数理解析研究所講究録
1173巻 2000年 138-142

Serre's p-adic Eisenstein Series

近畿大学・理工・長岡昇勇

Serreはp進modular形式の例としてp進Eisenstein級数を構成し，そのFourier係数（とくにその定数項）にp進L-関数が現われることを指摘し，さらにHilbert modular群に対するEisenstein級数を考察することにより，総実体上のp進ζ-関数を構成した．この小文ではp進Eisenstin級数に関するSerreのある公式が一般のSiegel modular群の場合に拡張されることを示す．興味深い点は，ある場合にそれが“現実の”modular形式となる場合があることである．

1 p進Eisenstein級数

$\Gamma^{(n)} := \mathrm{Sp}_n(\mathbb{Z})$を$n$次のSiegel modular群とし，$E_k^{(n)}$で次数$n$ weight kの正規化されたEisenstein級数を表すものとする（ただし$k > n+1$）．さらにここではこれを定数倍したもの

$$G_k^{(n)} := -\frac{B_k}{2k}E_k^{(n)}$$

を考える．ここでB_kはk番目のBernoulli数．
ここで次の様な自然数列$\{k_m\}$を考える．まず$k \geqq 1$を自然数とし，このkに対して次の様な素数pをとる．

$$p > 2k, \qquad \begin{cases} p \equiv 1 \pmod 4 & \text{if } k: \text{even} \\ p \equiv 3 \pmod 4 & \text{if } k: \text{odd}. \end{cases}$$

この様な条件を満たす整数の組(k,p)に対して

$$k_m := k + \frac{p-1}{2}p^{m-1}$$

で定義される数列$\{k_m\}$を考える．この数列$\{k_m\}$はSerreのp進weightの空間

$$X := \varprojlim \mathbb{Z}/p^{m-1}(p-1)\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z}$$

（ただし $\mathbb{Z}_p$ は p 進整数環）内に極限をもつ：

$$k_m \longrightarrow \boldsymbol{k} = \Big(k, \frac{p+2k-1}{2}\Big) \in X.$$

主定理. 数列 $\{k_m\}$ を上の様にとる．すると Eisenstein 級数の列 $\{G^{(n)}_{k_m}\}$ は形式的巾級数環 $\mathbb{Q}[[q^T]] = \mathbb{Q}[q_{ij}, q_{ij}^{-1}][[q_1, \ldots, q_n]]$ の中に極限

$$\lim_{m\to\infty} G^{(n)}_{k_m} =: \widetilde{G}^{(n)}_{\boldsymbol{k}} = \widetilde{G}^{(n)}_{(k, \frac{p+2k-1}{2})}$$

をもち，具体的には次の様に表示される：

$$\widetilde{G}^{(n)}_{(k, \frac{p+2k-1}{2})} = \frac{1}{2} L_p\Big(1-k; \omega^{k+\frac{p-1}{2}}\Big) + \sum_{\substack{0 \leqq T \in \Lambda_n \\ 1 \leqq \operatorname{rank} T \leqq 2k}} \widetilde{b}(T)\, q^T,$$

ここで係数 $\widetilde{b}(T)$ は $r := \operatorname{rank} T \geqq 2$ が even のとき

$$2^{\frac{r-2}{2}} \cdot \frac{L_p\Big(1-k+\frac{r}{2}; \eta_{T_1}\omega^{k+\frac{p-1-r}{2}}\Big)}{L_p(1-2k+r; \omega^{2k-r})} \cdot \frac{\displaystyle\prod_{\substack{l:\text{prime} \\ l \mid (d(T_1)/D(T_1))}} g_l^{(r)}\Big(T_1; \Big(\frac{l}{p}\Big) l^{k-r}\Big)}{\displaystyle\prod_{i=1}^{\frac{r-2}{2}} L_p(1-2k+2i; \omega^{2k-2i})}$$

$r := \operatorname{rank} T \geqq 1$ が odd のとき

$$2^{\frac{r-1}{2}} \cdot \frac{\displaystyle\prod_{\substack{l:\text{prime} \\ l \mid d(T_1)}} g_l^{(r)}\Big(T_1; \Big(\frac{l}{p}\Big) l^{k-r}\Big)}{\displaystyle\prod_{i=1}^{\frac{r-1}{2}} L_p(1-2k+2i; \omega^{2k-2i})}$$

と書ける．式に現われる記号は以下の通りである．

- $L_p(s;\chi)$: Kubota-Leopoldt p 進 L-関数.
- Λ_n : n 次半整対称行列全体の集合.
- $T_1 \to 0 \leqq T \in \Lambda_n$ が rank r のとき $T[U] = {}^tUTU = \begin{pmatrix} T_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $U \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$, $0 < T_1 \in \Lambda_n$ と表したもの.

- $d(T)$ は $0 < T \in \Lambda_n$ に対して

$$d(T) := \begin{cases} (-1)^{\frac{n}{2}} \det(2T) & \text{if } n \text{ is even} \\ \dfrac{1}{2}(-1)^{\frac{n-1}{2}} \det(2T) & \text{if } n \text{ is odd} \end{cases}$$

  と定義されるもの.
- $\eta_T(*)$ は $(\frac{d(T)}{*})$ を induce する様な原始指標.
- $D(T) = (-1)^{\frac{n}{2}} \times (\eta_T$ の conductor).
- ω : the Teichmüller character.
- $g_l^{(n)}(T;X) \in \mathbb{Z}[X]$: the modified Katsurada-Kitaoka 多項式.

2 "true" modular 形式

我々の式の興味深い点は，我々の極限

$$\widetilde{G}_k^{(n)} = \widetilde{G}^{(n)}_{(k,\frac{p+2k-1}{2})}$$

が時々"現実の" modular 形式となることである.

例 1. $n = 1$ のとき

$$\widetilde{G}^{(1)}_{(k,\frac{p+2k-1}{2})} = -\frac{B_{k,(\frac{*}{p})}}{2k} + \sum_{t=1}^{\infty} \sum_{0<d|t} \left(\frac{d}{p}\right) d^{k-1} q^T$$

($B_{k,(\frac{*}{p})}$ は一般化された Bernoulli 数) となり，良く知られている様に合同部分群 $\Gamma_0^{(1)}(p)$ に関する指標 $(\frac{*}{p})$ を持つ weight k の modular 形式となる：

$$\widetilde{G}^{(1)}_{(k,\frac{p+2k-1}{2})} \in M_k\left(\Gamma_0^{(1)}(p), \left(\frac{*}{p}\right)\right).$$

特に $p > 3$, $k = 1$ なる条件を付加すれば，我々の研究のモチーフである Serre の式

$$\widetilde{G}^{(1)}_{(1,\frac{p+1}{2})} = \frac{1}{2} h(-p) + \sum_{t=1}^{\infty} \sum_{0<d|t} \left(\frac{d}{p}\right) q^T$$

が得られる．ここで $h(-p)$ は虚 2 次体 $\mathbb{Q}(\sqrt{-p})$ の類数を表す．
この Serre の式に少し remark を与えよう．
$\{S_1,\ldots,S_{h(-p)}\}\subset \mathrm{Sym}_2(\mathbb{Q})$ を判定式 $=-p$ なる 2 元 2 次形式の代表系を表すものとし，これらに対して $\mathbb{H}_n$ 上の theta 級数 $\Theta^{(n)}_{S_i}$ を対応させる．
すると Serre の公式は

$$\widetilde{G}^{(1)}_{(1,\frac{p+1}{2})}=\frac{1}{2}h(-p)+\sum_{t=1}^{\infty}\sum_{0<d|t}\left(\frac{d}{p}\right)q^T=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{h(-p)}\Theta^{(1)}_{S_i}$$

と書ける．右辺は genus theta 級数である．

例 2． $k=1$ とし，n は任意とする．主定理は

$$\widetilde{G}^{(n)}_{(1,\frac{p+1}{2})}=-\frac{1}{2}B_{1,(\frac{*}{p})}+\sum_{0\leqq T\in\Lambda_n^{(1)}}\sum_{0<d|\varepsilon(T)}\left(\frac{d}{p}\right)q^T+2\sum_{\substack{0\leqq T\in\Lambda_n^{(2)}\\ D(T_1)=-p}}\sum_{0<d|\varepsilon(T)}\left(\frac{d}{p}\right)q^T$$

を主張する．ここで $\Lambda_n^{(r)}$ は rank r なる Λ_n の元の集合，$\varepsilon(T)$ は T の成分の最大公約数を表す．
さらに，ここで $p>3$ の条件を付加すれば，Serre の式と同様に上式で

$$定数項=\frac{1}{2}h(-p)$$

となる．そこで Hirzebruch-Zagier の結果 [1] を使えば

$$\widetilde{G}^{(n)}_{(1,\frac{p+1}{2})}=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{h(-p)}\Theta^{(n)}_{S_i}$$

がわかり，これは

$$\widetilde{G}^{(n)}_{(1,\frac{p+1}{2})}\in M_1\left(\Gamma_0^{(n)}(p),\left(\frac{*}{p}\right)\right)$$

をも示し，Serre の式の拡張を与えていることになる．

3 問題

2 節の結果より次の様な問題が考えられる．

問題. $\widetilde{G}^{(n)}_{(k,\frac{p+2k-1}{2})}$ が "現実の" modular 形式になるのはどんな場合か？
より厳密には，どんな場合に

$$\widetilde{G}^{(n)}_{(k,\frac{p+2k-1}{2})} \in M_k\left(\Gamma_0^{(n)}(p), \left(\frac{*}{p}\right)\right)$$

となるか？
もちろん，2 節の結果は

$$(k,n)=(k,1) \quad \text{または} \quad (1,n) \quad \text{のとき}$$

は正しいことを示している．

参考文献

[1] F. Hirzebruch and D. Zagier: Intersection numbers of Hilbert modular surfaces and modular forms of Nebentypus. Inventiones Math. **36**(1976), 57–113

[2] S. Nagaoka: A remark on Serre's example of p-adic Eisenstein series. to appear in Math. Z.

[3] J. -P. Serre: Formes modulaires et fonctions zêta p-adiques. Modular functions of one variables III, L. N. M., **350**, Springer Verlag, 1973