数理解析研究所講究録
1171 巻 2000 年 21-35

The enveloping algebras and the rings of differential operators

落合啓之 (Hiroyuki Ochiai)

Department of Mathematics, Kyushu University

微分作用素環 D_X と Lie 環の展開環 $U(\mathfrak{g})$ との関係を述べる. 特に特性多様体と随伴多様体の関係を目標において関連する事柄をサーベイする.

1 基本となる準同型写像

この記事の中では, X を非特異連結代数多様体, G を連結代数群, とし, どちらも複素数体上で定義されているもののみを考える. ただし, 部分多様体 (subvariety) は特異であったり, 部分群は非連結だったりしうる.

$\mathcal{D}_X$ を X 上の微分作用素のなす環の層とし, $D_X=\Gamma(X, \mathcal{D}_X)$ で X 上の大域的な微分作用素のなす環を表す. やや紛らわしいが, 広く使われている習慣である. なお, 微分作用素はすべて線型で, 代数的に正則な係数のもののみをここでは考える. 以下そのことを断らない.

左 D_X 加群を単に D_X 加群と略記する習慣を採用する. $U(\mathfrak{g})$ 加群などもそう. 一方, 非可換環 $U(\mathfrak{g})$ の左イデアルと両側イデアルはいちいち区別して記述する.

1.1 作用素表現

G が X に作用しているとしよう. このとき G は自然に X 上の函数に作用する. すなわち, $g\in G$, $f\in \mathcal{O}_{X,x}$ に対し, $\rho(g)f\in \mathcal{O}_{gx}$ を $(\rho(g)f)(y)=f(g^{-1}y)$ と定める. 特に G は大域的に正則な関数全体 $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ へ作用する. この作用 ρ の微分 (無限小作用) を考えると, G の Lie 環 $\mathfrak{g}$ の元に対して, X 上のベクトル場が決まる. X 上のベクトル場のなす層を Θ_X と書くと,

$$d\rho : \mathfrak{g} \longrightarrow \Gamma(X, \Theta_X)$$

という写像が与えられるのである. より具体的に書けば

$$(d\rho(A)f)(y)=\frac{d}{dt}(\rho(e^{tA})f)(y)|_{t=0}=\frac{d}{dt}f(\exp(-tA)y)|_{t=0}, \qquad A\in \mathfrak{g}, f\in \mathcal{O}_{X,x}, y\in X$$

である. $d\rho$ は $\mathfrak{g}$ と Θ_X のそれぞれ自然な bracket 積に関して, Lie 環の準同型になる. Lie 環 $\mathfrak{g}$ の普遍展開環 (universal enveloping algebra, §3.1 で少し説明をする) を $U(\mathfrak{g})$ と書けば, $U(\mathfrak{g})$ の universality より,

$$\boxed{\psi_X : U(\mathfrak{g}) \longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{D}_X)}$$

という代数準同型が自然に与えられたことになる. これを作用素表現 (operator representation) と呼ぶ. 素朴に思いつく基本的な問題として, 次のようなものが考えられる.

- ψ_X の image や kernel はどうなるか？
- $U(\mathfrak{g})$ を利用して D_X を調べよ.
- D_X を利用して $U(\mathfrak{g})$ を調べよ.
- そして 2 つの環の間の関係を利用して $U(\mathfrak{g})$-module と D_X-module の間の関係を調べよ.

これらの問題について, 若干の解説をするのが今回の講演の目的である.

Remark 1.1 ≪ 不変微分作用素との関係 ≫ 不変微分作用素およびそれらのなす環についての話と今回の話との関係に簡単に触れておく.

上に定義した写像 ψ_X は自然な G の作用に関して G 準同型になっている. このことから特に G 不変元を G 不変元に写す：

$$Z(\mathfrak{g}) = U(\mathfrak{g})^G \longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{D}_X)^G.$$

即ち, $\mathfrak{g}$ の展開環 $U(\mathfrak{g})$ の中心 $Z(\mathfrak{g})$ というある意味でわかりやすい可換環から X 上の G 不変微分作用素環という幾何学的な環への代数準同型が得られる. この写像が全射のときに「*abstract Capelli* 問題が肯定的に解かれている」という *[5]*. この状況下では, 不変微分作用素は $Z(\mathfrak{g})$ の元で実現できる *(*$Z(\mathfrak{g})$ の像となっていることを, 雰囲気を出してこう言う*)* ことになり, 特に不変微分作用素環は可換になる. このような X はあまり多くないが, 古典的に重要な例を含んでいて応用上重要である. 例えば室氏の講演に出てきた対称行列の場合は $G = GL_n$, $X = Sym_n = \{n$ 次対称行列全体$\}$ であり, 大島氏の講演に出てきた正方行列の場合は $G = GL_n$, $X = M_n$ であり, ともに上の写像が全射になっている. また抽象的に全射であることを示すだけでなく, その具体形を書くことも応用上重要であって歴史のある問題であり, 現在も興味を持たれ進展している.

ここではこの問題にはこれ以上立ち入らない. ここで考えている問題は G 不変元を取る前の写像を考えていることを今一度思い出しておこう.

Example 1.2 G が X に作用している時, X は G のいくつかの軌道に分かれる. 軌道は *Zariski* 位相に関して局所閉である. *(Lie* 群の場合の無理数回転のようなことは生じない.) X が G の一つの軌道から成る時, X を G 等質空間 *(homogeneous)* という. 開軌道を持つ時に作用 (G, X) は概均質 *(prehomogeneous)* である, という. 開軌道は存在すればただ一つであり, 自動的に稠密になる. 逆に稠密な軌道が存在すればそれは開軌道である. 等質空間への作用は当然, 概均質である.

特に (G, X) が表現であって概均質の時, 概均質ベクトル空間という. (なぜか概均質線型空間とは呼ばない.) *Remark 1.1* で挙げた例は 2 つ共に概均質ベクトル空間である. 話が前後しているが, 線型空間 V に G が線形に作用しているものを G の表現, または G-加群 という. V の原点が G の一つの軌道となるから, *(*$\dim V = 0$ でないかぎり*)* 表現 V は等質空間ではない.

概均質な作用のもう一つの例は, 今回の集会のテーマのひとつであった「トーリック多様体」である. A 超幾何微分方程式をフーリエ変換したものはアフィントーリック多様体上での *operator* 表現の *tdo* 版であることに注意しておく.

1.2 ここで考える多様体

計算機代数で現在主に実装されている微分作用素環は Weyl algebra $\mathbb{C}[x_1,\ldots,x_n,\partial_1,\ldots,\partial_n]$ である．前節のストーリーとの関係で行くと，X をアフィン空間 $\mathbb{C}^n$ とした時の大域的微分作用素環 D_X が n 変数の Weyl algebra $\mathbb{C}[x_1,\ldots,x_n,\partial_1,\ldots,\partial_n]$ と同型である．（代数的な係数で議論していることに注意．くどいようだが．）

Weyl algebra は普通の order filtration (微分作用素の階数を見る filtration, Smith 氏の講演の用語によれば $(u,v)=(0,1)$ に対応する filtration) に関する各次数の部分空間の （$\mathbb{C}$ 線型空間としての) 次元が無限次元である．例えば，0 階の微分作用素，つまり掛け算作用素は多項式環 $\mathbb{C}[x_1,\ldots,x_n]$ であり，次元は無限である．一方，展開環の filtration(see, §3.1) では各次数の空間の次元は有限次元である．したがって，Weyl algebra は展開環にあまり近くないと推察される．

準同型 $\psi_X : U(\mathfrak{g}) \to D_X$ は展開環の k 次以下の元を k 階以下の微分作用素に写す．ψ_X がある意味で‘近い’ 2 つの環を結び付けているとしたら，大域的微分作用素環の各次数の成分は有限次元になっている状況が望ましかろう．X が (連結な) 射影多様体の場合は大域的な関数 $\Gamma(X,\mathcal{O}_X)=\mathbb{C}$ なので $U_0(\mathfrak{g})=\mathbb{C}$ という事実とうまく合致しているようである．この場合，大域的なベクトル場の全体 $\Gamma(X,\Theta_X)$ も有限次元である．典型的な例は射影空間 $\mathbf{P}^n$ や Grassmann 多様体 $\mathrm{Grass}(\mathbb{C}^n,p)$ などである．この 2 つの例を含むクラスを定義しよう．

Definition 1.3 G を *reductive*[1] な連結代数群とする．

- G の極大可解部分群を *Borel* 部分群という．B と記す．
- ある *Borel* 部分群を含む G の閉部分群を放物型部分群 *(parabolic subgroup)* という．P と記す．
- 完備な G 等質多様体の *isotropy* 部分群は放物型部分群である．完備な等質多様体を一般化された旗多様体 *(generalized flag variety)* という．これは定義から G/P と書ける．
- 特に *Borel* 部分群 B を用いて G/B と書ける等質空間を旗多様体 *(flag variety)*[2] という．

例えば $G=GL(n)$ の時には Borel や parabolic の例を絵で表すとこのようになる：

$$B=\left\{\begin{pmatrix} * & * & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * \end{pmatrix}\right\}, P=\left\{\begin{pmatrix} * & * & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & * & * \end{pmatrix}\right\}.$$

G が与えられた時，その Borel 部分群は互いに共役なので，旗多様体は各 G に対して本質的に一つしかない．また放物型部分群の共役類は G の Dynkin 図形の頂点の部分集合に対応している．特に

[1] 簡約，半単純 (semisimple) ならば reductive である．月並みであるが，半単純な例は SL_n, Sp_n, SO_n など，半単純でないが reductive な例は GL_n や代数トーラス ($\mathbb{C}^\times$ のいくつかの直積) などである．

[2] 逆に一般化された旗多様体を単に flag variety (あるいは partial flag variety) と呼び，旗多様体を full flag variety という流儀もある．

共役を除いて有限個しかない．特に極大放物型部分群は Dynkin 図形の頂点の個数 (= G の rank) だけある．

射影空間 $\mathbf{P}^{n-1}$ は $G = GL(n)$ としたときに等質空間になる．従って一般化された旗多様体の特別な場合である．isotropy 部分群 P は特別な形の極大放物型部分群

$$P = \{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL(n) \mid a \in M(1), b \in M(1, n-1), c \in M(n-1, 1), d \in M(n-1, n-1)\}$$

である．グラスマン多様体 Grass$(\mathbb{C}^n, p)$ でも事情は同じである． $\mathbb{C}^n$ の p 次元部分空間全体を Grass$(\mathbb{C}^n, p)$ と記す．射影空間は $\mathbf{P}^{n-1} = \mathrm{Grass}(\mathbb{C}^n, 1)$ であるからグラスマンの特別な場合である．$G = GL(n)$ は $X = \mathrm{Grass}(\mathbb{C}^n, p)$ に等質に作用し，一点の固定部分群 P は

$$P = \{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL(n) \mid a \in M(p), b \in M(p, n-p), c \in M(n-p, p), d \in M(n-p, n-p)\}$$

という（極大）放物型部分群になる．GL_n の極大放物型部分群は共役を除いてこれらですべてである．グラスマンには $GL(n)$ の部分群 $SL(n)$ や商群 $PGL(n)$ も等質に作用する．今の問題の場合はこの 3 つの作用の間には本質的な差はない．

さて, compact ではない G 等質空間で関連するものには次のようなものがある．

Definition 1.4 群 P の交換子群を $[P, P]$ と記す．G を半単純代数群とする．

- *Borel* 部分群 B を用いて $G/[B, B]$ と書かれる空間を *basic affine space* と呼ぶ．
- より一般に放物型部分群 P を用いて, $G/[P, P]$ と書かれる空間．これは G の有限次元既約表現の局所閉部分集合に G 多様体として実現することができる．また, 完備な等質空間 G/P の上の $P/[P, P]$ 主束の全空間でもある．なお $P/[P, P]$ は代数的トーラスである．

たとえば, G/P が射影空間 $\mathbf{P}^{n-1} = GL_n/P$ の場合, $G/[P, P]$ は $\mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ である．これをトーラス作用で割ったものが射影空間になっている．この構造は一般にも成り立っている：

$$\begin{array}{ccc} G/[B,B] & \to & G/B \\ \downarrow & & \downarrow \\ G/[P,P] & \to & G/P \end{array}$$

4 つの写像はどれも（全射で）ファイバー束になっている．横向きの写像は 2 つとも代数トーラスをファイバーとしている．右端の写像は P の Levi 部分群 L の旗多様体をファイバーとし, 左端の写像は L の半単純部分の basic affine space をファイバーとする．(see, Theorem 3.6)

先の例で交換子群を図示すると

$$[B, B] = \{ \begin{pmatrix} 1 & * & * & * & * & * \\ 0 & 1 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 1 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \}, [P, P] = \{ \left(\begin{array}{c|ccc|cc} 1 & * & * & * & * & * \\ \hline 0 & * & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * & * \\ \hline 0 & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & * & * \end{array}\right) \mid \det(..) = 1\}.$$

1.3 全射性

ここでは ψ_X がいつ全射になるかを述べる．

Example 1.5 ≪射影空間≫ $X = \mathbf{P}^{n-1}$ の場合．$(x_1 : \cdots : x_n)$ を斉次座標とする．大域的な関数は定数しかない，つまり $\Gamma(X, \mathcal{O}_X) = \mathbb{C}$ であることに注意．D_X は *algebra* として $\{x_i\partial_j \mid i, j = 1, \ldots, n\}$ で生成されている．ただしこれらの間には *Weyl algebra* の中で成り立つ通常の関係式 *(*たとえば $\partial_i x_i - x_i\partial_i = 1$ など*)* から導かれるもの以外に $x_1\partial_1 + \cdots + x_n\partial_n = 0$ という関係式が成り立っている．（より正確にいえば *Euler vector field* $x_1\partial_1 + \cdots + x_n\partial_n$ の生成する両側イデアルで *Weyl algebra* を割った環の中に実現されている．）

群の作用を考えよう．$G = GL(n)$ は X に自然に作用し，X は G 等質空間である．G の *Lie* 環は $\mathfrak{g} = M(n, \mathbb{C})$ である．行列単位 $E_{ij} \in \mathfrak{g}$ の ψ_X による像は

$$\psi_X(E_{ij}) = -x_j\partial_i$$

である．特に ψ_X が全射であることがわかる．

この現象はより一般に成り立つ．

Theorem 1.6 *(Brylinski, Theorem 3.8 of [2])* G を簡約代数群，X を完備な G 等質空間とする．このとき，$\psi_X : U(\mathfrak{g}) \to D_X$ は全射．

Example 1.7 ≪ 奇数次元の射影空間 ≫ $X = \mathbf{P}^n$, $n = 2m - 1$ とする．ここでは $G = Sp_{2m}(\mathbb{C}) \subset GL(2m, \mathbb{C})$ とする．この場合もやはり X は G 等質空間であり，定理の仮定が成り立つ．従って ψ_X は全射である．

ここで，個数（次元）を勘定しよう．X 上の大域的なベクトル場の次元は

$$\dim \Gamma(X, \Theta_X) = n^2 - 1 = 4m^2 - 1$$

である．一方，G あるいは $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}_{2m}$ の次元は $m(2m+1)$ である．$m \geq 2$ ならば $4m^2 - 1 > m(2m+1)$ なので，1 階の微分作用素でも展開環の 1 階の元では実現できず，高階の元によって初めて実現されているものがある．別の言い方をすれば，シンボルの段階では全射性を見て取ることができない．

あとの節のために定理から従う自明な系を述べておこう．記号を用意する．$I_X = \ker \psi_X$ と定めると，I_X は $U(\mathfrak{g})$ の両側イデアルになる．$U(\mathfrak{g})$ 加群 M に両側イデアル I_X が自明に作用するとは $am = 0$ for all $a \in I_X$, $m \in M$ が成り立つことと定義する．

Corollary 1.8 上の定理の状況で，アーベル圏の同値

$$\{D_X \text{ 加群}\} \leftrightarrow \{U(\mathfrak{g}) \text{ 加群で } I_X \text{ が自明に作用する}\}$$

が成り立つ．

なお, Brylinski の定理の twisted version は仮定なしでは成立しない.

Theorem 1.9 $X = G/P$ とする. 次の 2 つの仮定のどちらかが成り立つ時, *twisted version*

$$\psi_\lambda : U(\mathfrak{g}) \longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{D}_\lambda)$$

は全射になる.

- *(Beilinson-Bernstein, Brylinski-Kashiwara, Theorem III.3.2 of [8], Proposition I.5.5 of [1])* $X = G/B$ の時.
- *(Proposition I.5.6 of [1])* $\lambda + \rho_l$ が *dominant* のとき.

ウエイト λ が dominant であるとは正ルート α に対して $\langle \alpha^\vee, \lambda \rangle \neq -1, -2, \ldots$ となることと定める.

Remark 1.10 *(Borho, Remark I.5.7 of [1])* $X = G/P$ で $\lambda + \rho_l$ が *dominant* でない時は, 全射でない例がある. 例えば, $G = Sp_4 \subset GL(4)$ でそのような反例がある. これは *moment* 写像が双有理でないことと密接に関係している.

Brylinski の定理は, moment 写像の観点からすれば moment 写像が双有理でなくても ψ_X が全射になることを述べており, 驚くべきことである. この "驚き" がアルゴリズム的な難しさに反映するかどうかはわからない. (この問いは誰も考えていないように思われる.)

さて、以上で ψ_X の像についてわかったので, 次に ψ_X の kernel I_X を調べよう.

2 kernel の記述

2.1 局所的な考察

X を n 次元連結非特異多様体とする. $\mathcal{B}_{x|X} = H^n_{[\{x\}]}(\mathcal{O}_X)$ を代数的局所コホモロジーの定める $\mathcal{D}_X$ 加群とする. 一点 x に台を持つデルタ関数の満たす D 加群である. これの大域版 $\Gamma(X, \mathcal{B}_{x|X}) = H^n_x(X, \mathcal{O}_X)$ を考える.

Lemma 2.1 *(Lemma 1.6 of [2])* $H^n_x(X, \mathcal{O}_X)$ は D_X*-module* として *faithful, cyclic.*

Lemma 2.2 *(Proposition 3.5 of [2])* 連結代数群 G が X に概均質 *(Example 1.2)* に作用しているとする. つまり X の開稠密部分集合で G 軌道となっているものが存在するとする. このとき, 開稠密軌道の元 x に対して $H^n_x(X, \mathcal{O}_X)$ を ψ_X を通じて $U(\mathfrak{g})$ 加群と見たものは誘導表現

$$U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{g}_x)} k_{\lambda_x}$$

と自然に同型である. ここで $G_x = \{g \in G \mid gx = x\}$ を x の固定部分群, $\mathfrak{g}_x = \{A \in \mathfrak{g} \mid Ax = 0\}$ をその *Lie* 環とすると, x における接空間は $\mathfrak{g}_x$ 加群として $T_xX \cong \mathfrak{g}/\mathfrak{g}_x$ と自然に同型になる. さらに最高次の外積 $\Lambda^{\dim X} T_xX$ は自然に 1 次元 $\mathfrak{g}_x$ 加群となるので, それの決める線形形式を $\lambda_x \in (\mathfrak{g}_x)^*$ と記す. $k_{\lambda_x} = \Lambda^{\dim X} T_xX$ と記す. これらは容易に計算可能なデータである.

この２つを合わせると

Theorem 2.3 *(Corollary 3.7 of [2])* $I_X := \ker(\psi_X : U(\mathfrak{g}) \to D_X)$ とする．*Lemma 2.2* の仮定の下で

$$I_X = \mathrm{Ann}_{U(\mathfrak{g})}(U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{g}_x)} k_{\lambda_x})$$

となる．ここで R 加群 M の *annihilator* を $\mathrm{Ann}_R(M) = \{r \in R \mid rm = 0, \forall m \in M\}$ と記した．

特に G を reductive, X を完備等質とすると，定理の仮定は満たされる．$X = G/P$ と書いた時，$\mathfrak{g}_x \cong \mathrm{Lie}(P) = \mathfrak{p}$ は放物型部分 Lie 環で，誘導表現 $U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{g}_x)} k_{\lambda_x}$ は「一般化された Verma 加群」と呼ばれ，良く調べられている $U(\mathfrak{g})$ 加群である．最高ウエイト λ_x はいわば $2\rho_P - 2\rho$ と書かれる．更に X が旗多様体のとき（すなわち isotropy subgroup P が Borel 部分群の時），この誘導表現は「Verma 加群」と呼ばれる．この時は最高ウエイトは $\lambda_x = -2\rho$ であり，この誘導表現は通常 $M(-\rho)$ と書かれるものである．$M(-\rho)$ は自明な無限小指標を持つ既約な Verma 加群であり，自明な無限小指標を持つ既約な Verma 加群は $M(-\rho)$ に限る．

2.2 無限小指標と tdo

展開環の中心の記述をあっさりと復習する．(詳しく説明し出すときりがないので，申し訳ないが.) $\mathfrak{g}$ を reductive な Lie 環とする．展開環 $U(\mathfrak{g})$ の中心を $Z(\mathfrak{g})$ と書く．$\mathfrak{g}$ の中心ではないことに注意．$ZU(\mathfrak{g})$ と書くのが正確であろうが歴史的な事情により $Z(\mathfrak{g})$ と書くことが多い．$\mathfrak{g}$ の Cartan 部分環を $\mathfrak{h}$ とし，Weyl 群を W とする．$\mathfrak{h}$ の展開環 $U(\mathfrak{h})$ の W 不変元全体を $U(\mathfrak{h})^W$ と書くと $Z(\mathfrak{g})$ は $U(\mathfrak{h})^W$ と algebra として標準的に同型である (Harish-Chandra 同型)．$\mathfrak{h}$ は可換なので $U(\mathfrak{h})$ は symmetric algebra $S(\mathfrak{h})$ と標準的に同型であり，双対線型空間上の多項式環 $\mathbb{C}[\mathfrak{h}^*]$ とも標準的に同型である．したがって $Z(\mathfrak{g}) \cong \mathbb{C}[\mathfrak{h}]^W$ である．$\mathbb{C}[\mathfrak{h}]^W$ は多項式環と同型であることが知られている．

$Z(\mathfrak{g})$ の１次元表現を無限小指標という．無限小指標は $Z(\mathfrak{g})$ の余次元１の極大イデアルに１対１に対応する．ゆえに無限小指標全体は $\mathrm{Specm}\,(Z(\mathfrak{g})) = \mathrm{Specm}\,(\mathbb{C}[\mathfrak{h}^*]^W) = \mathfrak{h}^*/W$ でパラメータ付けされる．特に極大イデアル $Z(\mathfrak{g})_+ := Z(\mathfrak{g}) \cap U(\mathfrak{g})\mathfrak{g}$ に対応する無限小指標を自明な無限小指標と呼び χ_ρ と記す．一般に $\lambda \in \mathfrak{h}^*/W$ に対応する無限小指標を χ_λ と書く．定め方から $\ker \chi_\lambda$ は $Z(\mathfrak{g})$ の極大イデアルであるが，それの生成する $U(\mathfrak{g})$ の左イデアル $U(\mathfrak{g}) \ker \chi_\lambda$ は $U(\mathfrak{g})$ の両側イデアルであることに注意しておく．

さて $X = G/P$ を一般化された旗多様体とし，ウエイト $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ が部分空間 $\mathfrak{h} \cap [\mathfrak{p}, \mathfrak{p}]$ 上で消えているとする．λ が整 (integral) であるなら X 上の G 同変な直線束 $\mathbb{C}_\lambda$ に付随した可逆層 $\mathcal{O}(\lambda)$ が考えられる．ここへ作用する微分作用素環の層を $\mathcal{D}_\lambda$ と書き tdo(= twisted differential operator) の層と呼ぶ．微分作用素環 $\mathcal{D}_X$ は関数 $\mathcal{O}_X$ に作用していたのだから $\mathcal{D}_\lambda = \mathcal{O}(\lambda) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}(-\lambda)$ と捩ったものになっている．$\mathcal{D}_\lambda$ は整でない $\lambda \in (\mathfrak{h}/(\mathfrak{h} \cap [\mathfrak{p}, \mathfrak{p}]))^*$ に対しても well-defined である．Lie 環 $\mathfrak{g}$ の元の可逆層への作用から作用素表現

$$\psi_\lambda : U(\mathfrak{g}) \to \Gamma(X, \mathcal{D}_\lambda)$$

が定まる．

2.3 Beilinson-Bernstein の定理

operator 表現の kernel の記述を与えよう.

Theorem 2.4 *(Beilinson-Bernstein)* $X = G/B$ とする. [3] $I_X (= \ker \psi_X) = U(\mathfrak{g}) \ker \chi_\rho$ である. したがって $U(\mathfrak{g})/I_X$ と D_X は同型である.

自明でない無限小指標 χ_λ に対しても剰余環 $U(\mathfrak{g})/U(\mathfrak{g}) \ker \chi_\lambda$ もねじれ微分作用素環 (tdo=twisted differential operator) によって記述できる.

Theorem 2.5 *(Beilinson-Bernstein, Theorem II.3.2 of [8], see Proposition I.5.5 of [1])* $X = G/B$ とする。$I_\lambda := \ker(\psi_\lambda : U(\mathfrak{g}) \to \Gamma(X, \mathcal{D}_\lambda))$ とすると、$I_\lambda = U(\mathfrak{g}) \ker \chi_\lambda$ である. つまり, 代数としての同型 $U(\mathfrak{g})/I_\lambda = \Gamma(X, \mathcal{D}_\lambda)$ が存在する.

一般化された旗多様体 $X = G/P$ の時にも kernel の記述は可能である. ちょうど無限小指標で決まる分と放物型部分群の分を合わせたものになる.

Theorem 2.6 $X = G/P$ のとき,

$$J_P := \operatorname{Ann}_{U(\mathfrak{g})}(U(\mathfrak{g}) \otimes_{U([\mathfrak{p},\mathfrak{p}])} \mathbb{C}) = \cap_{\lambda \in \mathfrak{t}_P^*} \operatorname{Ann}_{U(\mathfrak{g})}(U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{p})} \mathbb{C}_\lambda)$$

と $U(\mathfrak{g})$ の両側イデアルを定義する. この時,

1. *(Gelfand-Kirillov, Remark 3.11 of [2])* $Y = G/[B, B]$ とすると $\psi_Y : U(\mathfrak{g}) \to D_Y$ は単射. つまり $J_B = 0$.
2. *(Corollary 3.11 of [2])* $X_1 = G/[P, P]$ とすると, $\ker(U(\mathfrak{g}) \to \Gamma(X_1, \mathcal{D}_{X_1})) = J_P$.
3. *(Proposition 5.7 of [1])* $\ker(\psi_\lambda : U(\mathfrak{g}) \to \Gamma(X, \mathcal{D}_\lambda)) = J_P + I_\lambda$.

3 filtration and graded algebra

3.1 展開環

Lemma 3.1 *(Poincaré-Birkhoff-Witt)* $\{X_1, \ldots, X_l\}$ を（有限次元）*Lie* 環 $\mathfrak{g}$ の（線形空間としての）基底とする. このとき $U(\mathfrak{g})$ の任意の元は

$$\sum_{\alpha}^{\mathit{finite}} c_\alpha X_1^{\alpha_1} \cdots X_l^{\alpha_l}, \qquad c_\alpha \in \mathbb{C}$$

の形に一意に書ける. つまり, $\{X^\alpha = X_1^{\alpha_1} \cdots X_l^{\alpha_l} \mid \alpha \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^l\}$ は $U(\mathfrak{g})$ の基底となる.

[3] 正確に言えば,「G を複素連結 reductive 代数群, X を旗多様体とする.」というべきところを以下このように略記する. $X = G/P$ も同様の約束とする.

対比のため, Weyl algebra で対応する主張を書いておこう.

Lemma 3.2 *Weyl algebra* $\mathbb{C}[x_1,\ldots,x_n,\partial_1,\ldots,\partial_n]$ の元は

$$\sum_{\alpha}^{finite} c_{\alpha\beta}x_1^{\alpha_1}\cdots x_n^{\alpha_n}\partial_1^{\beta_1}\cdots\partial_n^{\beta_n}, \qquad c_{\alpha\beta}\in\mathbb{C}$$

の形に一意に書ける. つまり, $\{x^\alpha\partial^\beta \mid \alpha,\beta\in\mathbb{Z}^n_{\geq 0}\}$ は $\mathbb{C}[x_1,\ldots,x_n,\partial_1,\ldots,\partial_n]$ の基底となる.

普通は上のような主張を使うが, $\{x_1,\ldots,x_n,\partial_1,\ldots,\partial_n\}$ をこの順序に取らなくてもかまわないこと, 別の線型基底を取ってもかまわないことに注意しておこう.

3.2 order filtration

$U_n(\mathfrak{g})$ を n 次以下の元で生成された部分空間とする. U_n は $U(\mathfrak{g})$ の増大 filtration であり, graded ring $\mathrm{gr}U(\mathfrak{g})$ は標準的に対称代数 $S(\mathfrak{g})$ と同型である.

$\mathcal{D}_n$ を n 次以下の微分作用素からなる $\mathcal{D}_X$ の部分層とする. $\mathcal{D}_n$ は有限生成自由 $\mathcal{O}_X$-module である. $\mathcal{D}_n$ は $\mathcal{D}_X$ に増大 filtration を与え, graded sheaf $\mathrm{gr}\mathcal{D}_X$ は $\pi_{X*}(\mathcal{O}_{T^*X})$ と標準的に同型である. ここで $\pi_X : T^*X\to X$ は余接束 (cotangent bundle) からの自然な射影で, $\mathcal{O}_{T^*X}$ は T^*X 上の関数のなす層である. 微分作用素に主シンボルを対応させることにあたる.

3.3 moment 写像

さて再び G が X に作用している状況を考える. この作用に対する moment 写像をなるべく今の文脈で定義する[4] ことにしよう. operator 表現

$$\psi_X : U(\mathfrak{g})\to\Gamma(X,\mathcal{D}_X)$$

は次数写像 ($\psi_X(U_n)\subset\Gamma(X,\mathcal{D}_n)$ を満たす) である. 従って algebra homomorphism

$$\mathrm{gr}U(\mathfrak{g})\to\Gamma(X,\mathrm{gr}\mathcal{D}_X)$$

を誘導する. すなわち

$$S(\mathfrak{g})\to\Gamma(T^*X,\mathcal{O}_{T^*X})$$

が誘導される. これは ψ_X の最高階による一次近似であるとみなすことができる. すなわちこの写像の様子を調べることは ψ_X を理解する一つの手助けになる.

さて $S(\mathfrak{g})=\mathbb{C}[\mathfrak{g}^*]$ であるから, 上の代数準同型から $m : T^*X\to\mathfrak{g}^*$ という写像が得られる. これが moment 写像と呼ばれる大切な写像である. moment 写像は G の自然な作用に関して同変である.

定義より moment 写像は Specm $(\mathrm{gr}D_X)$ を経由することがわかる.

$$m : T^*X \xrightarrow{\gamma} \mathrm{Specm}\,(\mathrm{gr}D_X) \xrightarrow{\delta} \mathrm{im}(m)\subset\mathfrak{g}^*$$

と記号を定めておく.

[4] moment 写像の定義はいろいろあり, それぞれ文脈によって大切である. 特に symplectic 幾何におけるものが古典力学におけるモーメントと直結している.

3.4 moment map の幾何

Lie 環の構造を記述する言葉を少し用いて, moment 写像の幾何のうち, ここで必要な分を紹介する. まず, 状況が込み入らないように, 一般の G 等質空間 X で考える. [5]

まず, 点 x_0 を固定し, G の x_0 における stabilizer を H と書くと, $X \cong G/H$ となる. 基点での接空間は $T_{x_0}X = \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ となる. なお, この同一視は, $\mathfrak{g}$ の元を X 上のベクトル場と思う思い方と同じである. coisotropy space を

$$\mathfrak{h}^\perp := \{\xi \in \mathfrak{g}^* \mid \xi(h) = 0, \forall h \in \mathfrak{h}\}$$

と定めると, 基点での余接空間は標準的に $T^*_{x_0}X = \mathfrak{h}^\perp$ と同一視できる. X の他の点での接空間や余接空間は G の元で平行移動することによって, 基点におけるものと同型である. 接束は $TX = G \times_H (\mathfrak{g}/\mathfrak{h})$, 余接束は $T^*X = G \times_H \mathfrak{h}^\perp$ と標準的に同一視できる. ここで $(g, \xi) \sim (g', \xi')$ を $\exists h \in H$ such that $g' = gh^{-1}$, $\xi' = Ad(h)\xi$ と定めて, $G \times_H \mathfrak{h}^\perp = (G \times \mathfrak{h}^\perp)/\sim$ と定義する. この同一視を利用すると, 余接束の底空間への射影は $\pi_X : T^*X \ni (g, \xi) \mapsto gH \in X$ と書ける. moment 写像は $m : T^*X \ni (g, \xi) \mapsto Ad(g)\xi \in \mathfrak{g}^*$ となっている.

Lemma 3.3 *moment* 写像 m の像は $\mathrm{Ad}\,(G)\mathfrak{h}^\perp$ に一致する.

さて, G を reductive, X を完備 G 等質空間の場合に戻ろう. (reductive) Lie 環 $\mathfrak{g}$ のベキ零元全体を $\mathcal{N}$ と書く. たとえば $G = SL_n$ ならば

$$\mathcal{N} = \{A \in M_n \mid A^n = 0\}$$

と有限個の方程式で書ける. この事情は一般でも同じである.

Theorem 3.4 *symmetric algebra* $S(\mathfrak{g})$ の G 不変元全体を $S(\mathfrak{g})^G$ とする.

- *(Kostant)* $\mathcal{N}^* = \{\xi \in \mathfrak{g}^* \mid p(\xi) = p(0), \forall p \in S(\mathfrak{g})^G\}$ とする. $\mathfrak{g}$ 上には G 同変な非退化 2 次形式が存在するから *(semisimple* なら *Killing form* を使えば良い*)* $\mathfrak{g}$ と $\mathfrak{g}^*$ の G 同変な同型が存在する. この同一視の下で $\mathcal{N} \subset \mathfrak{g}$ と $\mathcal{N}^* \subset \mathfrak{g}^*$ は一致する.

- *(Chevalley* の制限定理*)* $S(\mathfrak{g})^G$ は $S(\mathfrak{h})^W = \mathbb{C}[\mathfrak{h}^*]^W$ と標準的に同型. 特に多項式環と同型.

$\mathfrak{g}$ が半単純の時, $\mathcal{N}$ の G 軌道は有限個である. $G = SL_n$ の時は固有値がすべて 0 であるような Jordan 標準形が対応していて, 分割でパラメータ付けできる.

以上の準備の下で moment 写像の性質を列挙する.

Theorem 3.5 *(Steinberg, Proposition 2.5 of [2], Proposition IV.1.1 of [1])* $X = G/P$ の時.

- m は *proper.*

---

[5] つまり, G は redutive でなくても良いし, X は完備でなくても良い. もちろん, 以降の動機はその特別な場合にあるのだけれど, いろいろな特殊な同一視などを始めから持ちこむと込み入ってくるので, 始めは仮定の少ない一般の場合から始める.

- $\mathrm{Ad}\,(G)\mathfrak{p}^{\perp}$ は $\mathcal{N}^*$ の閉部分集合.
- $\mathrm{Ad}\,(G)\mathfrak{p}^{\perp}$ の中に稠密な G 軌道が *(ただ一つ)* 存在する. これを P に付随した *Richardson* 軌道と呼ぶ. つまり言いかえると, *moment* 写像の像は *Richardson* 軌道の閉包となる.
- $R(T^*X)$ は $S(\mathfrak{g})$ 加群として有限生成.
- *Richardson* 軌道上で m は有限写像で, その次数は *Richardson* 軌道の *(*任意の*)* 点 y における固定部分群の間の指数 $[G_y : P_y]$ に一致する.

Remark 3.6 *(Remark 2.6 of [2])*

- *(5)* に現われる被覆の次数が 1 の場合を「*moment* 写像が *birational*」というフレーズで語ることが多い. 別に難しいことを言っているわけではないので, 言葉のおどろおどろしさに逃げないで欲しい.
- *(5)* に現われる被覆の次数は多くの場合 1 になるが, 1 に成らない場合もある. その値は全部決定されている. G が単純 *(simple)* の場合に容易に帰着でき, *simple* の場合は G および P の分類は *Dynkin* 図形でできるから, その各場合について実行すれば良い. 結果も分類を使って述べられている. 古典型なら 2 べきであり, 例外型なら 120 の約数である.
- *moment* 写像が *birational* の時, それは *Richardson* 軌道の閉包の特異点解消写像 *(resolution of singularity)* になっている.

Lemma 3.7 *(Kostant, Corollary 1.5 of [3])* $X = G/B$ の時.

- *moment* 写像は *birational* である.
- *moment* 写像の像は $\mathcal{N}$ と一致し, とくに *normal* である.

この場合, *moment* 写像 $m : T^*X \to \mathcal{N}$ は *(nilpotent variety* の*) Springer resolution* と一致する. この峠から右の方を見ると, *Weyl* 群の *Springer* 表現やセル, *fixed point variety* $m^{-1}(\xi)$ などの沃野が見渡せる. 今回は他の用事があるのでそっちへは行けないが.

Lemma 3.8 *(Kraft-Procesi, Proposition 2.7 of [2])* $G = SL_n$ のとき.

- $\mathfrak{g}$ の任意のベキ零軌道は（ある放物型部分群 P に対応した）*Richardson* 軌道である.
- *moment* 写像は *birational.*
- *moment* 写像の像は *normal.*

このように, A 型や旗多様体の時は話が簡単になっている.

3.5 I_X の近似

moment 写像を用いて, operator 表現の kernel I_X の記述を行う.

Theorem 3.9 *(Example 4.4 of [2])* $X = G/P$ のとき. I_X の随伴多様体は $\mathbf{V}(\mathrm{gr}I_X)$ と定義されるがこれは $\overline{m(T^*X)}$ に一致する. したがって *Richardson orbit* の閉包であり, とくに既約である. 特に $\sqrt{\mathrm{gr}I_X}$ は $S(\mathfrak{g})$ の素イデアルである.

$\mathrm{gr}I_X$ 自身が素イデアルになる条件は以下で与える.

3.6 $\mathfrak{g}$-module と D_X-module の対応

(coherent) $\mathcal{D}_X$ 加群 $\mathcal{M}$ に対して, 適当な good filtration による $\mathrm{gr}(\mathcal{M})$ は $\pi_{X*}(\mathcal{O}_{T^*X})$ 加群になり, その T^*X への引き戻しの台が $\mathcal{M}$ の特性多様体 (characteristic variety) だった：

$$\mathrm{Ch}\mathcal{M} = \mathrm{Supp}(\pi_X^*(\mathrm{gr}\mathcal{M})) \subset T^*X.$$

M を (有限生成) $U(\mathfrak{g})$ 加群とする. 適当な good filtration による $\mathrm{gr}M$ は $\mathrm{gr}U(\mathfrak{g}) = S(\mathfrak{g})$ 加群になる. その台を M の随伴多様体 (associated variety) という：

$$\mathrm{Ass}_{\mathfrak{g}}M = \mathrm{Supp}(\mathrm{gr}M) = \mathbf{V}(\mathrm{Ann}_{S(\mathfrak{g})}(\mathrm{gr}M)).$$

D_X 加群に対しても同様に $\mathrm{Ass}_{D_X}(M) \subset \mathrm{Specm}\,(\mathrm{gr}(D_X))$ を定義する.

また, 特性多様体を重複度込みでサイクルとして定義できるのと同様に随伴多様体もサイクルとして定義できる. $\underline{\mathrm{Ass}}_{\mathfrak{g}}(M)$ と記すことにする.

Theorem 3.10 *(5.6 of [2], Corollary 1.5 of [3])* $X = G/P$ のとき, 次の 4 条件は同値.

- モーメント写像が *birational with normal image.*
- $\mathrm{gr}I_X$ は $S(\mathfrak{g})$ の素イデアル.
- $a\delta : \mathit{Specm}\,(\mathrm{gr}(D_X)) \to \mathrm{im}(m)$ は同型.
- 任意の有限生成 D_X 加群 M に対して, δ を随伴多様体 $\mathrm{Ass}_{D_X}(M)$ に制限したものは $\mathrm{Ass}_{\mathfrak{g}}(M)$ への全単射を与え, サイクルとしても $\underline{\mathrm{Ass}}_{D_X}(M) \cong \underline{\mathrm{Ass}}_{\mathfrak{g}}(M)$ となる.

Theorem 3.11 *(Corollary 1.5 of [3])* $X = G/B$ の時, あるいは $G = SL(n)$ の時は, モーメント写像は *birational with normal image* だった. したがって, 上の定理の主張がすべて成立する.

Theorem 3.12 *(Lemma 1.4 of [3])* $X = G/P$ の時, δ は *finite map* である. そして $\delta(\mathrm{Ass}_{D_X}(M)) = \mathrm{Ass}_{\mathfrak{g}}(M)$ となる.

4 加群の局所化

4.1 D-affine

可換環論 (加群) と代数幾何 (層) が局所化を通じて対応していた. まず可換環の場合の復習から.

Theorem 4.1 *X を affine 代数多様体, $R = \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ をその関数環とする. このとき*

$$
\begin{array}{rcl}
\{\text{有限生成 } R\text{-module}\} & \leftrightarrow & \{\text{coherent } \mathcal{O}_X\text{-module}\} \\
M & \mapsto & \mathcal{O}_X \otimes_R M \\
\Gamma(X, \mathcal{M}) & \leftarrow\!\mid & \mathcal{M}
\end{array}
$$

は Abel 圏の間の同型を与える.

微分作用素環の場合はどうなるだろうか. X を非特異代数多様体, $\mathcal{D}_X$ を微分作用素の環の層, $D_X = \Gamma(X, \mathcal{D}_X)$ を大域的な微分作用素のなす環とする. この時,

$$
\begin{array}{rcl}
\{\text{有限生成 } D_X\text{-module}\} & \cdots & \{\text{coherent } \mathcal{D}_X\text{-module}\} \\
M & \mapsto & \mathcal{D}_X \otimes_{D_X} M \\
\Gamma(X, \mathcal{M}) & \leftarrow\!\mid & \mathcal{M}
\end{array}
$$

という双方向きの関手がやはり存在する.

これが category 同値になる十分条件を与えよう.

Definition 4.2 *(Beilinson-Bernstein, Definition 1.1 of [9], 注 26 of [8]) 複素非特異多様体 X が 'D-affine' であるとは, 任意の coherent $\mathcal{D}_X$-module $\mathcal{M}$ に対して*

- *$H^i(X, \mathcal{M}) = 0$ for $i > 0$.*
- *$\mathcal{M}$ は $\mathcal{D}_X$-module として $\Gamma(X, \mathcal{M})$ で生成される.*

が成り立つときをいう.

D-afine 多様体の例を挙げる.

Proposition 4.3 *(Beilinson-Bernstein, Theorem 1.9 of [3]) 次の多様体は D-affine である.*

- *(非特異) affine 多様体.*
- *簡約群の完備等質多様体 G/P. とくに旗多様体 G/B や射影空間 $\mathbf{P}^n$ など.*

Theorem 4.4 *D-affine 多様体 X に対して上の ... は category 同値を与える.*

このようにして, X が旗多様体のとき, D_X 加群は旗多様体上に局所化できるのである. 非可換環 D_X が展開環 $U(\mathfrak{g})$ と関係していたことにより, ある種の $U(\mathfrak{g})$ 加群も旗多様体上に局所化できるのである.

4.2 随伴多様体と特性多様体の関係

M を D_X 加群, $\mathcal{M} = \mathcal{D}_X \otimes_{D_X} M$ をその局所化とする. X が等質空間の時, $\mathcal{M} = \mathcal{O}_X M$ である. M の filtration M_j に対して, $\mathcal{M}$ の filtration を $\mathcal{M}_j = \mathcal{O}_X M_j$ と入れることができる. このとき $\gamma(\mathrm{Ch}(\mathcal{M})) \subset \mathrm{Ass}_{D_X}(M)$ である. (see Proposition 1.8 of [3].)

Theorem 4.5 *(Theorem 1.9 of [3])* $X = G/P$ ならば, 等号 $\gamma(\mathrm{Ch}(\mathcal{M})) \subset \mathrm{Ass}_{D_X}(M)$ が成立する.

Corollary 4.6

$$
\begin{array}{ccccl}
\mathrm{Ass}_{\mathfrak{g}}(M) & : & M & : & \text{有限生成 } U(\mathfrak{g}) \text{ 加群で } I_X \text{ が自明に作用} \\
\| & & \updownarrow & & \\
\delta(\mathrm{Ass}_{D_X}(M)) & : & M & : & \text{有限生成 } D_X \text{ 加群} \\
\| & & \updownarrow & & \\
m(\mathrm{Ch}(\mathcal{M})) & : & \mathcal{M} & : & \text{連接 } \mathcal{D}_X \text{ 加群}
\end{array}
$$

twisted version

Theorem 4.7

5 Concluding remarks

- 代表者から12月に聞いたのは「微分作用素環について進展を見ているアルゴリズム的な手法は展開環にどのように適用翻訳できるか」というものであった, たしか. 一つの考え方は微分作用素環も展開環も（結合的な）非可換環であるがfiltrationを利用して多項式環に落ちることができるという良い性質を共有していることから, 微分作用素環について開発されているテクニックを展開環に移植するというものがある. これは王道であろう.

  ところで, 微分作用素環と展開環は何か関係がありましたよね, ということになり, その部分を担当したのが今回の90分の講演の目的であった. 紙数を費やしたわりには代表者の問いに答えられず申し訳ない.

- 微分作用素環の場合も主たる目的は環そのものではなくD加群であったように展開環の場合も環そのものよりその加群（表現）を興味の対象とするのが自然であると考える. このような（非可換環論というより）表現論の立場からの進展は主に80年代に爆発的になされた. 今回もそれらの結果の紹介である. 証明は省略したかわりに参考文献をいちいちにつけたのでちょっとうるさいかもしれない.

- 表現論の文脈では始めから旗多様体 G/B や一般化された旗多様体 G/P に話を限って述べているが、ここではそうでない場合も分けて書いた. 計算機にのせる場合を考えると proper な場合よりも basic affine space $G/[B, B]$ のような多様体の方が扱いやすいかもしれないからである. [4] は今後大切そうに思う.

- 今回の文脈で表現論で D 加群を使う時には, 勝手な (holonomic) D 加群ではなく, 大きな群の作用を持った D 加群を考えるのがもともとの動機から言って普通である. 例えば Kazhdan-Lusztig 理論の場合は Borel 部分群が, 指標層の場合は diagonal 部分群が, Harish-Chandra $(\mathfrak{g}, K)$ 加群の場合は involutive 部分群 K が[6], 共に旗多様体 G/B に概均質に (spherical) 作用している場合に対応している. 多くの文献はこれらに限って詳細な議論を展開している. これらの場合の特殊性は (1) 加群の種類が少ないこと. 既約な物の分類は軌道でできて有限個であること. (2) 軌道分解の記述ができること. (3) 畳み込み積による Weyl 群, Hecke 環などの作用を持つこと. (4) 帰着されたベキ零軌道の幾何の問題などが幸運な事情によって解けること. などが挙げられる. これらに重く依りかかっているため, 一般の D 加群に対してよいことがどのくらい平行して成り立つかは私にはよくわからない.

References

[1] F.V.Bien, D-modules and spherical representations, Mathematical Notes 39, Princeton Univ. Press, 1990.

[2] W. Borho, J.-L. Brylinski, Differential operators on homogeneous spaces. I, Irreducibility of the associated variey for annihilators of induced modules, Invent. Math. **69**(1982) 437–476.

[3] W. Borho, J.-L. Brylinski, Differential operators on homogeneous spaces. III, Characteristic varieties of Harish Chandra modules and primitive ideals, Invent. Math. **80**(1985) 1–68.

[4] I.M. Gelfand, A.A.Kirillov, The structure of the Lie field connected with a split semisimple Lie algebra, Funct. Anal. Appl. **3** (1969) 6–21 (Gelfand 全集 II, 634–649.

[5] R. Howe, T. Umeda, The Capelli identity, the double commutant theorem, and multiplicity-free actions, Math. Ann. **290** (1991) 565–619.

[6] M. Kashiwara, Representation theory and D-modules on flag varieties, Astérisque **173–174** (1989) 55–109.

[7] D. Miličić, Localization and representation theory of reductive Lie groups, preprint, 146 pages(1993), `http://www.math.utah.edu/~milicic/`

[8] 関口次郎, 微分方程式の表現論への応用, 上智大学数学講究録 **27**(1988).

[9] 谷崎俊之, D 加群と群の表現論, D-加群概説 (II), 数理研講究録 **668**(1988) 63–119.

[10] 谷崎俊之・堀田良之, D加群と代数群, Springer 東京 (1995)

[6] 始めの 2 つの場合は最後の場合に含まれる