数理解析研究所講究録
1173 巻 2000 年 192-199

A proof of the cyclic sum conjecture for multiple zeta values

近畿大学理工学部　大 野 泰 生 (Yasuo Ohno)

Abstract

M. Hoffman が予想した多重ゼータ値の線型関係式 "cyclic sum conjecture" の証明を述べる。この結果, sum formula の別証明が得られる。 sum formula の証明は, A. Granville, D. Zagier, H. Ochiai によるものが知られているが, いずれも母関数の議論を用いているほか, 後者のふたつは多重ゼータ値の反復積分表示も用いている。Granville と Zagier は彼等の証明に付して,「この証明は長くはないが定理の単純さに比較して込み入っている。より自然な証明が望まれる」ということを記している。本稿で与える証明は母関数の議論や反復積分表示を用いない。

1 The Cyclic Sum Formula

admissible indices $(k_1, k_2, \ldots, k_n)$, すなわち, 整数 $k_1, \ldots, k_{n-1} \geq 1$ と $k_n \geq 2$, に対して, 多重ゼータ値は

$$\zeta(k_1, k_2, \ldots, k_n) = \sum_{0<a_1<a_2<\cdots<a_n} \frac{1}{{a_1}^{k_1}{a_2}^{k_2}\cdots{a_n}^{k_n}}$$

で定義される。

多重ゼータ値の研究は, Euler が $n=2$ の場合を扱ったことをその起源としている。近年, いくつかの数学または物理学の分野の研究において, 多重ゼータ値そのものや, 多重ゼータ値で張られる $\mathbf{Q}$-algebra との関連が, 証明或いは予想されるようになって, 多数の研究が行われている。多重ゼータ値の環の構造については, まだまだ不明なことが多いようで, 現在はその解明に向けた一段階として, 多重ゼータ値間の有理数係数線型関係式の系統的把握と, 各 weight における多重ゼータ値の張る $\mathbf{Q}$ ベクトル空間の次元の上限を与えることが中心的課題となっているようである。

その中で sum formula は, 多重ゼータ値の関係式の系列の中でも最も重要で基本的なもののひとつと思われてきた。今回証明した cyclic sum conjecture は、実は sum formula の細分化になっており、sum formula よりも強い定理である。すでによく知られていた sum formula が実はより強い基本的な関係式の単なる足し合わせになっていたことは驚くべきことであり、それに気付き予想を与えた Hoffman の研究は意義深い。

cyclic sum conjecture を述べるために、記号を用意する。n と k を，$0 < n \le k$ を満たす整数とし，$S(k,n)$ を，k の長さ n への（順序付き）分割の全体の集合，すなわち，

$$S(k,n) = \{(k_1, k_2, \ldots, k_n) \mid k_1 + k_2 + \cdots + k_n = k,\ k_i \ge 1 \text{ for any } i\}$$

とする。$S(k,n)$ のふたつの元が巡回同値であるとは，互いに n 文字の巡回置換（の冪）で移り合うこと，すなわち，$\sigma = (k_1, k_2, \ldots, k_n)$ と $j = 1, 2, \ldots, n$ に対して，$(k_1, k_2, \ldots, k_n) \equiv (\sigma^j(k_1), \sigma^j(k_2), \ldots, \sigma^j(k_n))$ と定義する。$\Pi(k,n)$ を $S(k,n)$ の巡回同値類の集合とする。本稿で証明するのは，M. Hoffman ([4]) によって予想された，以下の関係式である。

Theorem 1 $k > n$ とする。任意の元 $\alpha \in \Pi(k,n)$ に対して，以下が成り立つ。

$$\sum_{(k_1,k_2,\ldots,k_n)\in\alpha} \zeta(k_1, k_2, \ldots, k_{n-1}, k_n + 1) = \sum_{(k_1,k_2,\ldots,k_n)\in\alpha} \sum_{i=0}^{k_n-2} \zeta(i+1, k_1, \ldots, k_{n-1}, k_n - i)$$

ここで，右辺の内側の和は，$k_n = 1$ の時は 0 として扱う。

Proof $k_1 + \cdots + k_n > n$ を満たす整数 n, $k_1, \ldots, k_n$ (つまり, k_i のうち少なくとも 1 つが 1 より大きい) に対して, $T(k_1, k_2, \ldots, k_n)$ を以下のような収束級数と定義する。

$$T(k_1, k_2, \ldots, k_n) = \sum_{0 \le a_0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_n} \frac{1}{a_1^{k_1} a_2^{k_2} \cdots a_n^{k_n}(a_n - a_0)}.$$

(収束については Lemma 1 参照。)

定理は、以下の Key Lemma を $(k_1, k_2, \ldots, k_n)$ の含まれる巡回同値類の全ての元について足し合わせることにより証明される。 Q.E.D.

Key Lemma $k_1 + \cdots + k_n > n$ を満たす整数 n, $k_1, \ldots, k_n$ に対して、次が成り立つ。

$$T(k_1, k_2, \ldots, k_n) - T(k_n, k_1, k_2, \ldots, k_{n-1})$$

$$= \zeta(k_1, k_2, \ldots, k_{n-1}, k_n + 1) - \sum_{i=0}^{k_n-2} \zeta(i+1, k_1, \ldots, k_{n-1}, k_n - i),$$

ここで，右辺の和は，$k_n = 1$ の時は 0 として扱う。

Proof 任意の整数 $r \ge 2$ と $i \ge 0$ に対して，

$$\begin{aligned}
&\sum_{0<a_0<a_1<\cdots<a_n} \frac{1}{a_0^i a_1^{k_1} a_2^{k_2} \cdots a_n^r (a_n - a_0)} \\
= &\sum_{0<a_0<a_1<\cdots<a_n} \frac{1}{a_0^{i+1} a_1^{k_1} a_2^{k_2} \cdots a_{n-1}^{k_{n-1}} a_n^{r-1}} \Big(\frac{1}{a_n - a_0} - \frac{1}{a_n}\Big) \\
= &\sum_{0<a_0<a_1<\cdots<a_n} \frac{1}{a_0^{i+1} a_1^{k_1} a_2^{k_2} \cdots a_{n-1}^{k_{n-1}} a_n^{r-1} (a_n - a_0)} - \zeta(i+1, k_1, k_2, \ldots, k_{n-1}, r).
\end{aligned}$$

従って $r = k_n - i$ として、上記の等式を $i = 0, 1, \ldots, k_n - 2$ について足し合わせると以下の等式を得る。

$$\begin{aligned}
&\sum_{0<a_0<\cdots<a_n} \frac{1}{a_1^{k_1} a_2^{k_2} \cdots a_n^{k_n} (a_n - a_0)} \\
= &\sum_{0<a_0<\cdots<a_n} \frac{1}{a_0^{k_n - 1} a_1^{k_1} a_2^{k_2} \cdots a_{n-1}^{k_{n-1}} a_n (a_n - a_0)} - \sum_{i=0}^{k_n - 2} \zeta(i+1, k_1, \ldots, k_{n-1}, k_n - i).
\end{aligned}$$

この左辺は

$$T(k_1, k_2, \ldots, k_n) - \zeta(k_1, k_2, \ldots, k_{n-1}, k_n + 1)$$

に等しく、また右辺の最初の和は以下のように書きかえられ、求める関係式が得られる。

$$\begin{aligned}
&\sum_{0<a_0<a_1<\cdots<a_n} \frac{1}{a_0^{k_n} a_1^{k_1} a_2^{k_2} \cdots a_{n-1}^{k_{n-1}}} \Big(\frac{1}{a_n - a_0} - \frac{1}{a_n}\Big) \\
= &\sum_{0<a_0<a_1<\cdots<a_{n-1}} \frac{1}{a_0^{k_n} a_1^{k_1} a_2^{k_2} \cdots a_{n-1}^{k_{n-1}}} \sum_{a_n = a_{n-1}+1}^{\infty} \Big(\frac{1}{a_n - a_0} - \frac{1}{a_n}\Big) \\
= &\sum_{0<a_0<a_1<\cdots<a_{n-1}} \frac{1}{a_0^{k_n} a_1^{k_1} a_2^{k_2} \cdots a_{n-1}^{k_{n-1}}} \sum_{j=0}^{a_0 - 1} \frac{1}{a_{n-1} - j} \\
= &\sum_{0 \le j < a_0 < a_1 < \cdots < a_{n-1}} \frac{1}{a_0^{k_n} a_1^{k_1} a_2^{k_2} \cdots a_{n-1}^{k_{n-1}} (a_{n-1} - j)} \\
= &\ T(k_n, k_1, k_2, \ldots, k_{n-1}).
\end{aligned}$$

Q.E.D.

Lemma 1 $k_1 + k_2 + \cdots + k_n > n > 0$ に対して, $T(k_1, k_2, \ldots, k_n)$ は収束する。

Proof $k_1+k_2+\cdots+k_n>n>0$ に対する $T(k_1,\ldots,k_n)$ の収束を証明するためには, $k_1+k_2+\cdots+k_n=n+1$ に対する $T(k_1,\ldots,k_n)$ の収束を示せば充分である, なぜならこの他の $T(k_1,\ldots,k_n)$ 達はこれらのうちのどれかで上から押さえられる, つまり, $k_1+\cdots+k_n>n$ なる条件から少なくとも 1 つの k_i が 1 より大きくなり, この i に対して

$$T(\underbrace{1,\ldots,1}_{i-1},2,\underbrace{1,\ldots,1}_{n-i})>T(k_1,\ldots,k_n)$$

が成立するからである。従って $(1,1,\ldots,1,2)$ と巡回同値なすべての元について収束を示す。まず, $T(1,1,\ldots,1,2)$ の収束は以下で判る。

$$\begin{aligned}T(1,1,\ldots,1,2) &= \sum_{0\le a_0<a_1<a_2<\cdots<a_n}\frac{1}{a_1a_2\cdots a_{n-1}a_n^2(a_n-a_0)}\\ &\le \zeta(1,1,\ldots,1,3)+\sum_{\substack{0<a_1<\cdots<a_n,\\ 0<t<a_n}}\frac{1}{ta_1a_2\cdots a_{n-1}a_n^2}\\ &= \zeta(1,1,\ldots,1,3)+n\zeta(\underbrace{1,\ldots,1}_{n},2)+\sum_{i=1}^{n-1}\zeta(\underbrace{1,\ldots,1}_{i-1},2,\underbrace{1,\ldots,1}_{n-i-1},2)\end{aligned}$$

今示した $T(1,1,\ldots,1,2)$ の収束と Key Lemma の証明で用いた等式から, $T(1,2,1,1,\ldots,1)$, $T(1,1,2,1,1,\ldots,1)$, …, $T(1,1,\ldots,1,2,1)$ の収束が順次示される。 Q.E.D.

Theorem 1 の証明から, sum formula の別証明が得られる。

Theorem 2 (Sum Formula [2],[12]) *For any integers* $0<n\le k$*, we have*

$$\sum_{(k_1,k_2,\ldots,k_n)\in S(k,n)}\zeta(k_1,k_2,\ldots,k_{n-1},k_n+1)=\zeta(k+1).$$

Proof Theorem 1 の等式を $S(k,n)$ に含まれる全ての同値類について足し合わせると,

$$\sum_{(k_1,k_2,\ldots,k_n)\in S(k,n)}\zeta(k_1,k_2,\ldots,k_{n-1},k_n+1)$$

$$=\sum_{(k_1,k_2,\ldots,k_n)\in S(k,n)}\sum_{i=0}^{k_n-2}\zeta(i+1,k_1,\ldots,k_{n-1},k_n-i).$$

となる。ここで以下の lemma を用いる。

Lemma 2 $0<n<k$ を満たす任意の整数 k と n に対して, 以下が成り立つ。

$$\sum_{(k_0,k_1,\ldots,k_n)\in S(k,n+1)} \zeta(k_0,k_1,\ldots,k_{n-1},k_n+1)$$

$$= \sum_{(k_1,k_2\ldots,k_{n-1},t)\in S(k,n)} \sum_{i=0}^{t-2} \zeta(i+1,k_1,\ldots,k_{n-1},t-i)$$

Proof 左辺の項数は $\binom{k-1}{n}$ と書けるのに対し, 右辺の項数は$\left(\sum_{t=2}^{k-n+1}(t-1)\binom{k-t-1}{n-2}\right)$ と書けるが, これらの数は公式$\sum_{i=1}^{n} i\binom{n+s-i-1}{n-i} = \binom{n+s}{s+1}$ によって等しいことがわかり, 従って両辺の項数は等しい。

次に, 任意の index $(k_0,k_1,\ldots,k_n)\in S(k,n+1)$ に対して, $(k_1,k_2,\ldots,k_{n-1},k_0+k_n)\in S(k,n)$ であるから, Lemma 2 の右辺には$\sum_{i=0}^{k_0+k_n-2}\zeta(i+1,k_1,\ldots,k_{n-1},k_0+k_n-i)$ という和が存在する。ここで $i=k_0-1$ とおけば, 条件$0\le i=k_0-1\le k_0+k_n-2$ は満たされ, 右辺に$\zeta(k_0,k_1,\ldots,k_n)$ という項が存在することがわかる。従って左辺に存在する index は必ず右辺にも存在し, しかも左辺に index の重複はない。両辺の項数が等しいことを考え合わせると、両辺の和に登場する index は全く同じ顔ぶれであり, しかも全てちょうど 1 回だけ登場する。よって Lemma 2 の等式は正しい。 Q.E.D.

Lemma 2 の等式を用いると, $0<n<k$ なる整数に対して以下の等式が得られる。

$$\sum_{(k_1,k_2,\ldots,k_n)\in S(k,n)} \zeta(k_1,k_2,\ldots,k_{n-1},k_n+1)$$

$$= \sum_{(k_0,k_1,\ldots,k_n)\in S(k,n+1)} \zeta(k_0,k_1,\ldots,k_{n-1},k_n+1).$$

従って sum formula はこの等式の n に関する帰納法で得られる。 Q.E.D.

2 Duality and the Cyclic Sum Formula

ここでは Theorem 1 の右辺に duality formula ([11]) を適用して cyclic sum formula のある種の対称性を見る。

まず, dual index と duality formula を復習し, 次に巡回同値類の dual class を定義する。

2 つの admissible indices k と k' が互いに "dual" であるとは, 整数 $s\ge 1$ と $a_1,b_1,a_2,b_2,\ldots,a_s,b_s\ge 1$ を用いて,

$$\mathsf{k} = (\underbrace{1,\ldots,1}_{a_1-1},b_1+1,\underbrace{1,\ldots,1}_{a_2-1},b_2+1,\ldots,\underbrace{1,\ldots,1}_{a_s-1},b_s+1)$$

かつ

$$\mathsf{k}' = (\underbrace{1,\dots,1}_{b_s-1}, a_s+1, \underbrace{1,\dots,1}_{b_{s-1}-1}, a_{s-1}+1, \dots, \underbrace{1,\dots,1}_{b_1-1}, a_1+1)$$

と書けることを言う。この時, duality formula とは，以下の等式である。

Theorem 3 (Duality (cf.[11])) 任意の *admissible index* $\mathsf{k} = (k_1, k_2, \dots, k_n)$ とその *dual* $\mathsf{k}' = (h_1, h_2, \dots, h_m)$ に対して, 以下が成立する。

$$\zeta(k_1, k_2, \dots, k_n) = \zeta(h_1, h_2, \dots, h_m).$$

$0 < n < k$ かつ $\alpha \in \Pi(k,n)$ ならば, α に含まれる admissible indices の dual 達はすべて互いに巡回同値である。従って $\beta \in \Pi(k, k-n)$ が $\alpha \in \Pi(k,n)$ の任意の admissible な元の dual を含むとき，β をα の "dual" class と呼ぶことにする。

これらの用語を用いると巡回和公式を以下のように述べることができる。

Theorem 4 任意の $0 < n < k$, $\alpha \in \Pi(k,n)$ とその *dual* $\beta \in \Pi(k, k-n)$ に対して, 以下が成立する。

$$\sum_{(k_1,\dots,k_n)\in\alpha} \zeta(k_1, \dots, k_{n-1}, k_n+1) = \sum_{(h_1,\dots,h_{k-n})\in\beta} \zeta(h_1, \dots, h_{k-n-1}, h_{k-n}+1).$$

Proof admissible index $(k_1, \dots, k_n) = (\underbrace{1,\dots,1}_{a_1-1}, b_1+1, \dots, \underbrace{1,\dots,1}_{a_s-1}, b_s+1) \in \alpha$

を取ると, Theorem 2 の右辺は

$$\frac{\#\alpha}{n} \sum_{(<a_1,b_1>,\dots,<a_s,b_s>)} \sum_{i=0}^{b_s-1} \zeta(i+1, \underbrace{1,\dots,1}_{a_1-1}, b_1+1, \dots, \underbrace{1,\dots,1}_{a_{s-1}-1}, b_{s-1}+1, \underbrace{1,\dots,1}_{a_s-1}, b_s+1-i)$$

ここで、和は s 個のペア達の s 文字の (同時) 巡回置換の全体を走るものとする。上式は以下のように書きかえられる。

$$\frac{\#\alpha}{n} \sum_{(<a_1,b_1>,\dots,<a_s,b_s>)} \Big(\zeta(1, \underbrace{1,\dots,1}_{a_1-1}, b_1+1, \dots, \underbrace{1,\dots,1}_{a_s-1}, b_s+1)$$

$$+ \sum_{i=1}^{b_s-1} \zeta(i+1, \underbrace{1,\dots,1}_{a_1-1}, b_1+1, \dots, \underbrace{1,\dots,1}_{a_{s-1}-1}, b_{s-1}+1, \underbrace{1,\dots,1}_{a_s-1}, b_s+1-i)\Big).$$

ここで duality formula を用いると以下を得る。

$$\frac{\#\alpha}{n} \sum_{(<a_1,b_1>,\dots,<a_s,b_s>)} \Big(\zeta(\underbrace{1,\dots,1}_{b_s-1}, a_s+1, \dots, \underbrace{1,\dots,1}_{b_2-1}, a_2+1, \underbrace{1,\dots,1}_{b_1-1}, a_1+2)$$

$$+\sum_{i=1}^{b_s-1}\zeta(\underbrace{1,\ldots,1}_{b_s-1-i},a_s+1,\underbrace{1,\ldots,1}_{b_{s-1}-1},a_{s-1}+1,\ldots,\underbrace{1,\ldots,1}_{b_1-1},a_1+1,\underbrace{1,\ldots,1}_{i-1},2)\Big),$$

定義から, $(k_1,\ldots,k_n)$ の dual は $(h_1,\ldots,h_{k-n})=(\underbrace{1,\ldots,1}_{b_s-1},a_s+1,\ldots,\underbrace{1,\ldots,1}_{b_1-1},a_1+1)$ だから, 上式は以下のようになる。

$$\sum_{(h_1,h_2,\ldots,h_{k-n})\in\beta}\zeta(h_1,h_2,\ldots,h_{k-n-1},h_{k-n}+1).$$

Q.E.D.

Theorem 4 と duality theorem を用いて Theorem 2 を示すこともできる。Theorem 4 の等式を $\Pi(k,n)$ のすべての元について足し合わせると, weight $k+1$ で depth n の多重ゼータ値の総和と weight $k+1$ で depth $k-n$ の多重ゼータ値の総和との間の等式を得る。そこで duality theorem をこの右辺に適用すると後者は weight $k+1$ で depth $n+1$ の多重ゼータ値の総和になる。従ってこの結果 Theorem 2 の証明の最後に出てきた等式と同じものが得られ, sum formula が得られることになる。

Acknowledgments 初期の段階の証明を読んで有意義なコメントを下さった金子昌信先生と，研究の動機となった論文 [4] を届けて下さった Hoffman 氏に感謝します。この証明は，ボンのマックスプランク研究所滞在中の 2000 年の初春に出来ました。長時間に及んでこの分野の議論をして下さった Zagier 先生と，親切にして下さった Hirzebruch 先生，同僚の Gangl と Cornelissen，そしてＭＰＩに感謝します。

参考文献

[1] T. Arakawa and M. Kaneko, Multiple zeta values, poly-Bernoulli numbers, and related zeta functions, *Nagoya Math. J.*, **153** (1999), 1-21.

[2] A. Granville, A decomposition of Riemann's zeta-function, in London Math. Soc. Lecture Note Ser. 247, Cambridge, 1997, pp. 95-101.

[3] M. Hoffman, Multiple harmonic series, *Pacific J. Math.*, **152** (1992), 275-290.

[4] M. Hoffman, The cyclic sum conjecture, *Preprint (Dated August 10, 1999).*

[5] M. Hoffman and Y. Ohno, Relations of multiple zeta values and their algebraic expression, *Preprint* .

[6] Y. Ohno, A generalization of the duality and sum formulas on the multiple zeta values, *J. Number Theory*, **74** (1999), 39-43.

[7] Y. Ohno, A proof of the cyclic sum conjecture for multiple zeta values, *Max-Planck-Institut preprint series 2000-26.*

[8] Y. Ohno and D. Zagier, *In preparation.*

[9] L. Tornheim, Harmonic double series, *Amer. J. Math.*, **72** (1950), 303-314.

[10] C. L. Siegel, *Advanced Analytic Number Theory,* Chelsea Publ. Co., New York, 1950.

[11] D. Zagier, Values of zeta functions and their applications, in Proceedings of ECM, *Progress in Math.*, **120** (1994), 497-512.

[12] D. Zagier, Multiple zeta values, *In preparation.*

This research was supported in part by Research Fellowship of the Japan Society for the Promotion of Science for Young Scientists.

Department of Mathematics and Physics
Kinki University
Kowakae, Higashi-Osaka, Osaka 577-8502, Japan
e-mail: ohno@math.kindai.ac.jp