(\textstyle\sum_{j=1}^n w_j z_j \partial_j - d_w) f(z) = 0$$

ここで, $\partial_j := \partial/\partial z_j$ である. これに対し, 微分作用素 P を

$$P = \sum_{j=1}^n w_j z_j \partial_j + (nd_w - \sum_{j=1}^n w_j)$$

とおく. 微分作用素 ∂_j の重みを $-w_j$ とおくと, 微分作用素 P は擬次数 0 となる. この時, 原点に台を持つ代数的局所コホモロジー類 $[1/f_1 \cdots f_n] \in \mathcal{H}^n_{[0]}(\mathcal{O}_X)$, $f_j := \partial f/\partial z_j$ は, 次を満たす.

Lemma 1 $P[1/f_1 \cdots f_n] = 0$.

Lemma 1 により, 代数的局所コホモロジー類 $[1/f_1 \cdots f_n]$ は擬斉次となり, その擬次数は $-nd_w + \sum_{j=1}^n w_j$ となる.

$\mathcal{D}_X$ を微分作用素の層とする. $\mathcal{A}nn$ を $[1/f_1 \cdots f_n]$ の annihilator からなる $\mathcal{D}_X$ のイデアルとする. n 次コホモロジー類について, 次が成り立つ.

Proposition 1 ([9])

$$\{\eta \in \mathcal{H}^n_{[0]}(\mathcal{O}_X) \mid R\eta = 0, {}^\forall R \in \mathcal{A}nn\} = \left\{ c \left[\frac{1}{f_1 \cdots f_n}\right] \mid c \in \mathbf{C} \right\}.$$

$f_j, j = 1, \ldots, n$ が擬斉次なので, 次が成り立つ.

Proposition 2 $\mathcal{A}nn = \langle P, f_1, \ldots, f_n \rangle$.

擬斉次多項式の場合に関する $\mathcal{A}nn$ のグレブナ基底については, [3] を参照されたい. これらにより, 次を得る.

Theorem 1 $\sigma \in \mathcal{H}^n_{[0]}(\mathcal{O}_X)$ を次を満たすコホモロジー類とする.

- $P\sigma = 0$, $f_j\sigma = 0$, $j = 1, \ldots, n$,
- $\dfrac{\partial(f_1,\ldots,f_n)}{\partial(z_1,\ldots,z_n)}\sigma = \mu\left[\dfrac{1}{z_1\cdots z_n}\right]$, 但し, $\mu = \dim_{\mathbf{C}}(\mathcal{O}_X/I)$ はミルナー数.

このとき, $\sigma = [1/f_1\cdots f_n]$ である.

2 グロタンディックの双対性による双対基底

$\{b_1,\ldots,b_\mu\}$ を, 局所環 $\mathcal{O}_X/I$ の単項基底とする. $\{\eta_1,\ldots,\eta_\mu\}$ を次で与えられるグロタンディックの双対性による $\{b_1,\ldots,b_\mu\}$ の双対基底とする.

$$\mathcal{O}_X/I \times \mathcal{E}xt^n_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X/I,\mathcal{O}_X) \to \mathbf{C}.$$

このとき, 各コホモロジー類 η_j は擬斉次であり, 対応する b_i と η_i の擬次数 $\deg_w b_i$, $\deg_w \eta_i$ に関し, 次が成り立つ.

Theorem 2 $\deg_w b_i + \deg_w \eta_i = -\sum_{j=1}^n w_j$, $i = 1, \ldots, \mu$.

次のようにして, 双対基底 $\{\eta_1,\ldots,\eta_\mu\}$ を求めることができる. (cf. [8])

- $\zeta = (\zeta_1,\ldots,\zeta_n)$ を不定元とし, 各 $f_j(z)$ の Hefer 分解
  $f_j(z) - f_j(\zeta) = \sum_{k=1}^n q_{jk}(z,\zeta)(z_k - \zeta_k)$ を計算する.
- $q(z,\zeta) = det(q_{jk}(z,\zeta))_{1\le j,k\le n}$ とおく.
- $\mathcal{O}_X/I$ の単項基底 $\{b_1(z),\ldots,b_\mu(z)\}$ を用いて, q を $q(z,\zeta) = \sum_{i=1}^{\mu} h_i(\zeta)b_i(z) \bmod I$ の形に書きなおす.
- $\eta_i = [h_i(z)/\prod_{j=1}^n f_j]$ とおく.

このとき $\{\eta_1,\ldots,\eta_\mu\}$ は $\{b_1,\ldots,b_\mu\}$ の双対基底となる. 次の節でみるように, Theorem 1 を利用することにより, 各 η_j の具体的表現を得ることができる.
注意 : q は擬斉次であり, その擬次数は $nd_w - 2\sum_{j=1}^n w_j$ となり, よって $\deg_w h_i + \deg_w b_i = \deg_w \mathrm{Jac}$, $i = 1, \ldots, \mu$ が成り立つ. ここで, $\mathrm{Jac} = \partial(f_1,\ldots,f_n)/\partial(z_1,\ldots,z_n) \bmod I$ である.

3 計算方法

f を重み $w_1, \ldots, w_n$, 擬次数 d_w の擬斉次多項式とし, $I = \langle f_1,\ldots,f_n\rangle$, $f_j = \partial f/\partial z_j$ とおく. $m_j = \min\{m > 0 \mid z_j^m \in I\}$ とおく. このとき, $P = \sum_{j=1}^n w_j\partial_j + nd_w - \sum_{j=1}^n w_j$ に対し, $P\sigma = 0$ である. よって, $\Lambda = \{(\ell_1,\ldots,\ell_n) \in \mathbf{N}^n \mid 0 \le \ell_j < m_j, \sum_{j=1}^n w_j\ell_j = nd_w - \sum_{j=1}^n w_j\}$ に対し, σ は

$$\sigma = \left[\sum_{L\in\Lambda} \frac{a_L}{z^L}\right]$$

と表される. ここで, $L = (\ell_1,\ldots,\ell_n) \in \Lambda$ に対し, $z^L = z_1^{\ell_1}\cdots z_n^{\ell_n}$ とし, $a_L \in \mathbf{C}$ はパラメタである. さらに, 各 $j = 1,\ldots,n$ に対し, 条件 $f_j\sigma = 0$ を満たす a_L, $L \in \Lambda$ を求める. これにより, σ は定数倍を除いて一意に求まる.(Proposition 1 による.) 最後に条件

$$\frac{\partial(f_1,\ldots,f_n)}{\partial(z_1,\ldots,z_n)}\sigma = \mu[\frac{1}{z_1\ldots z_n}]$$

($\mu = \dim \mathbf{C}[z]/I$) により, コホモロジー類 σ の表現を得る. (Theorem 1 による.)

このようにして求めた n 次代数的局所コホモロジー類 σ の表現に対して, Hefer 分解により求まる係数 $h_i(z)$ を乗じることにより, b_i の双対基底 η_i の表現を得る.

注: この方法は半擬斉次多項式に対しても有効であり, 適当な微分作用素を与えることにより, コホモロジー類の具体的表現を計算することができる. なお, 半擬斉次多項式の場合に対する微分作用素系 $\mathcal{A}nn$ の構成法については, 研究中である.

4 擬斉次特異点と不変量

この節では, 次の simple singularities と unimodal singularities を取り上げる.

(i) 2 変数の simple singularities

A_k	$z_1^{k+1} + z_2^2,$	$k \geq 1$
D_k	$z_1^2 z_2 + z_2^{k-1},$	$k \geq 4$
E_6	$z_1^3 + z_2^4$	
E_7	$z_1^3 + z_1 z_2^3$	
E_8	$z_1^3 + z_2^5$	

(ii) 2 変数の unimodal singularities

J_{10}	$z_1^3 + a z_1^2 z_2^2 + z_2^6,$	$4a^3 + 27 \neq 0$
X_9	$z_1^4 + a z_1^2 z_2^2 + z_2^4,$	$a^2 - 4 \neq 0$
Z_{15}	$z_1^3 z_2 + a z_1^2 z_2^3 + z_2^7,$	$4a^3 + 27 \neq 0$
W_{15}	$z_1^4 + a z_1^2 z_2^3 + z_2^6,$	$a^2 - 4 \neq 0$
K_{16}	$z_1^3 + a z_1^2 z_2^3 + z_2^9,$	$4a^3 + 27 \neq 0$
N_{16}	$z_1^4 z_2 + a z_1^3 z_2^2 + b z_1^2 z_2^3 + z_1 z_2^4,$	$4(a^3 + b^3) - 18ab - a^2 b^2 + 27 \neq 0$
K_{12}	$z_1^3 + z_2^7$	
K_{13}	$z_1^3 + z_1 z_2^5$	
K_{14}	$z_1^3 + z_2^8$	
W_{12}	$z_1^4 + z_2^5$	
W_{13}	$z_1^4 + z_1 z_2^4$	
Z_{11}	$z_1^3 z_2 + z_2^5$	
Z_{12}	$z_1^3 z_2 + z_1 z_2^4$	
Z_{13}	$z_1^3 z_2 + z_2^6$	

(iii) 3 変数の unimodal singularities

P_8	$z_1^2 z_3 + z_2^3 + a z_2^2 z_3 + z_3^3,$	$4a^3 + 27 \neq 0$
Q_{14}	$z_2 z_3^2 + z_1^3 + a z_1^2 z_2^2 + z_2^6,$	$4a^3 + 27 \neq 0$
S_{14}	$z_1 z_3^2 + z_1^2 z_2 + a z_1 z_2^3 + z_2^5,$	$a^2 - 4 \neq 0$
U_{14}	$z_1^3 + z_2^3 + z_1 z_3^3 + a z_2 z_3^3,$	$a^3 - 1 \neq 0$
V_{15}	$z_1 z_3^2 + a z_2 z_3^2 + z_1^4 + b z_1^2 z_2^2 + z_2^4,$	$(b^2 - 4)(a^4 + a^2 b + 1) \neq 0$
Q_{10}	$z_1^3 + z_2^4 + z_2 z_3^2$	
Q_{11}	$z_1^3 + z_2^2 z_3 + z_1 z_3^3$	
Q_{12}	$z_1^3 + z_2^5 + z_2 z_3^2$	
S_{11}	$z_1^4 + z_2^2 z_3 + z_1 z_3^2$	
S_{12}	$z_1^2 z_2 + z_2^2 z_3 + z_1 z_3^3$	
U_{12}	$z_1^3 + z_2^3 + z_3^4$	

これらの擬斉次多項式 $f(z)$ に対し, $I = \langle \partial f/\partial z_1, \ldots, \partial f/\partial z_n \rangle$ とおく. このとき, 局所環 $\mathbf{C}[z]/I$ の単項

基底に対して, グロタンディックの留数で与えられる双対基底を計算する. そのためにまず, 次の不変量を計算する.

- f の擬斉次多項式としての重みと擬次数
- $I = \langle \partial f/\partial z_1, \ldots, \partial f/\partial z_n \rangle$ と各 $\partial f/\partial z_j$ の擬次数
- I の辞書式順序 $z_1 \succ \cdots \succ z_n$ に関するグレブナ基底 Gb
- $\mathrm{Jac} = \partial(f_1, \ldots, f_n)/\partial(z_1, \ldots, z_n) \bmod \mathrm{Gb}$ とその擬次数
- f のポアンカレ多項式
- n 次代数的局所コホモロジー類 $\eta = [1/f_1 \cdots f_n]$ の表現

そして, Gb に基づく単項基底とその擬次数, Hefer 分解により得られる係数 h_j, グロタンディックの留数で与えられる双対基底とその擬次数を求め, 表として与えることにする. なお, 単項基底は [1] と一部異なる. 座標変数は $z = (z_1, \ldots, z_n)$ を用いるが, 混乱を避けるため, Hefer 分解で現れる係数 h_j の変数には, $\zeta = (\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$ を用いる. 計算は, パラメタ a, b に対し, nondegenerate condition を満たす適当な値を与えて行うことにした.

Example 1 $f(z) = z_1^4 + z_1 z_2^2 + z_2 z_3^2$ は重み 4, 6, 5 に対して擬次数 16 をもつ擬斉次多項式であり, S_{11} 型特異点と呼ばれるものである. (添え字はミルナー数 $\mu = \dim \mathbf{C}[z]/I$ を表している.) イデアル $I = \langle 4z_1^3 + z_2^2, 2z_1z_2 + z_3^2, 2z_2z_3 \rangle$ に対する辞書式順序 $z_1 \succ z_2 \succ z_3$ によるグレブナ基底は $\mathrm{Gb} = \{z_3^3, z_2z_3, z_2^4, 2z_1z_2 + z_3^2, -2z_1^2z_3^2 + z_2^3, 4z_1^3 + z_2^2\}$ である. この順序に基づく局所環 $\mathcal{O}_X/I$ の単項基底は,

$$
\begin{aligned}
&b_1 = z_1^2 z_3, \quad b_2 = z_1^2, \quad b_3 = z_1 z_3^2, \quad b_4 = z_1 z_3, \quad b_5 = z_1, \quad b_6 = z_2^3, \\
&b_7 = z_2^2, \quad b_8 = z_2, \quad b_9 = z_3^2, \quad b_{10} = z_3, \quad b_{11} = 1
\end{aligned}
$$

で与えられ, 擬次数は 13, 8, 14, 9, 4, 18, 12, 6, 10, 5, 0 となる. $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)$ を不定元とし, f_j, $j = 1$, ..., n の *Hefer* 分解を計算することにより,

$$
q = (-8\zeta_1 z_1 - 8\zeta_1^2) z_3^2 + (-8\zeta_3 z_1^2 - 8\zeta_3\zeta_1 z_1 - 8\zeta_3\zeta_1^2) z_3 - 4z_2^3 - 4\zeta_2 z_2^2 - 4\zeta_2^2 z_2 - 8\zeta_3^2 z_1^2 - 8\zeta_3^2\zeta_1 z_1 - 4\zeta_2^3
$$

を得る. よって

$$
\begin{aligned}
&h_1 = -8\zeta_3, \quad h_2 = -8\zeta_3^2, \quad h_3 = -8\zeta_1, \quad h_4 = -8\zeta_3\zeta_1, \quad h_5 = -8\zeta_3^2\zeta_1, \quad h_6 = -4, \\
&h_7 = -4\zeta_2, \quad h_8 = -4\zeta_2^2, \quad h_9 = -8\zeta_1^2, \quad h_{10} = -8\zeta_3\zeta_1^2, \quad h_{11} = -4\zeta_2^3
\end{aligned}
$$

となる. 今,

$$
P = 4z_1\partial_1 + 6z_2\partial_2 + 5z_3\partial_3 + 33
$$

とおくと, $\eta = [1/(4z_1^3 + z_2^2)(2z_1z_2 + z_3^2)(2z_2z_3)]$ の *annihilator* イデアルは,

$$
\mathcal{A}nn = \langle P, 4z_1^3 + z_2^2, 2z_1z_2 + z_3^2, 2z_2z_3 \rangle
$$

で与えられる. よって, コホモロジー類 η は $\eta = -\frac{1}{4}[-\frac{1}{4}\frac{1}{z_1^4 z_2^2 z_3} + \frac{1}{z_1 z_2^4 z_3} + \frac{1}{2}\frac{1}{z_1^3 z_2 z_3^3}]$ と表すことができる. そして, $\{b_1, \ldots, b_{11}\}$ に対する双対基底は

$$
\begin{aligned}
&\eta_1 = [\frac{1}{z_1^3 z_2 z_3^2}], && \eta_2 = [\frac{1}{z_1^3 z_2 z_3}], \quad \eta_3 = [-\frac{1}{2}\frac{1}{z_1^3 z_2^2 z_3} + \frac{1}{z_1^2 z_2 z_3^3}], \\
&\eta_4 = [\frac{1}{z_1^2 z_2 z_3^2}], && \eta_5 = [\frac{1}{z_1^2 z_2 z_3}], \quad \eta_6 = [-\frac{1}{4}\frac{1}{z_1^4 z_2^2 z_3} + \frac{1}{z_1 z_2^4 z_3} + \frac{1}{2}\frac{1}{z_1^3 z_2 z_3^3}], \\
&\eta_7 = [-\frac{1}{4}\frac{1}{z_1^4 z_2 z_3} + \frac{1}{z_1 z_2^3 z_3}], && \eta_8 = [\frac{1}{z_1 z_2^2 z_3}], \quad \eta_9 = [-\frac{1}{2}\frac{1}{z_1^2 z_2^2 z_3} + \frac{1}{z_1 z_2 z_3^3}], \\
&\eta_{10} = [\frac{1}{z_1 z_2 z_3^2}], && \eta_{11} = [\frac{1}{z_1 z_2 z_3}]
\end{aligned}
$$

となる.

(S_{11} に関する計算は, §§4.3.9 にまとめ直してある.)

代数的局所コホモロジー類をこのように表現することにより, コホモロジー類の汎関数としての作用の具体的表現を得たことになる. つまりこの表現により, グロタンディック留数 $\mathrm{Res}_{[0]}(\omega,\eta)$ の計算を即座に行うことができる. 例えば上述の例に対して, $\omega = 55z_1^2z_2-9z_2^3+73z_1^2z_2^2-4$ とする. 今, $\omega = -\frac{55}{2}z_1z_3^2-9z_2^3-4 \bmod \mathrm{Gb}$ である. このとき, $\eta = -\dfrac{1}{4}[-\dfrac{1}{4}\dfrac{1}{z_1^4z_2^2z_3}+\dfrac{1}{z_1z_2^4z_3}+\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{z_1^3z_2z_3^3}]$ であるから,

$$\mathrm{Res}_{[0]}(\omega,\eta) = \mathrm{Res}_{[0]}(-\frac{55}{2}z_1z_3^2-9z_2^3-4,\eta) = \frac{9}{4}$$

が直ちに従う.

4.1 2 変数の simple singularities

4.1.1 特異点 $A_{2k}=z_1^{2k+1}+z_2^2,\ k\geq 1$ に関する計算

- 重み $(2,2k+1)$, 擬次数 $4k+2$
- $I=\langle(2k+1)z_1^{2k},2z_2\rangle$, 擬次数 $(4k,2k+1)$
- $\mathrm{Gb}=\{z_1^{2k},z_2\}$
- $\mathrm{Jac}=4k(2k+1)z_1^{2k-1}$, 擬次数 $4k-2$
- ポアンカレ多項式 $\sum_{j=1}^{k}t^{2j-2}$
- $\eta=\frac{1}{4k+2}[\frac{1}{z_1^{2k}z_2}]$, 擬次数 $-6k-1$

単項基底	擬次数	h_j	双対基底	擬次数
z_1^{2k-1},	$4k-2$,	$4k+2$,	$[\frac{1}{z_1^{2k}z_2}]$,	$-6k-1$
z_1^{2k-2},	$4k-4$,	$(4k+2)\zeta_1$,	$[\frac{1}{z_1^{2k-1}z_2}]$,	$-6k+1$
$\dots$,	$\dots$,	$\dots$,	$\dots$,	$\dots$
z_1,	2,	$(4k+2)\zeta_1^{2k-2}$,	$[\frac{1}{z_1^2z_2}]$,	$-2k-5$
1,	0,	$(4k+2)\zeta_1^{2k-1}$,	$[\frac{1}{z_1z_2}]$,	$-2k-3$

4.1.2 特異点 $A_{2k+1}=z_1^{2k+2}+z_2^2$ に関する計算

- 重み $(1,k+1)$, 擬次数 $2k+2$
- $I=\langle(2k+2)z_1^{2k+1},2z_2\rangle$, 擬次数 $(2k+1,k+1)$
- $\mathrm{Gb}=\{z_1^{2k+1},z_2\}$
- $\mathrm{Jac}=2(2k+2)(2k+1)z_1^{2k}$, 擬次数 $2k$
- ポアンカレ多項式 $\sum_{j=0}^{k}t^{2j}$
- $\eta=\frac{1}{4k+4}[\frac{1}{z_1^{2k+1}z_2}]$, 擬次数 $-3k-2$

単項基底	擬次数	h_j	双対基底	擬次数
z_1^{2k},	$2k$,	$4k+4$,	$[\frac{1}{z_1^{2k+1}z_2}]$,	$-3k-2$
z_1^{2k-1},	$2k-1$,	$(4k+4)\zeta_1$,	$[\frac{1}{z_1^{2k}z_2}]$,	$-3k-1$
$\dots$,	$\dots$,	$\dots$,	$\dots$,	$\dots$
z_1,	1,	$(4k+4)\zeta_1^{2k-1}$,	$[\frac{1}{z_1^2z_2}]$,	$-k-3$
1,	0,	$(4k+4)\zeta_1^{2k}$,	$[\frac{1}{z_1z_2}]$,	$-k-2$

4.1.3 特異点 $D_{2k}=z_1^2z_2+z_2^{2k-1}$, $k\geq 2$ に関する計算

- 重み $(k-1,1)$, 擬次数 $2k-1$
- $I=\langle 2z_1z_2, z_1^2+(2k-1)z_2^{2k-2}\rangle$, 擬次数 $(k,2k-2)$
- $\mathrm{Gb}=\{z_2^{2k-1}, z_1z_2, z_1^2+(2k-1)z_2^{2k-2}\}$
- $\mathrm{Jac}=4k(2k-1)z_2^{2k-2}$, 擬次数 $2k-2$
- ポアンカレ多項式 $\sum_{j=0}^{2k-2}t^j+t^{k-1}$
- $\eta=\frac{1}{4k-2}[\frac{1}{z_1z_2^{2k-1}}-(2k-1)\frac{1}{z_1^3z_2}]$, 擬次数 $-(3k-2)$

単項基底	擬次数	h_j	双対基底	擬次数
z_1,	$k-1$,	$-2\zeta_1$,	$[\frac{1}{z_1^2z_2}]$,	$-(2k-1)$
z_2^{2k-2},	$2k-2$,	$4k-2$,	$[\frac{1}{z_1z_2^{2k-1}}-(2k-1)\frac{1}{z_1^3z_2}]$,	$-(3k-2)$
z_2^{2k-3},	$2k-3$,	$(4k-2)\zeta_2$,	$[\frac{1}{z_1z_2^{2k-2}}]$,	$-(3k-3)$
$\dots$,	$\dots$,	$\dots$,	$\dots$,	$\dots$
z_2,	1,	$(4k-2)\zeta_2^{2k-3}$,	$[\frac{1}{z_1z_2^2}]$,	$-(k+1)$
1,	0,	$(4k-2)\zeta_2^{2k-2}$,	$[\frac{1}{z_1z_2}]$,	$-k$

4.1.4 特異点 $D_{2k+1}=z_1^2z_2+z_2^{2k}$, $k\geq 2$ に関する計算

- 重み $(2k-1,2)$, 擬次数 $4k$
- $I=\langle 2z_1z_2, z_1^2+2kz_2^{2k-1}\rangle$, 擬次数 $(2k+1,4k-2)$
- $\mathrm{Gb}=\{z_2^{2k}, z_1z_2, z_1^2+2kz_2^{2k-1}\}$
- $\mathrm{Jac}=4k(2k+1)z_2^{2k-1}$, 擬次数 $4k-2$
- ポアンカレ多項式 $\sum_{j=0}^{2k-1}t^{2j}$
- $\eta=\frac{1}{4k}[\frac{1}{z_1z_2^{2k}}-2k\frac{1}{z_1^3z_2}]$, 擬次数 $-(6k-1)$

単項基底	擬次数	h_j	双対基底	擬次数
z_1,	$2k-2$,	$-2\zeta_1$,	$[\frac{1}{z_1^2z_2}]$,	$-4k$
z_2^{2k-1},	$4k-2$,	$4k$,	$[\frac{1}{z_1z_2^{2k}}-2k\frac{1}{z_1^3z_2}]$,	$-(6k-1)$
z_2^{2k-2},	$4k-4$,	$4k\zeta_2$,	$[\frac{1}{z_1z_2^{2k-1}}]$,	$-(4k-3)$
$\dots$,	$\dots$,	$\dots$,	$\dots$,	$\dots$
z_2,	2,	$4k\zeta_2^{2k-2}$,	$[\frac{1}{z_1z_2^2}]$,	$-(2k+3)$
1,	0,	$4k\zeta_2^{2k-1}$,	$[\frac{1}{z_1z_2}]$,	$-(2k+1)$

4.1.5 特異点 $E_6 = z_1^3 + z_2^4$ に関する計算

- 重み $(4,3)$, 擬次数 12
- $I = \langle 3z_1^2, 4z_2^3 \rangle$, 擬次数 $(8,9)$
- $\mathrm{Gb} = \{z_1^2, z_2^3\}$
- $\mathrm{Jac} = 72 z_1 z_2^2$, 擬次数 10
- ポアンカレ多項式 $t^{10} + t^7 + t^6 + t^4 + t^3 + 1$
- $\eta = \frac{1}{12}[\frac{1}{z_1^2 z_2^3}]$, 擬次数 -17

単項基底	擬次数	h_j	双対基底	擬次数
$z_1 z_2^2$,	10,	12,	$[\frac{1}{z_1^2 z_2^3}]$,	-17
$z_1 z_2$,	7,	$12\zeta_2$,	$[\frac{1}{z_1^2 z_2^2}]$,	-14
z_1,	4,	$12\zeta_2^2$,	$[\frac{1}{z_1^2 z_2}]$,	-11
z_2^2,	6,	$12\zeta_1$,	$[\frac{1}{z_1 z_2^3}]$,	-13
z_2,	3,	$12\zeta_1\zeta_2$,	$[\frac{1}{z_1 z_2^2}]$,	-10
1,	0,	$12\zeta_1\zeta_2^2$,	$[\frac{1}{z_1 z_2}]$,	-7

4.1.6 特異点 $E_7 = z_1^3 + z_1 z_2^3$ に関する計算

- 重み $(3,2)$, 擬次数 9
- $I = \langle 3z_1^2 + z_2^3, 3z_1 z_2^2 \rangle$, 擬次数 $(6,7)$
- $\mathrm{Gb} = \{z_2^5, z_1 z_2^2, 3z_1^2 + z_2^3\}$
- $\mathrm{Jac} = -21 z_2^4$, 擬次数 8
- ポアンカレ多項式 $t^8 + t^6 + t^5 + t^4 + t^3 + t^2 + 1$
- $\eta = -\frac{1}{3}[\frac{1}{z_1 z_2^5} - \frac{1}{3}\frac{1}{z_1^3 z_2^2}]$, 擬次数 -13

単項基底	擬次数	h_j	双対基底	擬次数
$z_1 z_2$,	5,	$9\zeta_1$,	$[\frac{1}{z_1^2 z_2^2}]$,	-10
z_1,	3,	$9\zeta_1\zeta_2$,	$[\frac{1}{z_1^2 z_2}]$,	-8
z_2^4,	8,	-3,	$[\frac{1}{z_1 z_2^5} - \frac{1}{3}\frac{1}{z_1^3 z_2^2}]$,	-13
z_2^3,	6,	$-3\zeta_2$,	$[\frac{1}{z_1 z_2^4} - \frac{1}{3}\frac{1}{z_1^3 z_2}]$,	-11
z_2^2,	4,	$-3\zeta_2^2$,	$[\frac{1}{z_1 z_2^3}]$,	-9
z_2,	2,	$-3\zeta_2^3$,	$[\frac{1}{z_1 z_2^2}]$,	-7
1	0,	$-3\zeta_2^4$,	$[\frac{1}{z_1 z_2}]$,	-5

4.1.7 特異点 $E_8 = z_1^3 + z_2^5$ に関する計算

- 重み $(5,3)$, 擬次数 15
- $I = \langle 3z_1^2, 5z_2^4 \rangle$, 擬次数 $(10,12)$

- $\mathrm{Gb} = \{z_1^2, z_2^4\}$
- $\mathrm{Jac} = 120 z_1 z_2^3$, 擬次数 14
- ポアンカレ多項式 $t^{14} + t^{11} + t^9 + t^8 + t^6 + t^5 + t^3 + 1$
- $\eta = \frac{1}{15}[\frac{1}{z_1^2 z_2^4}]$, 擬次数 -22

単項基底	擬次数	h_j	双対基底	擬次数
$z_1 z_2^3$,	14,	15,	$[\frac{1}{z_1^2 z_2^4}]$,	-22
$z_1 z_2^2$,	11,	$15\zeta_2$,	$[\frac{1}{z_1^2 z_2^3}]$,	-19
$z_1 z_2$,	8,	$15\zeta_2^2$,	$[\frac{1}{z_1^2 z_2^2}]$,	-16
z_1,	5,	$15\zeta_2^3$,	$[\frac{1}{z_1^2 z_2}]$,	-13
z_2^3,	9,	$15\zeta_1$,	$[\frac{1}{z_1 z_2^4}]$,	-17
z_2^2,	6,	$15\zeta_1\zeta_2$,	$[\frac{1}{z_1 z_2^3}]$,	-14
z_2,	3,	$15\zeta_1\zeta_2^2$,	$[\frac{1}{z_1 z_2^2}]$,	-11
1,	0,	$15\zeta_1\zeta_2^3$,	$[\frac{1}{z_1 z_2}]$,	-8

4.2 2 変数の unimodal singularities

4.2.1 特異点 $J_{10} = z_1^3 + z_1^2 z_2^2 + z_2^6$ に関する計算 ($a = 1$)

- 重み $(2, 1)$, 擬次数 6
- $I = \langle 3z_1^2 + 2z_1 z_2^2, 2z_1^2 z_2 + 6z_2^5 \rangle$, 擬次数 $(4, 5)$
- $\mathrm{Gb} = \{z_2^7, -2z_1 z_2^3 + 9z_2^5, 3z_1^2 + 2z_1 z_2^2\}$
- $\mathrm{Jac} = \frac{2790}{3} z_2^6$, 擬次数 6
- ポアンカレ多項式 $t^6 + t^5 + 2t^4 + 2t^3 + 2t^2 + t + 1$
- $\eta = \frac{1}{93}[\frac{1}{z_1 z_2^7} + \frac{9}{2}\frac{1}{z_1^2 z_2^5} - 3\frac{1}{z_1^3 z_2^3} + 2\frac{1}{z_1^4 z_2}]$, 擬次数 -9

単項基底	擬次数	h_j	双対基底	擬次数
$z_1 z_2^2$,	4,	$-4\zeta_1 + 18\zeta_2^2$,	$[\frac{1}{z_1^2 z_2^3} - \frac{2}{3}\frac{1}{z_1^3 z_2}]$,	-7
$z_1 z_2$,	3,	$-4\zeta_1\zeta_2 + 18\zeta_2^3$,	$[\frac{1}{z_1^2 z_2^2}]$,	-6
z_1,	2,	$-4\zeta_1\zeta_2^2 + 18\zeta_2^4$,	$[\frac{1}{z_1^2 z_2}]$,	-5
z_2^6,	6,	93,	$[\frac{1}{z_1 z_2^7} + \frac{9}{2}\frac{1}{z_1^2 z_2^5} - 3\frac{1}{z_1^3 z_2^3} + 2\frac{1}{z_1^4 z_2}]$,	-9
z_2^5,	5,	$93\zeta_2$,	$[\frac{1}{z_1 z_2^5} + \frac{9}{2}\frac{1}{z_1^2 z_2^4} - 3\frac{1}{z_1^3 z_2^2}]$,	-8
z_2^4,	4,	$18\zeta_1 + 12\zeta_2^2$,	$[\frac{1}{z_1 z_2^5}]$,	-7
z_2^3,	3,	$18\zeta_1\zeta_2 + 12\zeta_2^3$,	$[\frac{1}{z_1 z_2^4}]$,	-6
z_2^2,	2,	$18\zeta_1\zeta_2^2 + 12\zeta_2^4$,	$[\frac{1}{z_1 z_2^3}]$,	-5
z_2,	1,	$93\zeta_2^5$,	$[\frac{1}{z_1 z_2^2}]$,	-4
1,	0,	$93\zeta_2^6$,	$[\frac{1}{z_1 z_2}]$,	-3

4.2.2 特異点 $X_9 = z_1^4 + z_1^2 z_2^2 + z_2^4$ に関する計算 $(a = 1)$

- 重み $(1, 1)$, 擬次数 4
- $I = \langle 4z_1^3 + 2z_1 z_2^2, 2z_1^2 z_2 + 4z_2^3 \rangle$, 擬次数 $(3, 3)$
- $\mathrm{Gb} = \{z_2^5, z_1 z_2^3, z_1^2 z_2 + 2z_2^3, 2z_1^3 + z_1 z_2^2\}$
- $\mathrm{Jac} = -216 z_2^4$, 擬次数 4
- ポアンカレ多項式 $t^4 + 2t^3 + 3t^2 + 2t + 1$
- $\eta = -\frac{1}{24}[\frac{1}{z_1 z_2^5} - 2\frac{1}{z_1^3 z_2^3} + \frac{1}{z_1^5 z_2}]$, 擬次数 -6

単項基底	擬次数	h_j	双対基底	擬次数
z_1^2,	2,	$8\zeta_1^2 + 16\zeta_2^2$,	$[\frac{1}{z_1^3 z_2}]$,	-4
$z_1 z_2^2$,	3,	$12\zeta_1$,	$[\frac{1}{z_1^2 z_2^3} - \frac{1}{2}\frac{1}{z_1^4 z_2}]$,	-5
$z_1 z_2$,	2,	$12\zeta_1\zeta_2$,	$[\frac{1}{z_1^2 z_2^2}]$,	-4
z_1,	1,	$12\zeta_2^2\zeta_1$,	$[\frac{1}{z_1^2 z_2}]$,	-3
z_2^4,	4,	-24,	$[\frac{1}{z_1 z_2^5} - 2\frac{1}{z_1^3 z_2^3} + \frac{1}{z_1^5 z_2}]$,	-6
z_2^3,	3,	$-24\zeta_2$,	$[\frac{1}{z_1 z_2^4} - 2\frac{1}{z_1^3 z_2^2}]$,	-5
z_2^2,	2,	$16\zeta_1^2 + 8\zeta_2^2$,	$[\frac{1}{z_1 z_2^3}]$,	-4
z_2,	1,	$-24\zeta_2^3$,	$[\frac{1}{z_1 z_2^2}]$,	-3
1,	0,	$-24\zeta_2^4$,	$[\frac{1}{z_1 z_2}]$,	-2

4.2.3 特異点 $Z_{15} = z_1^3 z_2 + z_1^2 z_2^3 + z_2^7$ に関する計算 $(a = 1)$

- 重み $(2, 1)$, 擬次数 7
- $I = \langle 3z_1^2 z_2 + 2z_1 z_2^3, z_1^3 + 3z_1^2 z_2^2 + 7z_2^6 \rangle$, 擬次数 $(5, 6)$
- $\mathrm{Gb} = \{z_2^9, -2z_1 z_2^5 + 9z_2^7, 3z_1^2 z_2 + 2z_1 z_2^3, z_1^3 - 2z_1 z_2^4 + 7z_2^6\}$
- $\mathrm{Jac} = \frac{3255}{2} z_2^8$, 擬次数 8
- ポアンカレ多項式 $t^8 + t^7 + 2t^6 + 2t^5 + 3t^4 + 2t^3 + 2t^2 + t + 1$
- $\eta = \frac{2}{217}[\frac{1}{z_1 z_2^9} + \frac{9}{2}\frac{1}{z_1^2 z_2^7} - 3\frac{1}{z_1^3 z_2^5} + 2\frac{1}{z_1^4 z_2^3} - \frac{75}{2}\frac{1}{z_1^5 z_2}]$, 擬次数 -11

単項基底	擬次数	h_j	双対基底	擬次数
z_1^2,	4,	$-3\zeta_1^2 - 2\zeta_1\zeta_2^2$,	$[\frac{1}{z_1^3 z_2}]$,	-7
$z_1 z_2^4$,	6,	$-\frac{14}{3}\zeta_1 + 21\zeta_2^2$,	$[\frac{1}{z_1^2 z_2^5} - \frac{2}{3}\frac{1}{z_1^3 z_2^3} + 2\frac{1}{z_1^4 z_2}]$,	-9
$z_1 z_2^3$,	5,	$-\frac{14}{3}\zeta_1\zeta_2 + 21\zeta_2^3$,	$[\frac{1}{z_1^2 z_2^4} - \frac{2}{3}\frac{1}{z_1^3 z_2^2}]$,	-8
$z_1 z_2^2$,	4,	$-2\zeta_1^2 - 6\zeta_1\zeta_2^2 + 21\zeta_2^4$,	$[\frac{1}{z_1^2 z_2^3}]$,	-7
$z_1 z_2$,	3,	$-\frac{14}{3}\zeta_1\zeta_2^3 + 21\zeta_2^5$,	$[\frac{1}{z_1^2 z_2^2}]$,	-6
z_1,	2,	$-\frac{14}{3}\zeta_1\zeta_2^4 + 21\zeta_2^6$,	$[\frac{1}{z_1^2 z_2}]$,	-5
z_2^8,	8,	$\frac{217}{2}$,	$[\frac{1}{z_1 z_2^9} + \frac{9}{2}\frac{1}{z_1^2 z_2^7} - 3\frac{1}{z_1^3 z_2^5} + 2\frac{1}{z_1^4 z_2^3} - \frac{75}{2}\frac{1}{z_1^5 z_2}]$,	-11
z_2^7,	7,	$\frac{217}{2}\zeta_2$,	$[\frac{1}{z_1 z_2^8} + \frac{9}{2}\frac{1}{z_1^2 z_2^6} - 3\frac{1}{z_1^3 z_2^4} + 2\frac{1}{z_1^4 z_2^2}]$,	-10
z_2^6,	6,	$21\zeta_1 + 14\zeta_2^2$,	$[\frac{1}{z_1 z_2^7} - 7\frac{1}{z_1^4 z_2}]$,	-9
z_2^5,	5,	$21\zeta_1\zeta_2 + 14\zeta_2^3$,	$[\frac{1}{z_1 z_2^6}]$,	-8
z_2^4,	4,	$21\zeta_1\zeta_2^2 + 14\zeta_2^4$,	$[\frac{1}{z_1 z_2^5}]$,	-7
z_2^3,	3,	$21\zeta_1\zeta_2^3 + 14\zeta_2^5$,	$[\frac{1}{z_1 z_2^4}]$,	-6
z_2^2,	2,	$21\zeta_1\zeta_2^4 + 14\zeta_2^6$,	$[\frac{1}{z_1 z_2^3}]$,	-5
z_2,	1,	$\frac{217}{2}\zeta_2^7$,	$[\frac{1}{z_1 z_2^2}]$,	-4
1,	0,	$\frac{217}{2}\zeta_2^8$,	$[\frac{1}{z_1 z_2}]$,	-3

4.2.4 特異点 $W_{15} = z_1^4 + z_1^2 z_2^3 + z_2^6$ に関する計算 $(a = 1)$

- 重み $(3, 2)$, 擬次数 12
- $I = \langle 4z_1^3 + 2z_1 z_2^3, 3z_1^2 z_2^2 + 6z_2^5 \rangle$, 擬次数 $(9, 10)$
- $\mathrm{Gb} = \{z_2^8, z_1 z_2^5, z_1^2 z_2^2 + 2z_2^5, 2z_1^3 + z_1 z_2^3\}$
- $\mathrm{Jac} = -540 z_2^7$, 擬次数 14
- ポアンカレ多項式 $t^{14} + t^{12} + t^{11} + t^{10} + t^9 + 2t^8 + t^7 + 2t^6 + t^5 + t^4 + t^3 + t^2 + 1$
- $\eta = -\frac{1}{36}[\frac{1}{z_1 z_2^8} - 2\frac{1}{z_1^3 z_2^5} + \frac{1}{z_1^5 z_2^2}]$, 擬次数 -19

単項基底	擬次数	h_j	双対基底	擬次数
$z_1^2 z_2$,	8,	$12\zeta_1^2 + 24\zeta_2^3$,	$[\frac{1}{z_1^3 z_2^2}]$,	-13
z_1^2,	6,	$12\zeta_1^2\zeta_2 + 24\zeta_2^4$,	$[\frac{1}{z_1^3 z_2}]$,	-11
$z_1 z_2^4$,	11,	$18\zeta_1$,	$[\frac{1}{z_1^2 z_2^5} - \frac{1}{2}\frac{1}{z_1^4 z_2^2}]$,	-16
$z_1 z_2^3$,	9,	$18\zeta_1\zeta_2$,	$[\frac{1}{z_1^2 z_2^4} - \frac{1}{2}\frac{1}{z_1^4 z_2}]$,	-14
$z_1 z_2^2$,	7,	$18\zeta_1\zeta_2^2$,	$[\frac{1}{z_1^2 z_2^3}]$,	-12
$z_1 z_2$,	5,	$18\zeta_1\zeta_2^3$,	$[\frac{1}{z_1^2 z_2^2}]$,	-10
z_1,	3,	$18\zeta_1\zeta_2^4$,	$[\frac{1}{z_1^2 z_2}]$,	-8
z_2^7,	14,	-36,	$[\frac{1}{z_1 z_2^8} - 2\frac{1}{z_1^3 z_2^5} + \frac{1}{z_1^5 z_2^2}]$,	-19
z_2^6,	12,	$-36\zeta_2$,	$[\frac{1}{z_1 z_2^8} - 2\frac{1}{z_1^3 z_2^4} + \frac{1}{z_1^5 z_2}]$,	-17
z_2^5,	10,	$-36\zeta_2^2$,	$[\frac{1}{z_1 z_2^6} - 2\frac{1}{z_1^3 z_2^3}]$,	-15
z_2^4,	8,	$24\zeta_1^2 + 12\zeta_2^3$,	$[\frac{1}{z_1 z_2^5}]$,	-13
z_2^3,	6,	$24\zeta_1^2\zeta_2 + 12\zeta_2^4$,	$[\frac{1}{z_1 z_2^4}]$,	-11
z_2^2,	4,	$-36\zeta_2^5$,	$[\frac{1}{z_1 z_2^3}]$,	-9
z_2,	2,	$-36\zeta_2^6$,	$[\frac{1}{z_1 z_2^2}]$,	-7
1,	0,	$-36\zeta_2^7$,	$[\frac{1}{z_1 z_2}]$,	-5

4.2.5 特異点 $K_{16} = z_1^3 + z_1^2 z_2^3 + z_2^9$ に関する計算 $(a = 1)$

- 重み $(3, 1)$, 擬次数 9
- $I = \langle 3z_1^2 + 2z_1 z_2^3, 3z_1^2 z_2^2 + 9z_2^8 \rangle$, 擬次数 $(6, 8)$
- $\mathrm{Gb} = \{z_2^{11}, -2z_1 z_2^5 + 9z_2^8, 3z_1^2 + 2z_1 z_2^2\}$
- $\mathrm{Jac} = 2232 z_2^{10}$, 擬次数 10
- ポアンカレ多項式 $t^{10} + t^9 + t^8 + 2t^7 + 2t^6 + 2t^5 + 2t^4 + 2t^3 + t^2 + t + 1$
- $\eta = \frac{2}{279}[\frac{1}{z_1 z_2^{11}} + \frac{9}{2}\frac{1}{z_1^2 z_2^8} - 3\frac{1}{z_1^3 z_2^5} + 2\frac{1}{z_1^4 z_2^2}]$, 擬次数 -14

単項基底	擬次数	h_j	双対基底	擬次数
$z_1z_2^4$,	7,	$-6\zeta_1+27\zeta_2^3$,	$[\frac{1}{z_1^2z_2^5}-\frac{2}{3}\frac{1}{z_1^3z_2^2}]$,	-11
$z_1z_2^3$,	6,	$-6\zeta_1\zeta_2+27\zeta_2^4$,	$[\frac{1}{z_1^2z_2^4}-2\frac{1}{z_1^3z_2}]$,	-10
$z_1z_2^2$,	5,	$-6\zeta_1\zeta_2^2+27\zeta_2^5$,	$[\frac{1}{z_1^2z_2^3}]$,	-9
z_1z_2,	4,	$-6\zeta_1\zeta_2^3+27\zeta_2^6$,	$[\frac{1}{z_1^2z_2^2}]$,	-8
z_1,	3,	$-6\zeta_1\zeta_2^4+27\zeta_2^7$,	$[\frac{1}{z_1^2z_2}]$,	-7
z_2^{10},	10,	$\frac{279}{2}$,	$[\frac{1}{z_1z_2^{11}}+\frac{9}{2}\frac{1}{z_1^2z_2^8}-3\frac{1}{z_1^3z_2^5}+2\frac{1}{z_1^4z_2^2}]$,	-14
z_2^9,	9,	$\frac{279}{2}\zeta_2$,	$[\frac{1}{z_1z_2^{10}}+\frac{9}{2}\frac{1}{z_1^2z_2^7}-3\frac{1}{z_1^3z_2^4}+2\frac{1}{z_1^4z_2}]$,	-13
z_2^8,	8,	$\frac{279}{2}\zeta_2^2$,	$[\frac{1}{z_1z_2^9}+\frac{9}{2}\frac{1}{z_1^2z_2^6}-3\frac{1}{z_1^3z_2^3}]$,	-12
z_2^7,	7,	$27\zeta_1+18\zeta_2^3$,	$[\frac{1}{z_1z_2^8}]$,	-11
z_2^6,	6,	$27\zeta_1\zeta_2+18\zeta_2^4$,	$[\frac{1}{z_1z_2^7}]$,	-10
z_2^5,	5,	$27\zeta_1\zeta_2^2+18\zeta_2^5$,	$[\frac{1}{z_1z_2^6}]$,	-9
z_2^4,	4,	$27\zeta_1\zeta_2^3+18\zeta_2^6$,	$[\frac{1}{z_1z_2^5}]$,	-8
z_2^3,	3,	$27\zeta_1\zeta_2^4+18\zeta_2^7$,	$[\frac{1}{z_1z_2^4}]$,	-7
z_2^2,	2,	$\frac{279}{2}\zeta_2^8$,	$[\frac{1}{z_1z_2^3}]$,	-6
z_2,	1,	$\frac{279}{2}\zeta_2^9$,	$[\frac{1}{z_1z_2^2}]$,	-5
1,	0,	$\frac{279}{2}\zeta_2^{10}$,	$[\frac{1}{z_1z_2}]$,	-4

4.2.6 特異点 $N_{16}=z_1^4z_2+z_1^3z_2^2+z_1^2z_2^3+z_1z_2^4$ に関する計算 $(a=b=1)$

- 重み $(1,1)$, 擬次数 5
- $I=\langle 4z_1^3z_2+3z_1^2z_2^2+2z_1z_2^3+z_2^4, z_1^4+2z_1^3z_2+3z_1^2z_2^2+4z_1z_2^3\rangle$, 擬次数 $(4,4)$
- $\mathrm{Gb}=\{z_2^7, z_1z_2^5, 5z_1^2z_2^3+10z_1z_2^4-z_2^5, 4z_1^3z_2+3z_1^2z_2^2+2z_1z_2^3+z_2^4, 2z_1^4+3z_1^2z_2^2+6z_1z_2^3-z_2^4\}$
- $\mathrm{Jac}=-64z_2^6$, 擬次数 6
- ポアンカレ多項式 $t^6+2t^5+3t^4+4t^3+3t^2+2t+1$
- $\eta=-\frac{1}{4}[\frac{1}{z_1z_2^7}+\frac{1}{5}\frac{1}{z_1^3z_2^5}-\frac{2}{5}\frac{1}{z_1^4z_2^4}+\frac{1}{5}\frac{1}{z_1^5z_2^3}+\frac{1}{z_1^7z_2}]$, 擬次数 -8

単項基底	擬次数	h_j	双対基底	擬次数
z_1^3,	3,	$-4\zeta_1^3-3\zeta_1^2\zeta_2-2\zeta_1\zeta_2^2-\zeta_2^3$,	$[\frac{1}{z_1^4z_2}]$,	-5
$z_1^2z_2^2$,	4,	$\frac{25}{4}\zeta_1^2+\frac{25}{2}\zeta_1\zeta_2-\frac{5}{4}\zeta_2^2$,	$[\frac{1}{z_1^3z_2^3}-\frac{3}{4}\frac{1}{z_1^4z_1^2}-\frac{3}{2}\frac{1}{z_1^5z_2}]$,	-6
$z_1^2z_2$,	3,	$-3\zeta_1^3+4\zeta_1^2\zeta_2+11\zeta_1\zeta_2^2-2\zeta_2^3$,	$[\frac{1}{z_1^3z_2^2}]$,	-5
z_1^2,	2,	$\frac{25}{4}\zeta_1^2\zeta_2^2+\frac{25}{2}\zeta_1\zeta_2^3-\frac{5}{4}\zeta_2^4$,	$[\frac{1}{z_1^4z_2}]$,	-4
$z_1z_2^4$,	5,	$-20\zeta_1$,	$[\frac{1}{z_1^2z_2^5}-2\frac{1}{z_1^3z_2^4}+\frac{1}{z_1^4z_2^3}+5\frac{1}{z_1^6z_2}]$,	-7
$z_1z_2^3$,	4,	$\frac{25}{2}\zeta_1^2+5\zeta_1\zeta_2-\frac{5}{2}\zeta_2^2$,	$[\frac{1}{z_1^2z_2^4}-\frac{1}{2}\frac{1}{z_1^4z_2^2}-3\frac{1}{z_1^5z_2}]$,	-6
$z_1z_2^2$,	3,	$-2\zeta_1^3+11\zeta_1^2\zeta_2+4\zeta_1\zeta_2^2-3\zeta_2^3$,	$[\frac{1}{z_1^2z_2^3}]$,	-5
z_1z_2,	2,	$\frac{25}{2}\zeta_1^2\zeta_2^2+5\zeta_1\zeta_2^3-\frac{5}{2}\zeta_2^4$,	$[\frac{1}{z_1^2z_2^2}]$,	-4
z_1,	1,	$-20\zeta_1\zeta_2^4$,	$[\frac{1}{z_1^2z_2}]$,	-3
z_2^6,	6,	-4,	$[\frac{1}{z_1z_2^7}+\frac{1}{5}\frac{1}{z_1^3z_2^5}-\frac{2}{5}\frac{1}{z_1^4z_2^4}+\frac{1}{5}\frac{1}{z_1^5z_2^3}+\frac{1}{z_1^7z_2}]$,	-8
z_2^5,	5,	$-4\zeta_2$,	$[\frac{1}{z_1z_2^6}+\frac{1}{5}\frac{1}{z_1^3z_2^4}-\frac{2}{5}\frac{1}{z_1^4z_2^3}+\frac{1}{5}\frac{1}{z_1^5z_2^2}]$,	-7
z_2^4,	4,	$-\frac{5}{4}\zeta_2^2-\frac{5}{2}\zeta_1\zeta_2-\frac{15}{4}\zeta_2^2$,	$[\frac{1}{z_1z_2^5}-\frac{1}{4}\frac{1}{z_1^4z_2^2}+\frac{1}{2}\frac{1}{z_1^5z_2}]$,	-6
z_2^3,	3,	$-\zeta_1^3-2\zeta_1^2\zeta_2-3\zeta_1\zeta_2^2-4\zeta_2^3$,	$[\frac{1}{z_1z_2^4}]$,	-5
z_2^2,	2,	$-\frac{5}{4}\zeta_1^2\zeta_2^2-\frac{5}{2}\zeta_1\zeta_2^3-\frac{15}{4}\zeta_2^4$,	$[\frac{1}{z_1z_2^3}]$,	-4
z_2,	1,	$-4\zeta_2^5$,	$[\frac{1}{z_1z_2^2}]$,	-3
1,	0,	$-4\zeta_2^6$,	$[\frac{1}{z_1z_2}]$,	-2

4.2.7 特異点 $K_{12}=z_1^3+z_2^7$ に関する計算

- 重み $(7,3)$, 擬次数 21
- $I=\langle 3z_1^2, 7z_2^6\rangle$, 擬次数 $(14,18)$
- $\mathrm{Gb}=\{z_1^2, z_2^6\}$
- $\mathrm{Jac}=252z_1z_2^5$, 擬次数 22
- ポアンカレ多項式 $t^{22}+t^{19}+t^{16}+t^{15}+t^{13}+t^{12}+t^{10}+t^9+t^7+t^6+t^3+1$
- $\eta=\frac{1}{21}[\frac{1}{z_1^2z_2^6}]$, 擬次数 -32

単項基底	擬次数	h_j	双対基底	擬次数
$z_1z_2^5$,	22,	21,	$[\frac{1}{z_1^2z_2^6}]$,	-32
$z_1z_2^4$,	19,	$21\zeta_2$,	$[\frac{1}{z_1^2z_2^5}]$,	-29
$z_1z_2^3$,	16,	$21\zeta_2^2$,	$[\frac{1}{z_1^2z_2^4}]$,	-26
$z_1z_2^2$,	13,	$21\zeta_2^3$,	$[\frac{1}{z_1^2z_2^3}]$,	-23
z_1z_2,	10,	$21\zeta_2^4$,	$[\frac{1}{z_1^2z_2^2}]$,	-20
z_1,	7,	$21\zeta_2^5$,	$[\frac{1}{z_1^2z_2}]$,	-17
z_2^5,	15,	$21\zeta_1$,	$[\frac{1}{z_1z_2^6}]$,	-25
z_2^4,	12,	$21\zeta_1\zeta_2$,	$[\frac{1}{z_1z_2^5}]$,	-22
z_2^3,	9,	$21\zeta_1\zeta_2^2$,	$[\frac{1}{z_1z_2^4}]$,	-19
z_2^2,	6,	$21\zeta_1\zeta_2^3$,	$[\frac{1}{z_1z_2^3}]$,	-16
z_2,	3,	$21\zeta_1\zeta_2^4$,	$[\frac{1}{z_1z_2^2}]$,	-13
1	0,	$21\zeta_1\zeta_2^5$,	$[\frac{1}{z_1z_2}]$,	-10

4.2.8 特異点 $K_{13} = z_1^3 + z_1 z_2^5$ に関する計算

- 重み $(5, 2)$, 擬次数 15
- $I = \langle 3z_1^2 + z_2^5, 5z_1 z_2^4 \rangle$, 擬次数 $(10, 13)$
- $\mathrm{Gb} = \{z_2^9, z_1 z_2^4, 3z_1^2 + z_3^5\}$
- $\mathrm{Jac} = -65 z_2^8$, 擬次数 16
- ポアンカレ多項式 $t^{16} + t^{14} + t^{12} + t^{11} + t^{10} + t^9 + t^8 + t^7 + t^6 + t^5 + t^4 + t^2 + 1$
- $\eta = -\frac{1}{5}[\frac{1}{z_1 z_2^9} - \frac{1}{3} z_1^3 z_2^4]$, 擬次数 -23

単項基底	擬次数	h_j	双対基底	擬次数
$z_1 z_2^3$,	11,	$15\zeta_1$,	$[\frac{1}{z_1^2 z_2^4}]$,	-18
$z_1 z_2^2$,	9,	$15\zeta_1\zeta_2$,	$[\frac{1}{z_1^2 z_2^3}]$,	-16
$z_1 z_2$,	7,	$15\zeta_1\zeta_2^2$,	$[\frac{1}{z_1^2 z_2^2}]$,	-14
z_1,	5,	$15\zeta_1\zeta_2^3$,	$[\frac{1}{z_1^2 z_2}]$,	-12
z_2^8,	16,	-5,	$[\frac{1}{z_1 z_2^9} - \frac{1}{3}\frac{1}{z_1^3 z_2^4}]$,	-23
z_2^7,	14,	$-5\zeta_2$,	$[\frac{1}{z_1 z_2^8} - \frac{1}{3}\frac{1}{z_1^3 z_2^3}]$,	-21
z_2^6,	12,	$-5\zeta_2^2$,	$[\frac{1}{z_1 z_2^7} - \frac{1}{3}\frac{1}{z_1^3 z_2^2}]$,	-19
z_2^5,	10,	$-5\zeta_2^3$,	$[\frac{1}{z_1 z_2^6} - \frac{1}{3}\frac{1}{z_1^3 z_2}]$,	-17
z_2^4,	8,	$-5\zeta_2^4$,	$[\frac{1}{z_1 z_2^5}]$,	-15
z_2^3,	6,	$-5\zeta_2^5$,	$[\frac{1}{z_1 z_2^4}]$,	-13
z_2^2,	4,	$-5\zeta_2^6$,	$[\frac{1}{z_1 z_2^3}]$,	-11
z_2,	2,	$-5\zeta_2^7$,	$[\frac{1}{z_1 z_2^2}]$,	-9
1,	0,	$-5\zeta_2^8$,	$[\frac{1}{z_1 z_2}]$,	-7

4.2.9 特異点 $K_{14} = z_1^3 + z_2^8$ に関する計算

- 重み $(8, 3)$, 擬次数 24
- $I = \langle 3z_1^2, 8z_2^7 \rangle$, 擬次数 $(16, 21)$
- $\mathrm{Gb} = \{z_1^2, z_2^7\}$
- $\mathrm{Jac} = 336 z_1 z_2^6$, 擬次数 26
- ポアンカレ多項式 $t^{26} + t^{23} + t^{20} + t^{18} + t^{17} + t^{15} + t^{14} + t^{12} + t^{11} + t^9 + t^8 + t^6 + t^3 + 1$
- $\eta = \frac{1}{24}[\frac{1}{z_1^2 z_2^7}]$, 擬次数 -37

単項基底	擬次数	h_j	双対基底	擬次数
$z_1z_2^6$,	26,	24,	$[\frac{1}{z_1^2z_2^7}]$,	-37
$z_1z_2^5$,	23,	$24\zeta_2$,	$[\frac{1}{z_1^2z_2^6}]$,	-34
$z_1z_2^4$,	20,	$24\zeta_2^2$,	$[\frac{1}{z_1^2z_2^5}]$,	-31
$z_1z_2^3$,	17,	$24\zeta_2^3$,	$[\frac{1}{z_1^2z_2^4}]$,	-28
$z_1z_2^2$,	14,	$24\zeta_2^4$,	$[\frac{1}{z_1^2z_2^3}]$,	-25
z_1z_2,	11,	$24\zeta_2^5$,	$[\frac{1}{z_1^2z_2^2}]$,	-22
z_1,	8,	$24\zeta_2^6$,	$[\frac{1}{z_1^2z_2}]$,	-19
z_2^6,	18,	$24\zeta_1$,	$[\frac{1}{z_1z_2^7}]$,	-29
z_2^5,	15,	$24\zeta_1\zeta_2$,	$[\frac{1}{z_1z_2^6}]$,	-26
z_2^4,	12,	$24\zeta_1\zeta_2^2$,	$[\frac{1}{z_1z_2^5}]$,	-23
z_2^3,	9,	$24\zeta_1\zeta_2^3$,	$[\frac{1}{z_1z_2^4}]$,	-20
z_2^2,	6,	$24\zeta_1\zeta_2^4$,	$[\frac{1}{z_1z_2^3}]$,	-17
z_2,	3,	$24\zeta_1\zeta_2^5$,	$[\frac{1}{z_1z_2^2}]$,	-14
1,	0,	$24\zeta_1\zeta_2^6$,	$[\frac{1}{z_1z_2}]$,	-11

4.2.10 特異点 $W_{12} = z_1^4 + z_2^5$ に関する計算

- 重み $(5, 4)$, 擬次数 20
- $I = \langle 4z_1^3, 5z_2^4 \rangle$, 擬次数 $(15, 16)$
- $\mathrm{Gb} = \{z_1^3, z_2^4\}$
- $\mathrm{Jac} = 240z_1^2z_2^3$, 擬次数 22
- ポアンカレ多項式 $t^{22} + t^{18} + t^{17} + t^{14} + t^{13} + t^{12} + t^{10} + t^9 + t^8 + t^5 + t^4 + 1$
- $\eta = \frac{1}{20}[\frac{1}{z_1^3z_2^4}]$, 擬次数 -31

単項基底	擬次数	h_j	双対基底	擬次数
$z_1^2z_2^3$,	22,	20,	$[\frac{1}{z_1^3z_2^4}]$,	-31
$z_1^2z_2^2$,	18,	$20\zeta_2$,	$[\frac{1}{z_1^3z_2^3}]$	-27
$z_1^2z_2$,	14,	$20\zeta_2^2$,	$[\frac{1}{z_1^3z_2^2}]$,	-23
z_1^2,	10,	$20\zeta_2^3$,	$[\frac{1}{z_1^3z_2}]$,	-19
$z_1z_2^3$,	17,	$20\zeta_1$,	$[\frac{1}{z_1^2z_2^4}]$,	-26
$z_1z_2^2$,	13,	$20\zeta_1\zeta_2$,	$[\frac{1}{z_1^2z_2^3}]$,	-22
z_1z_2,	9,	$20\zeta_1\zeta_2^2$,	$[\frac{1}{z_1^2z_2^2}]$,	-18
z_1,	5,	$20\zeta_1\zeta_2^3$,	$[\frac{1}{z_1^2z_2}]$,	-14
z_2^3,	12,	$20\zeta_1^2$,	$[\frac{1}{z_1z_2^4}]$,	-21
z_2^2,	8,	$20\zeta_1^2\zeta_2$,	$[\frac{1}{z_1z_2^3}]$,	-17
z_2,	4,	$20\zeta_1^2\zeta_2^2$,	$[\frac{1}{z_1z_2^2}]$,	-13
1,	0,	$20\zeta_1^2\zeta_2^3$,	$[\frac{1}{z_1z_2}]$,	-9

4.2.11 特異点 $W_{13} = z_1^4 + z_1 z_2^4$ に関する計算

- 重み $(4,3)$, 擬次数 16
- $I = \langle 4z_1^3 + z_2^4, 4z_1 z_2^3 \rangle$, 擬次数 $(12, 13)$
- $\mathrm{Gb} = \{z_2^7, z_1 z_2^3, 4z_1^3 + z_2^3\}$
- $\mathrm{Jac} = -52 z_2^6$, 擬次数 18
- ポアンカレ多項式 $t^{18} + t^{15} + t^{14} + t^{12} + t^{11} + t^{10} + t^9 + t^8 + t^7 + t^6 + t^4 + t^3 + 1$
- $\eta = -\frac{1}{4}[\frac{1}{z_1 z_2^7} - \frac{1}{4}\frac{1}{z_1^4 z_2^3}]$, 擬次数 -25

単項基底	擬次数	h_j	双対基底	擬次数
$z_1^2 z_2^2$,	14,	$16\zeta_1$,	$[\frac{1}{z_1^3 z_2^3}]$,	-21
$z_1^2 z_2$,	11,	$16\zeta_1\zeta_2$,	$[\frac{1}{z_1^3 z_2^2}]$,	-18
z_1^2,	8,	$16\zeta_1\zeta_2^2$,	$[\frac{1}{z_1^3 z_2}]$,	-15
$z_1 z_2^2$,	10,	$16\zeta_1^2$,	$[\frac{1}{z_1^2 z_2^3}]$,	-17
$z_1 z_2$,	7,	$16\zeta_1^2\zeta_2$,	$[\frac{1}{z_1^2 z_2^2}]$,	-14
z_1,	4,	$16\zeta_1^2\zeta_2^2$,	$[\frac{1}{z_1^2 z_2}]$,	-11
z_2^6,	18,	-4,	$[\frac{1}{z_1 z_2^7} - \frac{1}{4}\frac{1}{z_1^4 z_2^3}]$,	-25
z_2^5,	15,	$-4\zeta_2$,	$[\frac{1}{z_1 z_2^6} - \frac{1}{4}\frac{1}{z_1^4 z_2^2}]$,	-22
z_2^4,	12,	$-4\zeta_2^2$,	$[\frac{1}{z_1 z_2^5} - \frac{1}{4}\frac{1}{z_1^4 z_2}]$,	-19
z_2^3,	9,	$-4\zeta_2^3$,	$[\frac{1}{z_1 z_2^4}]$,	-16
z_2^2,	6,	$-4\zeta_2^4$,	$[\frac{1}{z_1 z_2^3}]$,	-13
z_2,	3,	$-4\zeta_2^5$,	$[\frac{1}{z_1 z_2^2}]$,	-10
1,	0,	$-4\zeta_2^6$,	$[\frac{1}{z_1 z_2}]$,	-7

4.2.12 特異点 $Z_{11} = z_1^3 z_2 + z_2^5$ に関する計算

- 重み $(4,3)$, 擬次数 15
- $I = \langle 3z_1^2 z_2, z_1^3 + 5z_2^4 \rangle$, 擬次数 $(11, 12)$
- $\mathrm{Gb} = \{z_2^5, z_1^2 z_2, z_1^3 + 5z_2^4\}$
- $\mathrm{Jac} = 165 z_1 z_2^4$, 擬次数 16
- ポアンカレ多項式 $t^{16} + t^{13} + t^{12} + t^{10} + t^9 + t^8 + t^7 + t^6 + t^4 + t^3 + 1$
- $\eta = \frac{1}{15}[\frac{1}{z_1^2 z_2^5} - 5\frac{1}{z_1^5 z_2}]$, 擬次数 -23

単項基底	擬次数	h_j	双対基底	擬次数
z_1^2,	8,	$-3\zeta_1^2$,	$[\frac{1}{z_1^3 z_2}]$,	-15
$z_1 z_2^4$,	16,	15,	$[\frac{1}{z_1^2 z_2^5} - 5\frac{1}{z_1^5 z_2}]$,	-23
$z_1 z_2^3$,	13,	$15\zeta_2$,	$[\frac{1}{z_1^2 z_2^4}]$,	-20
$z_1 z_2^2$,	10,	$15\zeta_2^2$,	$[\frac{1}{z_1^2 z_2^3}]$,	-17
$z_1 z_2$,	7,	$15\zeta_2^3$,	$[\frac{1}{z_1^2 z_2^2}]$,	-14
z_1,	4,	$15\zeta_2^4$,	$[\frac{1}{z_1^2 z_2}]$,	-11
z_2^4,	12,	$15\zeta_1$,	$[\frac{1}{z_1 z_2^5} - 5\frac{1}{z_1^4 z_2}]$,	-19
z_2^3,	9,	$15\zeta_1\zeta_2$,	$[\frac{1}{z_1 z_2^4}]$,	-16
z_2^2,	6,	$15\zeta_1\zeta_2^2$,	$[\frac{1}{z_1 z_2^3}]$,	-13
z_2,	3,	$15\zeta_1\zeta_2^3$,	$[\frac{1}{z_1 z_2^2}]$,	-10
1,	0,	$15\zeta_1\zeta_2^4$,	$[\frac{1}{z_1 z_2}]$,	-7

4.2.13 特異点 $Z_{12} = z_1^3 z_2 + z_1 z_2^4$ に関する計算

- 重み $(3,2)$, 擬次数 11
- $I = \langle 3z_1^2 z_2 + z_2^4, z_1^3 + 4z_1 z_2^3 \rangle$, 擬次数 $(8,9)$
- $\mathrm{Gb} = \{z_2^7, z_1 z_2^4, 3z_1^2 z_2 + z_2^4, z_1^3 + 4z_1 z_2^3\}$
- $\mathrm{Jac} = -44z_2^6$, 擬次数 12
- ポアンカレ多項式 $t^{12} + t^{10} + t^9 + t^8 + t^7 + 2t^6 + t^5 + t^4 + t^3 + t^2 + 1$
- $\eta = -\frac{3}{11}[\frac{1}{z_1 z_2^7} - \frac{1}{3}\frac{1}{z_1^3 z_2^4} + \frac{4}{3}\frac{1}{z_1^5 z_2}]$, 擬次数 -17

単項基底	擬次数	h_j	双対基底	擬次数
z_1^2,	6,	$-3\zeta_1^2 - \zeta_2^3$,	$[\frac{1}{z_1^3 z_2}]$,	-11
$z_1 z_2^3$,	9,	$11\zeta_1$,	$[\frac{1}{z_1^2 z_2^4} - 4\frac{1}{z_1^4 z_2}]$,	-14
$z_1 z_2^2$,	7,	$11\zeta_1\zeta_2$,	$[\frac{1}{z_1^2 z_2^3}]$,	-12
$z_1 z_2$,	5,	$11\zeta_1\zeta_2^2$,	$[\frac{1}{z_1^2 z_2^2}]$,	-10
z_1,	3,	$11\zeta_1\zeta_2^3$,	$[\frac{1}{z_1^2 z_2}]$,	-8
z_2^6,	12,	$-\frac{11}{3}$,	$[\frac{1}{z_1 z_2^7} - \frac{1}{3}\frac{1}{z_1^3 z_2^4} + \frac{4}{3}\frac{1}{z_1^5 z_2}]$,	-17
z_2^5,	10,	$-\frac{11}{3}\zeta_2$,	$[\frac{1}{z_1 z_2^6} - \frac{1}{3}\frac{1}{z_1^3 z_2^3}]$,	-15
z_2^4,	8,	$-\frac{11}{3}\zeta_2^2$,	$[\frac{1}{z_1 z_2^5} - \frac{1}{3}\frac{1}{z_1^3 z_2^2}]$,	-13
z_2^3,	6,	$-\zeta_1^2 - 4\zeta_2^3$,	$[\frac{1}{z_1 z_2^4}]$,	-11
z_2^2,	4,	$-\frac{11}{3}\zeta_2^4$,	$[\frac{1}{z_1 z_2^3}]$,	-9
z_2,	2,	$-\frac{11}{3}\zeta_2^5$,	$[\frac{1}{z_1 z_2^2}]$,	-7
1,	0,	$-\frac{11}{3}\zeta_2^6$,	$[\frac{1}{z_1 z_2}]$,	-5

4.2.14 特異点 $Z_{13} = z_1^3 z_2 + z_2^6$ に関する計算

- 重み $(5,3)$, 擬次数 18
- $I = \langle 3z_1^2 z_2, z_1^3 + 6z_2^5 \rangle$, 擬次数 $(13,15)$

- $\mathrm{Gb} = \{z_2^6, z_1^2 z_2, z_1^3 + 6z_2^5\}$
- $\mathrm{Jac} = 234 z_1 z_2^5$, 擬次数 20
- ポアンカレ多項式 $t^{20} + t^{17} + t^{15} + t^{14} + t^{12} + t^{11} + t^{10} + t^9 + t^8 + t^6 + t^5 + t^3 + 1$
- $\eta = \frac{1}{18}[\frac{1}{z_1^2 z_2^6} - 6\frac{1}{z_1^5 z_2}]$, 擬次数 -28

単項基底	擬次数	h_j	双対基底	擬次数
z_1^2,	10,	$-3\zeta_1^2$,	$[\frac{1}{z_1^3 z_2}]$,	-18
$z_1 z_2^5$,	20,	18,	$[\frac{1}{z_1^2 z_2^6} - 6\frac{1}{z_1^5 z_2}]$,	-28
$z_1 z_2^4$,	17,	$18\zeta_2$,	$[\frac{1}{z_1^2 z_2^5}]$,	-25
$z_1 z_2^3$,	14,	$18\zeta_2^2$,	$[\frac{1}{z_1^2 z_2^4}]$,	-22
$z_1 z_2^2$,	11,	$18\zeta_2^3$,	$[\frac{1}{z_1^2 z_2^3}]$,	-19
$z_1 z_2$,	8,	$18\zeta_2^4$,	$[\frac{1}{z_1^2 z_2^2}]$,	-16
z_1,	5,	$18\zeta_2^5$,	$[\frac{1}{z_1^2 z_2}]$,	-13
z_2^5,	15,	$18\zeta_1$,	$[\frac{1}{z_1 z_2^6} - 6\frac{1}{z_1^4 z_2}]$,	-23
z_2^4,	12,	$18\zeta_1\zeta_2$,	$[\frac{1}{z_1 z_2^5}]$,	-20
z_2^3,	9,	$18\zeta_1\zeta_2^2$,	$[\frac{1}{z_1 z_2^4}]$,	-17
z_2^2,	6,	$18\zeta_1\zeta_2^3$,	$[\frac{1}{z_1 z_2^3}]$,	-14
z_2,	3,	$18\zeta_1\zeta_2^4$,	$[\frac{1}{z_1 z_2^2}]$,	-11
1,	0,	$18\zeta_1\zeta_2^5$,	$[\frac{1}{z_1 z_2}]$,	-8

4.3 3 変数の unimodal singularities

4.3.1 特異点 $P_8 = z_1^2 z_3 + z_2^3 + z_2^2 z_3 + z_3^3$ に関する計算 ($a = 1$)

- 重み $(1, 1, 1)$, 擬次数 3
- $I = \langle 2z_1 z_3, 3z_2 + 2z_2 z_3, z_1^2 + z_2^2 + 3z_3^2 \rangle$, 擬次数 $(2, 2, 2)$
- $\mathrm{Gb} = \{z_3^4, -2z_2 z_3^2 + 9z_3^9, 3z_2^2 + 2z_2 z_3, z_1 z_3, 3z_1^2 - 2z_2 z_3 + 9z_3^2\}$
- $\mathrm{Jac} = 744 z_3^3$, 擬次数 3
- ポアンカレ多項式 $t^3 + 3t^2 + 3t + 1$
- $\eta = \frac{1}{3}[\frac{1}{z_1 z_2 z_3^4} + \frac{9}{2}\frac{1}{z_1 z_2^2 z_3^3} - 3\frac{1}{z_1 z_2^3 z_3} + 2\frac{1}{z_1 z_2^4 z_3} - \frac{31}{2}\frac{1}{z_1^3 z_2^2 z_3}]$, 擬次数 -6

単項基底	擬次数	h_j	双対基底	擬次数
$z_1 z_2$,	2,	$-6\zeta_1$,	$[\frac{1}{z_1^2 z_2^2 z_3}]$,	-5
z_1,	1,	$-6\zeta_1\zeta_2$,	$[\frac{1}{z_1^2 z_2 z_3}]$,	-4
$z_2 z_3$,	2,	$-4\zeta_2 + 18\zeta_3$,	$[\frac{1}{z_1 z_2^2 z_3^3} - \frac{2}{3}\frac{1}{z_1 z_2^3 z_3} + \frac{2}{3}\frac{1}{z_1^3 z_2 z_3}]$,	-5
z_2,	1,	$-4\zeta_2\zeta_3 + 18\zeta_3^2$,	$[\frac{1}{z_1 z_2^2 z_3}]$,	-4
z_3^3,	3,	93,	$[\frac{1}{z_1 z_2 z_3^4} + \frac{9}{2}\frac{1}{z_1 z_2^2 z_3^3} - 3\frac{1}{z_1 z_2^3 z_3} + 2\frac{1}{z_1 z_2^4 z_3} - \frac{31}{2}\frac{1}{z_1^3 z_2^2 z_3}]$,	-6
z_3^2,	2,	$18\zeta_2 + 12\zeta_3$,	$[\frac{1}{z_1 z_2 z_3^3} - 3\frac{1}{z_1^3 z_2 z_3}]$,	-5
z_3,	1,	$18\zeta_2\zeta_3 + 12\zeta_3^2$,	$[\frac{1}{z_1 z_2 z_3^2}]$,	-4
1,	0,	$93\zeta_3^3$,	$[\frac{1}{z_1 z_2 z_3}]$,	-3

4.3.2 特異点 $Q_{14} = z_1^3 + z_1^2 z_2^2 + z_2^6 + z_2 z_3^2$ に関する計算 $(a = 1)$

- 重み $(4, 2, 5)$, 擬次数 12
- $I = \langle 3z_1^2 + 2z_1 z_2^2, 2z_1^2 z_2 + 6z_2^5 + z_3^2, 2z_2 z_3 \rangle$, 擬次数 $(8, 10, 7)$
- $\mathrm{Gb} = \{z_3^3, z_2 z_3, z_2^8, z_1 z_3^2 + 31 z_2^7, -4z_1 z_2^3 + 18 z_2^5 + 3z_3^2, 3z_1^2 + 2z_1 z_2^2\}$
- $\mathrm{Jac} = 2604 z_2^7$, 擬次数 14
- ポアンカレ多項式 $t^{14} + t^{12} + 2t^{10} + t^9 + 2t^8 + 2t^6 + t^5 + 2t^4 + t^2 + 1$
- $\eta = \frac{1}{186}[\frac{1}{z_1 z_2^8 z_3} - 31\frac{1}{z_1^2 z_2 z_3^3} + \frac{9}{2}\frac{1}{z_1^2 z_2^6 z_3} - 3\frac{1}{z_1^3 z_2^4 z_3} + 2\frac{1}{z_1^4 z_2^2 z_3}]$, 擬次数 -25

単項基底	擬次数	h_j	双対基底	擬次数
$z_1 z_2^2$,	8,	$-8\zeta_1\zeta_2 + 36\zeta_2^3$,	$[\frac{1}{z_1^2 z_2^3 z_3} - \frac{2}{3}\frac{1}{z_1^3 z_2 z_3}]$,	-19
$z_1 z_2$,	6,	$-8\zeta_1\zeta_2^2 + 36\zeta_2^4$,	$[\frac{1}{z_1^2 z_2^2 z_3}]$,	-17
$z_1 z_3$,	9,	$-6\zeta_3$,	$[\frac{1}{z_1^2 z_2 z_3^2}]$,	-20
z_1,	4,	$-6\zeta_3^2$,	$[\frac{1}{z_1^2 z_2 z_3}]$,	-15
z_2^7,	14,	186,	$[\frac{1}{z_1 z_2^8 z_3} - 31\frac{1}{z_1^2 z_2 z_3^3} + \frac{9}{2}\frac{1}{z_1^2 z_2^6 z_3} - 3\frac{1}{z_1^3 z_2^4 z_3} + 2\frac{1}{z_1^4 z_2^2 z_3}]$,	-25
z_2^6,	12,	$186\zeta_2$,	$[\frac{1}{z_1 z_2^7 z_3} + \frac{9}{2}\frac{1}{z_1^2 z_2^5 z_3} - 3\frac{1}{z_1^3 z_2^8 z_3} + 2\frac{1}{z_1^4 z_2^2 z_3}]$,	-23
z_2^5,	10,	$186\zeta_2^2$,	$[\frac{1}{z_1 z_2^6 z_3} + \frac{9}{2}\frac{1}{z_1^2 z_2^4 z_3} - 3\frac{1}{z_1^3 z_2^2 z_3}]$,	-21
z_2^4,	8,	$36\zeta_1\zeta_2 + 24\zeta_2^3$,	$[\frac{1}{z_1 z_2^5 z_3}]$,	-19
z_2^3,	6,	$36\zeta_1\zeta_2^2 + 24\zeta_2^4$,	$[\frac{1}{z_1 z_2^4 z_3}]$,	-17
z_2^2,	4,	$186\zeta_2^5 + 27\zeta_3^2$,	$[\frac{1}{z_1 z_2^3 z_3}]$,	-15
z_2,	2,	$186\zeta_2^6$,	$[\frac{1}{z_1 z_2^2 z_3}]$,	-13
z_3^2,	10,	$-6\zeta_1 + 27\zeta_2^2$,	$[\frac{1}{z_1 z_2 z_3^3} + \frac{3}{4}\frac{1}{z_1^2 z_2^4 z_3} - \frac{1}{2}\frac{1}{z_1^3 z_2^2 z_3}]$,	-21
z_3,	5,	$-6\zeta_1\zeta_3$,	$[\frac{1}{z_1 z_2 z_3^2}]$,	-16
1,	0,	$186\zeta_2^7$,	$[\frac{1}{z_1 z_2 z_3}]$,	-11

4.3.3 特異点 $S_{14} = z_1^2 z_2 + z_1 z_2^3 + z_1 z_3^2 + z_2^5$ に関する計算 $(a = 1)$

- 重み $(4, 2, 3)$, 擬次数 10
- $I = \langle 2z_1 z_2 + z_2^3 + z_3^2, z_1^2 + 3z_1 z_2^2 + 5z_2^4, 2z_1 z_3 \rangle$, 擬次数 $(6, 8, 7)$
- $\mathrm{Gb} = \{-z_3^5, -z_2 z_3^3, z_2^3 z_3 + z_3^3, 3z_2^5 - z_2^2 z_3^2, z_1 z_3, 2z_1 z_2 + z_2^3 + z_3^2, 2z_1^2 + 7z_2^4 - 3z_2 z_3^2\}$
- $\mathrm{Jac} = 140 z_3^4$, 擬次数 12
- ポアンカレ多項式 $t^12 + t^{10} + t^9 + 2t^8 + t^7 + 2t^6 + t^5 + 2t^4 + t^3 + t^2 + 1$
- $\eta = [\frac{1}{z_1 z_2 z_3^5} - \frac{1}{z_1 z_2^4 z_3^3} - \frac{1}{3}\frac{1}{z_1 z_2^7 z_3} + \frac{2}{3}\frac{1}{z_1^2 z_2^5 z_3} - \frac{1}{3}\frac{1}{z_1^3 z_2^3 z_3} - \frac{7}{3}\frac{1}{z_1^4 z_2 z_3}]$, 擬次数 -21

単項基底	擬次数	h_j	双対基底	擬次数
z_1,	4,	$15\zeta_2^4-5\zeta_2\zeta_3^2$,	$[\frac{1}{z_1^2z_2z_3}]$,	-13
z_2^4,	8,	$15\zeta_1$,	$[\frac{1}{z_1z_2^5z_3}-\frac{1}{2}\frac{1}{z_1^2z_2^3z_3}-\frac{7}{2}\frac{1}{z_1^3z_2z_3}]$,	-17
z_2^3,	6,	$-\frac{15}{2}\zeta_2^3-\frac{15}{2}\zeta_3^2$,	$[\frac{1}{z_1z_2^4z_3}-\frac{1}{2}\frac{1}{z_1^2z_2^2z_3}]$,	-15
$z_2^2z_3^2$,	10,	$-10\zeta_2$,	$[\frac{1}{z_1z_2^3z_3^3}+\frac{1}{3}\frac{1}{z_1z_2^6z_3}-\frac{2}{3}\frac{1}{z_1^2z_2^4z_3}+\frac{1}{3}\frac{1}{z_1^3z_2^2z_3}]$,	-19
$z_2^2z_3$,	7,	$-10\zeta_2\zeta_3$	$[\frac{1}{z_1z_2^3z_3^2}]$,	-16
z_2^2,	4,	$-10\zeta_2\zeta_3^2$,	$[\frac{1}{z_1z_2^3z_3}]$,	-13
$z_2z_3^2$,	8,	$-5\zeta_1-10\zeta_2^2$,	$[\frac{1}{z_1z_2^2z_3^3}-\frac{1}{2}\frac{1}{z_1^2z_2^3z_3}+\frac{3}{2}\frac{1}{z_1^3z_2z_3}]$,	-17
z_2z_3,	5,	$-10\zeta_2^2\zeta_3$,	$[\frac{1}{z_1z_2^2z_3^2}]$,	-14
z_2,	2,	$-10\zeta_2^2\zeta_3^2$,	$[\frac{1}{z_1z_2^2z_3}]$,	-11
z_3^4,	12,	10,	$[\frac{1}{z_1z_2z_3^5}-\frac{1}{z_1z_2^4z_3^3}-\frac{1}{3}\frac{1}{z_1z_2^7z_3}+\frac{2}{3}\frac{1}{z_1^2z_2^5z_3}$	
			$-\frac{1}{3}\frac{1}{z_1^3z_2^3z_3}-\frac{7}{3}\frac{1}{z_1^4z_2z_3}]$,	-21
z_3^3,	9,	$10\zeta_3$,	$[\frac{1}{z_1z_2z_3^4}-\frac{1}{z_1z_2^4z_3^2}]$,	-18
z_3^2,	6,	$-\frac{15}{2}\zeta_2^3+\frac{5}{2}\zeta_3^2$,	$[\frac{1}{z_1z_2z_3^3}-\frac{1}{2}\frac{1}{z_1^2z_2^2z_3}]$,	-15
z_3,	3,	$10\zeta_3^3$,	$[\frac{1}{z_1z_2z_3^2}]$,	-12
1,	0,	$10\zeta_3^4$,	$[\frac{1}{z_1z_2z_3}]$,	-9

4.3.4 特異点 $U_{14}=z_1^3+z_1z_3^3+z_2^3+2z_2z_3^3$ に関する計算 $(a=2)$

- 重み $(3,3,2)$, 擬次数 9
- $I=\langle 3z_1^2+z_3^3, 3z_2^2+2z_3^3, 3z_1z_3^2+6z_2z_3^2\rangle$, 擬次数 $(6,6,7)$
- $\mathrm{Gb}=\{z_3^5, 3z_2^2+2z_3^3, z_1z_3^2+2z_2z_3^2, 3z_1^2+z_3^3\}$
- $\mathrm{Jac}=882z_2z_3^4$, 擬次数 11
- ポアンカレ多項式 $t^{11}+t^9+2t^8+t^7+2t^6+2t^5+t^4+2t^3+t^2+1$
- $\eta=\frac{1}{63}[\frac{1}{z_1z_2^2z_3^5}-\frac{2}{3}\frac{1}{z_1z_2^4z_3^2}-2\frac{1}{z_1^2z_2z_3^5}+\frac{4}{3}\frac{1}{z_1^2z_2^3z_3^2}-\frac{1}{3}\frac{1}{z_1^3z_2^2z_3^2}+\frac{2}{3}\frac{1}{z_1^4z_2z_3^2}]$, 擬次数 -19

単項基底	擬次数	h_j	双対基底	擬次数
$z_1z_2z_3$,	8,	$27\zeta_1+54\zeta_2$,	$[\frac{1}{z_1^2z_2^2z_3^2}]$,	-16
z_1z_2,	6,	$27\zeta_1\zeta_3+54\zeta_2\zeta_3$,	$[\frac{1}{z_1^2z_2^2z_3}]$,	-14
z_1z_3,	5,	$27\zeta_1\zeta_2-36\zeta_3^3$,	$[\frac{1}{z_1^2z_2z_3^2}]$,	-13
z_1,	3,	$27\zeta_1\zeta_2\zeta_3-36\zeta_3^4$,	$[\frac{1}{z_1^2z_2z_3}]$,	-11
$z_2z_3^4$,	11,	63,	$[\frac{1}{z_1z_2^2z_3^5}-\frac{2}{3}\frac{1}{z_1z_2^4z_3^2}-2\frac{1}{z_1^2z_2z_3^5}+\frac{4}{3}\frac{1}{z_1^2z_2^3z_3^2}$ $-\frac{1}{3}\frac{1}{z_1^3z_2^2z_3^2}+\frac{2}{3}\frac{1}{z_1^4z_2z_3^2}]$,	-19
$z_2z_3^3$,	9,	$63\zeta_3$,	$[\frac{1}{z_1z_2^2z_3^4}-\frac{2}{3}\frac{1}{z_1z_2^4z_3}-2\frac{1}{z_1^2z_2z_3^4}+\frac{4}{3}\frac{1}{z_1^2z_2^3z_3}$ $-\frac{1}{3}\frac{1}{z_1^3z_2^2z_3}+\frac{2}{3}\frac{1}{z_1^4z_2z_3}]$,	-17
$z_2z_3^2$,	7,	$63\zeta_3^2$,	$[\frac{1}{z_1z_2^2z_3^3}-2\frac{1}{z_1^2z_2z_3^3}]$,	-15
z_2z_3,	5,	$54\zeta_1\zeta_2-9\zeta_3^3$,	$[\frac{1}{z_1z_2^2z_3^2}]$,	-13
z_2,	3,	$54\zeta_1\zeta_2\zeta_3-9\zeta_3^4$,	$[\frac{1}{z_1z_2^2z_3}]$,	-11
z_3^4,	8,	$-36\zeta_1-9\zeta_2$,	$[\frac{1}{z_1z_2z_3^5}-\frac{2}{3}\frac{1}{z_1z_2^3z_3^2}-\frac{1}{3}\frac{1}{z_1^3z_2z_3^2}]$,	-16
z_3^3,	6,	$-36\zeta_1\zeta_3-9\zeta_2\zeta_3$,	$[\frac{1}{z_1z_2z_3^4}-\frac{2}{3}\frac{1}{z_1z_2^3z_3}-\frac{1}{3}\frac{1}{z_1^3z_2z_3}]$,	-14
z_3^2,	4,	$63\zeta_2\zeta_3^2$,	$[\frac{1}{z_1z_2z_3^3}]$,	-12
z_3,	2,	$63\zeta_2\zeta_3^3$,	$[\frac{1}{z_1z_2z_3^2}]$,	-10
1,	0,	$63\zeta_2\zeta_3^4$,	$[\frac{1}{z_1z_2z_3}]$,	-8

4.3.5 特異点 $V_{15}=z_1^4+z_1^2z_2^2+z_1z_3^2+z_2^4+z_2z_3^2$ に関する計算 $(a=b=1)$

- 重み $(2,2,3)$, 擬次数 8
- $I=\langle 4z_1^3+2z_1z_2^2+z_3^2, 2z_1^2z_2+4z_2^3+z_3^2, 2z_1z_3+2z_2z_3\rangle$, 擬次数 $(6,6,5)$
- $\mathrm{Gb}=\{z_3^3, z_2^3z_3, z_2^5, z_1z_3+z_2z_3, -2z_1z_2^3+z_2z_3^2, 2z_1^2z_2+4z_2^3+z_3^2, 4z_1^3+2z_1z_2^2+z_3^2\}$
- $\mathrm{Jac}=-360z_2^2z_3^2$, 擬次数 10
- ポアンカレ多項式 $t^{10}+2t^8+t^7+3t^6+t^5+3t^4+t^3+2t^2+1$
- $\eta=\frac{1}{24}[\frac{1}{z_1z_2^3z_3^3}-\frac{1}{z_1^2z_2^2z_3^3}+\frac{1}{2}\frac{1}{z_1^2z_2^5z_3}+\frac{1}{z_1^3z_2z_3^3}-\frac{1}{2}\frac{1}{z_1^3z_2^4z_3}-\frac{1}{2}\frac{1}{z_1^4z_2^3z_3}+\frac{1}{2}\frac{1}{z_1^5z_2^2z_3}]$, 擬次数 -17

単項基底	擬次数	h_j	双対基底	擬次数
z_1^2,	4,	$24\zeta_1\zeta_2^2 - 12\zeta_3^2$,	$[\frac{1}{z_1^3 z_2 z_3}]$,	-11
$z_1 z_2^2$,	6,	$24\zeta_1^2 + 24\zeta_1\zeta_2$,	$[\frac{1}{z_1^2 z_2^3 z_3} - \frac{1}{2}\frac{1}{z_1^4 z_2 z_3}]$,	-13
$z_1 z_2$,	4,	$24\zeta_1\zeta_2^2 - 48\zeta_2^3 - 12\zeta_3^2$,	$[\frac{1}{z_1^2 z_2^2 z_3}]$,	-11
z_1,	2,	$-48\zeta_2^4$,	$[\frac{1}{z_1^2 z_2 z_3}]$,	-9
z_2^4,	8,	$-48\zeta_1 - 48\zeta_2$,	$[\frac{1}{z_1 z_2^5 z_3} - 2\frac{1}{z_1^3 z_2^3 z_3} + \frac{1}{z_1^5 z_2 z_3}]$,	-15
z_2^3,	6,	$-48\zeta_1\zeta_2 - 48\zeta_2^2$,	$[\frac{1}{z_1 z_2^4 z_3} - 2\frac{1}{z_1^3 z_2^2 z_3}]$,	-13
$z_2^2 z_3^2$,	10,	-24,	$[\frac{1}{z_1 z_2^3 z_3^3} - \frac{1}{z_1^2 z_2^2 z_3^3} + \frac{1}{2}\frac{1}{z_1^2 z_2^5 z_3} + \frac{1}{z_1^3 z_2 z_3^3}$ $-\frac{1}{2}\frac{1}{z_1^3 z_2^4 z_3} - \frac{1}{2}\frac{1}{z_1^4 z_2^3 z_3} + \frac{1}{2}\frac{1}{z_1^5 z_2^2 z_3}]$,	-17
$z_2^2 z_3$,	7,	$-24\zeta_3$,	$[\frac{1}{z_1 z_2^3 z_3^2} - \frac{1}{z_1^2 z_2^2 z_3^2} + \frac{1}{z_1^3 z_2 z_3^2}]$,	-14
z_2^2,	4,	$-48\zeta_2^3 - 24\zeta_3^2$,	$[\frac{1}{z_1 z_2^3 z_3}]$,	-11
$z_2 z_3^2$,	8,	$-24\zeta_2$,	$[\frac{1}{z_1 z_2^2 z_3^3} - \frac{1}{z_1^2 z_2 z_3^3} + \frac{1}{2}\frac{1}{z_1^2 z_2^4 z_3} - \frac{1}{2}\frac{1}{z_1^3 z_2^3 z_3}$ $-\frac{1}{2}\frac{1}{z_1^4 z_2^2 z_3} + \frac{1}{2}\frac{1}{z_1^5 z_2 z_3}]$,	-15
$z_2 z_3$,	5,	$-24\zeta_2\zeta_3$,	$[\frac{1}{z_1 z_2^2 z_3^2} - \frac{1}{z_1^2 z_2 z_3^2}]$,	-12
z_2,	2,	$-48\zeta_2^4 - 24\zeta_2\zeta_3^2$,	$[\frac{1}{z_1 z_2^2 z_3}]$,	-9
z_3^2,	6,	$-12\zeta_1^2 - 12\zeta_2\zeta_1 - 24\zeta_2^2$,	$[\frac{1}{z_1 z_2 z_3^3} - \frac{1}{2}\frac{1}{z_1^3 z_2^2 z_3} - \frac{1}{4}\frac{1}{z_1^4 z_2 z_3}]$,	-13
z_3,	3,	$-24\zeta_2^2\zeta_3$,	$[\frac{1}{z_1 z_2 z_3^2}]$,	-10
1,	0,	$-24\zeta_2^2\zeta_3^2$,	$[\frac{1}{z_1 z_2 z_3}]$,	-7

4.3.6 特異点 $Q_{10} = z_1^3 + z_2^4 + z_2 z_3^2$ に関する計算

- 重み $(8, 6, 9)$, 擬次数 24
- $I = \langle 3z_1^2, 4z_2^3 + z_3^2, 2z_2 z_3 \rangle$, 擬次数 $(16, 18, 15)$
- $\mathrm{Gb} = \{z_1^2, 4z_2^3 + z_3^2, z_2 z_3\}$
- $\mathrm{Jac} = -60 z_1 z_3^2$, 擬次数 26
- ポアンカレ多項式 $t^{26} + t^{20} + t^{18} + t^{17} + t^{14} + t^{12} + t^9 + t^8 + t^6 + 1$
- $\eta = -\frac{1}{6}[\frac{1}{z_1^2 z_2 z_3^3} - \frac{1}{4}\frac{1}{z_1^2 z_2^4 z_3}]$, 擬次数 -49

単項基底	擬次数	h_j	双対基底	擬次数
$z_1 z_2^2$,	20,	$24\zeta_2$,	$[\frac{1}{z_1^2 z_2^3 z_3}]$,	-43
$z_1 z_2$,	14,	$24\zeta_2^2$,	$[\frac{1}{z_1^2 z_2^2 z_3}]$,	-37
$z_1 z_3^2$,	26,	-6,	$[\frac{1}{z_1^2 z_2 z_3^3} - \frac{1}{4}\frac{1}{z_1^2 z_2^4 z_3}]$,	-49
$z_1 z_3$,	17,	$-6\zeta_3$,	$[\frac{1}{z_1^2 z_2 z_3^2}]$,	-40
z_1,	8,	$-6\zeta_3^2$,	$[\frac{1}{z_1^2 z_2 z_3}]$,	-31
z_2^2,	12,	$24\zeta_1\zeta_2$,	$[\frac{1}{z_1 z_2^3 z_3}]$,	-35
z_2,	6,	$24\zeta_1\zeta_2^2$,	$[\frac{1}{z_1 z_2^2 z_3}]$,	-29
z_3^2,	18,	$-6\zeta_1$,	$[\frac{1}{z_1 z_2 z_3^3} - \frac{1}{4}\frac{1}{z_1 z_2^4 z_3}]$,	-41
z_3,	9,	$-6\zeta_1\zeta_3$,	$[\frac{1}{z_1 z_2 z_3^2}]$,	-32
1,	0,	$-6\zeta_1\zeta_3^2$,	$[\frac{1}{z_1 z_2 z_3}]$,	-23

4.3.7 特異点 $Q_{11} = z_1^3 + z_2^2 z_3 + z_1 z_3^3$ に関する計算

- 重み $(6, 7, 4)$, 擬次数 18
- $I = \langle 3z_1^2 + z_3^3, 2z_2 z_3, 3z_1 z_3^2 + z_2^2 \rangle$, 擬次数 $(12, 11, 14)$
- $\mathrm{Gb} = \{z_3^6, z_2 z_3, z_2^3, 3z_1 z_3^2 + z_2^2, -z_1 z_2^2 + z_3^5, 3z_1^2 + z_3^3\}$
- $\mathrm{Jac} = -66 z_3^5$, 擬次数 20
- ポアンカレ多項式 $t^{20} + t^{16} + t^{14} + t^{13} + t^{12} + t^{10} + t^8 + t^7 + t^6 + t^4 + 1$
- $\eta = -\frac{1}{6}[\frac{1}{z_1 z_2 z_3^6} - \frac{1}{3}\frac{1}{z_1^3 z_2 z_3^3}]$, 擬次数 -37

単項基底	擬次数	h_j	双対基底	擬次数
$z_1 z_2$,	13,	$-6\zeta_2$,	$[\frac{1}{z_1^2 z_2^2 z_3}]$,	-30
$z_1 z_3$,	10,	$18\zeta_1\zeta_3$,	$[\frac{1}{z_1^2 z_2 z_3^2}]$,	-27
z_1,	6,	$-6\zeta_2^2$,	$[\frac{1}{z_1^2 z_2 z_3}]$,	-23
z_2^2,	14,	$-6\zeta_1$,	$[\frac{1}{z_1 z_2^3 z_3} - \frac{1}{3}\frac{1}{z_1^2 z_2 z_3^3}]$,	-31
z_2,	7,	$-6\zeta_1\zeta_2$,	$[\frac{1}{z_1 z_2^2 z_3}]$,	-24
z_3^5,	20,	-6,	$[\frac{1}{z_1 z_2 z_3^6} - \frac{1}{3}\frac{1}{z_1^3 z_2 z_3^3}]$,	-37
z_3^4,	16,	$-6\zeta_3$,	$[\frac{1}{z_1 z_2 z_3^5} - \frac{1}{3}\frac{1}{z_1^3 z_2 z_3^2}]$,	-33
z_3^3,	12,	$-6\zeta_3^2$,	$[\frac{1}{z_1 z_2 z_3^4} - \frac{1}{3}\frac{1}{z_1^3 z_2 z_3}]$,	-29
z_3^2,	8,	$-6\zeta_3^3$,	$[\frac{1}{z_1 z_2 z_3^3}]$,	-25
z_3,	4,	$-6\zeta_3^4$,	$[\frac{1}{z_1 z_2 z_3^2}]$,	-21
1,	0,	$-6\zeta_3^5$,	$[\frac{1}{z_1 z_2 z_3}]$,	-17

4.3.8 特異点 $Q_{12} = z_1^3 + z_2^5 + z_2 z_3^2$ に関する計算

- 重み $(5, 3, 6)$, 擬次数 15
- $I = \langle 3z_1^2, 5z_2^4 + z_3^2, 2z_2 z_3 \rangle$, 擬次数 $(10, 12, 9)$
- $\mathrm{Gb} = \{z_3^3, z_2 z_3, 5z_2^4 + z_3^2, z_1^2\}$
- $\mathrm{Jac} = -72 z_1 z_3^2$, 擬次数 17
- ポアンカレ多項式 $t^{17} + t^{14} + t^{12} + 2t^{11} + t^9 + t^8 + 2t^6 + t^5 + t^3 + 1$
- $\eta = -\frac{1}{6}[\frac{1}{z_1^2 z_2 z_3^3} - \frac{1}{5}\frac{1}{z_1^2 z_2^5 z_3}]$, 擬次数 -31

単項基底	擬次数	h_j	双対基底	擬次数
$z_1z_2^3$,	14,	$30\zeta_2$,	$[\frac{1}{z_1^2z_2^4z_3}]$,	-28
$z_1z_2^2$,	11,	$30\zeta_2^2$,	$[\frac{1}{z_1^2z_2^3z_3}]$,	-25
z_1z_2,	8,	$30\zeta_2^3$,	$[\frac{1}{z_1^2z_2^2z_3}]$,	-22
$z_1z_3^2$,	17,	-6,	$[\frac{1}{z_1^2z_2z_3^3} - \frac{1}{5}\frac{1}{z_1^2z_2^5z_3}]$,	-31
z_1z_3,	11,	$-6\zeta_3$,	$[\frac{1}{z_1^2z_2z_3^2}]$,	-25
z_1,	5,	$-6\zeta_3^2$,	$[\frac{1}{z_1^2z_2z_3}]$,	-19
z_2^3,	9,	$30\zeta_1\zeta_2$,	$[\frac{1}{z_1z_2^4z_3}]$,	-23
z_2^2,	6,	$30\zeta_1\zeta_2^2$,	$[\frac{1}{z_1z_2^3z_3}]$,	-20
z_2,	3,	$30\zeta_1\zeta_2^3$,	$[\frac{1}{z_1z_2^2z_3}]$,	-17
z_3^2,	12,	$-6\zeta_1$,	$[\frac{1}{z_1z_2z_3^3} - \frac{1}{5}\frac{1}{z_1z_2^5z_3}]$,	-26
z_3,	6,	$-6\zeta_1\zeta_3$,	$[\frac{1}{z_1z_2z_3^2}]$,	-20
1,	0,	$-6\zeta_1\zeta_3^2$,	$[\frac{1}{z_1z_2z_3}]$,	-14

4.3.9 特異点 $S_{11} = z_1^4 + z_1z_2^2 + z_2z_3^2$ に関する計算

- 重み $(4,6,5)$, 擬次数 16
- $I = \langle 4z_1^3 + z_2^2, 2z_1z_2 + z_3^2, 2z_2z_3 \rangle$, 擬次数 $(12,10,11)$
- $\mathrm{Gb} = \{z_3^3, z_2z_3, z_2^4, 2z_1z_2 + z_3^2, -2z_1^2z_3^2 + z_2^3, 4z_1^3 + z_2^2\}$
- $\mathrm{Jac} = -44z_2^3$, 擬次数 18
- ポアンカレ多項式 $t^{18} + t^{14} + t^{13} + t^{12} + t^{10} + t^9 + t^8 + t^6 + t^5 + t^4 + 1$
- $\eta = -\frac{1}{4}[\frac{1}{z_1z_2^4z_3} + \frac{1}{2}\frac{1}{z_1^3z_2z_3^3} - \frac{1}{4}\frac{1}{z_1^4z_2^2z_3}]$, 擬次数 -33

単項基底	擬次数	h_j	双対基底	擬次数
$z_1^2z_3$,	13,	$-8\zeta_3$,	$[\frac{1}{z_1^3z_2z_3^2}]$,	-28
z_1^2,	8,	$-8\zeta_3^2$,	$[\frac{1}{z_1^3z_2z_3}]$,	-23
$z_1z_3^2$,	14,	$-8\zeta_1$,	$[\frac{1}{z_1^2z_2z_3^3} - \frac{1}{2}\frac{1}{z_1^3z_2^2z_3}]$,	-29
z_1z_3,	9,	$-8\zeta_1\zeta_3$,	$[\frac{1}{z_1^2z_2z_3^2}]$,	-24
z_1,	4,	$-8\zeta_1\zeta_3^2$,	$[\frac{1}{z_1^2z_2z_3}]$,	-19
z_2^3,	18,	-4,	$[\frac{1}{z_1z_2^4z_3} + \frac{1}{2}\frac{1}{z_1^3z_2z_3^3} - \frac{1}{4}\frac{1}{z_1^4z_2^2z_3}]$,	-33
z_2^2,	12,	$-4\zeta_2$,	$[\frac{1}{z_1z_2^3z_3} - \frac{1}{4}\frac{1}{z_1^4z_2z_3}]$,	-27
z_2,	6,	$-4\zeta_2^2$,	$[\frac{1}{z_1z_2^2z_3}]$,	-21
z_3^2,	10,	$-8\zeta_1^2$,	$[\frac{1}{z_1z_2z_3^3} - \frac{1}{2}\frac{1}{z_1^2z_2^2z_3}]$,	-25
z_3,	5,	$-8\zeta_1^2\zeta_3$,	$[\frac{1}{z_1z_2z_3^2}]$,	-20
1,	0,	$-4\zeta_2^3$,	$[\frac{1}{z_1z_2z_3}]$,	-15

4.3.10 特異点 $S_{12} = z_1^2z_2 + z_2^2z_3 + z_1z_3^3$ に関する計算

- 重み $(4,5,3)$, 擬次数 13
- $I = \langle 2z_1z_2 + z_3^3, z_1^2 + 2z_2z_3, 3z_1z_3^2 + z_2^2 \rangle$, 擬次数 $(9,8,10)$

- $\mathrm{Gb} = \{z_3^6, z_2 z_3^3, z_2^2 z_3, -2z_2^3 + 3z_3^5, 3z_1 z_3^2 + z_2^2, 2z_1 z_2 + z_3^3, z_1^2 + 2z_2 z_3\}$
- $\mathrm{Jac} = -78z_3^5$, 擬次数 15
- ポアンカレ多項式 $t^{15} + t^{12} + t^{11} + t^{10} + t^9 + t^8 + t^7 + t^6 + t^5 + t^4 + t^3 + 1$
- $\eta = -\frac{2}{13}[\frac{1}{z_1 z_2 z_3^6} + \frac{3}{2}\frac{1}{z_1 z_2^4 z_3} - \frac{1}{2}\frac{1}{z_1^2 z_2^2 z_3^3} + \frac{1}{z_1^4 z_2 z_3^2}]$, 擬次数 -27

単項基底	擬次数	h_j	双対基底	擬次数
$z_1 z_3$,	7,	$13\zeta_2\zeta_3$,	$[\frac{1}{z_1^2 z_2 z_3^2}]$,	-19
z_1,	4,	$13\zeta_2\zeta_3^2$,	$[\frac{1}{z_1^2 z_2 z_3}]$,	-16
z_2^2,	10,	$-\frac{13}{3}\zeta_2$,	$[\frac{1}{z_1 z_2^3 z_3} - \frac{1}{3}\frac{1}{z_1^2 z_2 z_3^3}]$,	-22
$z_2 z_3^2$,	11,	$13\zeta_1$,	$[\frac{1}{z_1 z_2^2 z_3^3} - 2\frac{1}{z_1^3 z_2 z_3^3}]$,	-23
$z_2 z_3$,	8,	$13\zeta_1\zeta_3$,	$[\frac{1}{z_1 z_2^2 z_3^2} - 2\frac{1}{z_1^3 z_2 z_3}]$,	-20
z_2,	5,	$-\frac{13}{3}\zeta_2^2$,	$[\frac{1}{z_1 z_2^2 z_3}]$,	-17
z_3^5,	15,	$-\frac{13}{2}$,	$[\frac{1}{z_1 z_2 z_3^6} + \frac{3}{2}\frac{1}{z_1 z_2^4 z_3} - \frac{1}{2}\frac{1}{z_1^2 z_2^2 z_3^3} + \frac{1}{z_1^4 z_2 z_3^2}]$,	-27
z_3^4,	12,	$-\frac{13}{2}\zeta_3$,	$[\frac{1}{z_1 z_2 z_3^3} - \frac{1}{2}\frac{1}{z_1^2 z_2^2 z_3^2} + \frac{1}{z_1^4 z_2 z_3}]$,	-24
z_3^3,	9,	$-\frac{13}{2}\zeta_3^2$,	$[\frac{1}{z_1 z_2 z_3^4} - \frac{1}{2}\frac{1}{z_1^2 z_2^2 z_3}]$,	-21
z_3^2,	6,	$-\frac{13}{2}\zeta_3^3$,	$[\frac{1}{z_1 z_2 z_3^3}]$,	-18
z_3,	3,	$-\frac{13}{2}\zeta_3^4$,	$[\frac{1}{z_1 z_2 z_3^2}]$,	-15
1,	0,	$-\frac{13}{2}\zeta_3^5$,	$[\frac{1}{z_1 z_2 z_3}]$,	-12

4.3.11 特異点 $U_{12} = z_1^3 + z_2^3 + z_3^4$ に関する計算

- 重み $(4,4,3)$, 擬次数 12
- $I = \langle 3z_1^2, 3z_2^2, 4z_3^3 \rangle$, 擬次数 $(8,8,9)$
- $\mathrm{Gb} = \{z_1^2, z_2^2, z_3^3\}$
- $\mathrm{Jac} = 432 z_1 z_2 z_3^2$, 擬次数 14
- ポアンカレ多項式 $t^{14} + t^{11} + 2t^{10} + t^8 + 2t^7 + t^6 + 2t^4 + t^3 + 1$
- $\eta = \frac{1}{36}[\frac{1}{z_1^2 z_2^2 z_3^3}]$, 擬次数 -25

単項基底	擬次数	h_j	双対基底	擬次数
$z_1z_2z_3^2$,	14,	36,	$[\frac{1}{z_1^2z_2^2z_3^3}]$,	-25
$z_1z_2z_3$,	11,	$36\zeta_3$,	$[\frac{1}{z_1^2z_2^2z_3^2}]$,	-22
z_1z_2,	8,	$36\zeta_3^2$,	$[\frac{1}{z_1^2z_2^2z_3}]$,	-19
$z_1z_3^2$,	10,	$36\zeta_2$,	$[\frac{1}{z_1^2z_2z_3^3}]$,	-21
z_1z_3,	7,	$36\zeta_2\zeta_3$,	$[\frac{1}{z_1^2z_2z_3^2}]$,	-18
z_1,	4,	$36\zeta_2\zeta_3^2$,	$[\frac{1}{z_1^2z_2z_3}]$,	-15
$z_2z_3^2$,	10,	$36\zeta_1$,	$[\frac{1}{z_1z_2^2z_3^3}]$,	-21
z_2z_3,	7,	$36\zeta_1\zeta_3$,	$[\frac{1}{z_1z_2^2z_3^2}]$,	-18
z_2,	4,	$36\zeta_1\zeta_3^2$,	$[\frac{1}{z_1z_2^2z_3}]$,	-15
z_3^2,	6,	$36\zeta_1\zeta_2$,	$[\frac{1}{z_1z_2z_3^3}]$,	-17
z_3,	3,	$36\zeta_1\zeta_2\zeta_3$,	$[\frac{1}{z_1z_2z_3^2}]$,	-14
1,	0,	$36\zeta_1\zeta_2\zeta_3^2$,	$[\frac{1}{z_1z_2z_3}]$,	-11

参考文献

[1] V. I. ARNOLD, S. M. GUSEIN-ZADE and A. N. VARCHENKO, Singularities of Differentiable Maps Volume *I*, Monographs in Mathematics Vol. 82, Birkhäuser, Boston, 1985.

[2] J. MILNOR and P. ORLIK, *Isolated singularities defined by weighted homogeneous polynomials*, Topology **9** (1970), 385–393.

[3] Y. NAKAMURA, *Construction of a system of differential operators as annihilators of a cohomology class – in connection with quasihomogeneous singularities–*, Josai Mathematical Monographs **2** (2000), 139–148.

[4] Y. NAKAMURA and S. TAJIMA, *Residue calculus with differential operators*, Kyushu J. of Math. **54** (2000), 127–138.

[5] M. NORO and T. TAKESHIMA, *Risa/Asir–a computer algebra system*, in Proc. Internat. Symp. on Symbolic and Algebraic Computation, eds P.S. Wang, ACM New York (1992), 387–396.

[6] K. SAITO, *Quasihomogene isolierte singularitäten von hyperflächen*, Invent. Math. **14** (1971), 123–142.

[7] K. SAITO, *Einfach-elliptische Singularitäten*, Invent. Math. **23** (1974), 289–325.

[8] S. TAJIMA, *Grothendieck duality and Hermite-Jacobi formula*, Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, Vol. 214, Finite or Infinite Dimensional Complex Analysis, eds J. Kajiwara, Z. Li and K.H.Shon, Marcel Dekker New York (2000), 503–509.

[9] S. TAJIMA, T. OAKU and Y. NAKAMURA, *Multidimensional local residues and holonomic D-modules*, Sûrikaiseki Kenkyûshokôyûroku, Kyoto Univ. **1033** (1998), 59–70.

[10] N. TAKAYAMA, *Kan: A system for computation in algebraic analysis* (1991–), (http://www. math. s. kobe-u. ac. jp).