数理解析研究所講究録
1173 巻 2000 年 13-21

直交群 $O(3,2)$ 上の一般化球関数および関連する局所ゼータ積分

東京大学数理科学 森山　知則
(Tomonori Moriyama)

§0. 概要 村瀬 篤氏と菅野 孝史氏は直交群上の Rankin-Selberg convolution で定義されるゼータ積分 $Z_{F,f}(s)$ を導入した [MS-1]. ここで F および f はそれぞれサイズ $(m+1)$, m の直交群上の保型形式である。適当な条件下で, $Z_{F,f}(s)$ は無限成分 $Z_{F,f}^{(\infty)}(s)$ と 有限成分 $Z_{F,f}^{(\mathrm{f})}(s)$ との積に分解し, $Z_{F,f}^{(\mathrm{f})}(s)$ は F の standard L-関数と f のそれとの商を表す。さらに, $Z_{F,f}^{(\infty)}(s)$ は実直交群上のある種の一般化された球関数 (”実新谷関数”) の積分変換で書ける。ここでは, 特別な場合 ($m=4$ で, F と f が無限素点で生成する表現等も限定する) に行った, $Z_{F,f}^{(\infty)}(s)$ の計算について報告する。§1, 2 で [MS-1], [MS-2] から必要な部分を要約し, §3 で我々の結果を述べる。

§1. 記号と状況設定

まず, この節では直交群に関する記号等を準備する。

(1.1) 直交群. $S={}^tS\in M(m+1,\mathbb{Z})$ を $(m+1)$-次の even-integral な非退化対称行列で, その左上の $m\times m$ 部分を S_0 と書いてこれも非退化であるとする (あとで, $m=4$, S_0 の符号を $(3+,1-)$ とするのであるが, 話を見えやすくするために一般的に書いておく)。すると,

$$S=\begin{bmatrix} S_0 & -S_0\alpha \\ -{}^t\alpha S_0 & -2a \end{bmatrix}, \qquad \alpha\in\mathbb{Q}^m, \quad a\in\mathbb{Z},$$

と書ける。また,

$$S_1:=\begin{bmatrix} & & 1 \\ & S & \\ 1 & & \end{bmatrix}\in M(m+2,\mathbb{Z}),$$

とおく。こうして, 3つの $\mathbb{Q}$ 上の quadratic vector space $(V_0=\mathbb{Q}^m,S_0)$, $(V=\mathbb{Q}^{m+1},S)$, $(V_1=\mathbb{Q}^{m+2},S_1)$, ができる。これらのあいだの等長的な埋め込み $V_0\overset{j_0}{\hookrightarrow}V\overset{j}{\hookrightarrow}V_1$ を次のように決める:

$$j_0(x):=\begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix}, \quad j(\begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix}):=\begin{bmatrix} -az-S_0(\alpha,y) \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

すると,

$$V_1=V\,\widehat{\oplus}\,\mathbb{Q}\cdot\eta, \quad \eta:=\begin{bmatrix} a \\ \alpha \\ 1 \end{bmatrix}\in V_1; \qquad V=V_0\,\widehat{\oplus}\,\mathbb{Q}\cdot\xi, \quad \xi:=\begin{bmatrix} \alpha \\ 1 \end{bmatrix}\in V;$$

となっている。S_0, S, S_1 についての直交群たちを, それぞれ $G_0 := O(S_0), G = O(S)$, $G_1 = O(S_1)$ と書こう。これらの直交群の間の埋め込み $G \overset{\iota_0}{\hookrightarrow} G \overset{\iota}{\hookrightarrow} G_1$ を,

$$\iota_0(g_0)(j_0(x) + t\xi) := j_0(g_0x) + t\xi, \quad g_0 \in G_0,\ x \in V_0,\ t \in \mathbb{G}_m,$$
$$\iota(g)(j(x) + t\eta) := j(gx) + t\eta, \qquad g \in G,\ x \in V,\ t \in \mathbb{G}_m,$$

で決める. 明らかに, G_0(resp. G) は, ξ(resp. η) の G(resp. G_1) での固定化部分群になっている。一般性を損なうことなしに,

$$\Delta := S_1[\eta] = -S[\xi] > 0$$

としてよいので, そのようにする。

(1.2) **G_1 の極大放物型部分群 P_1.** 後で G_1 上の Eisenstein 級数を構成するために, G_1 の極大放物型部分群

$$P_1 := \left\{ p_1 = \begin{bmatrix} \alpha(p_1) & * & * \\ & \beta(p_1) & * \\ & & \alpha(p_1)^{-1} \end{bmatrix} \in G_1 | \alpha(p_1) \in \mathbb{G}_m, \beta(p_1) \in G_0 \right\}.$$

を導入しておく。P_1 のべき単根基 N_1 は

$$N_1 := \left\{ \begin{bmatrix} 1 & * & * \\ & 1_m & * \\ & & 1 \end{bmatrix} \in G_1 \right\}.$$

で与えられる。$g_0 \in G_0$ と $\alpha \in \mathbb{G}_m$ に対して

$$m_1(g_0, \alpha) := \begin{bmatrix} \alpha & & \\ & 1_m & \\ & & \alpha^{-1} \end{bmatrix} \cdot \iota_0(g_0)$$

とおけば, これらの全体 $M_1 := \{m_1(g_0, \alpha) |\, g_0 \in G_0,\, \alpha \in \mathbb{G}_m\}$ は, P_1 の一つの Levi 部分群になっている。

(1.3) 極大コンパクト部分群. $\mathbb{Q}$ の素点 v に対して, G_0 の $\mathbb{Q}_v$-値点のなす群 $G_0(\mathbb{Q}_v)$ を $G_{0,v}$ と書く。また, $G_{0,\infty} = G_0(\mathbb{R})$ の Lie 代数を $\mathfrak{g}_0$ と書く。同様の記号法を G と G_1 に対しても用いる。

S_0 の符号を $(p+, q-)$ とする $(p + q = m)$。$\Delta > 0$ としたので S と S_1 の符号は, それぞれ $(p+, (q+1)-)$, $((p+1)+, (q+1)-)$ となる。$V_0(\mathbb{R})$ の擬直交基底

$$\mathcal{B}_0 = \{v_i^+, v_j^- | 1 \leqslant i \leqslant p+1, 1 \leqslant j \leqslant q+1\}$$

を一つ取って固定する. (すなわち, $S_0(v_k^+, v_l^+) = -S_0(v_k^-, v_l^-) = \delta_{k,l}, S_0(v_k^+, v_l^-) = 0$)。さらに

$$v_{q+1}^- := \frac{1}{\sqrt{\Delta}}\xi, \qquad v_{p+1}^+ := \frac{1}{\sqrt{\Delta}}\eta,$$

とおけば, $\mathcal{B}_0 \cup \{v_{q+1}^-\}$ と $\mathcal{B}_0 \cup \{v_{p+1}^+, v_{q+1}^-\}$ とがそれぞれ $V(\mathbb{R})$ と $V_1(\mathbb{R})$ の擬直交基底を与える。この $V_1(\mathbb{R})$ の基底 $\{v_1^+, \cdots, v_{p+1}^+, v_1^-, \cdots v_{q+1}^-\}$ による $G_{1,\infty}$ と

$$O(p+1, q+1) := \left\{ g \in GL(m+2, \mathbb{R}) |\ {}^t g 1_{p+1,q+1} g = 1_{p+1,q+1} \right\}$$

との同一視を
$$\kappa : O(p+1, q+1) \cong G_{1,\infty}$$
と書こう。$G_{1,\infty}$ の極大コンパクト部分群として $K_{1,\infty} := \kappa(O(p+1)\times O(q+1))$ をとる。さらに G_∞ と $G_{0,\infty}$ の極大コンパクト部分群として, それぞれ $K_\infty := G_\infty \cap K_{1,\infty}$ と $K_{0,\infty} := G_{0,\infty}\cap K_{1,\infty}$ をとる。以下 $G_1(\mathbb{A})$ $G(\mathbb{A})$, $G(\mathbb{A})$ 上の保型形式の空間は, この極大コンパクト部分群の選択に対して定義されたものとする。

(1.4) Hecke algebras. 各有限素点 $p<\infty$ に対して $G_{0,p}$ の開コンパクト部分群 $K_{0,p}$, $K_{0,p}^*$ を
$$K_{0,p} := G_{0,p}\cap M_m(\mathbb{Z}_p), \quad K_{0,p}^* := \{k \in K_{0,p} | (k-1)S_0^{-1} \in M_m(\mathbb{Z}_p)\}.$$
で定める。S_0 が p で "maximal" ならば (すなわち, ${\mathbb{Z}_p}^m$ が S に関して極大な integral lattice in $V_0\otimes\mathbb{Q}_p$ ならば) $K_{0,p}$ は $G_{0,p}$ の極大コンパクト部分群である。$G_{0,p}$ の $K_{0,p}$ に関する Hecke algebra を $\mathcal{H}_{0,p}$ で表す。すなわち, $\mathcal{H}_{0,p}$ をコンパクト台を持つ局所定数関数 $\phi : G_{0,p}\to\mathbb{C}$ で,
$$\phi(u_1 g u_2) = \phi(g), \qquad \forall\,(u_1, g, u_2) \in K_{0,p}^* \times G_{0,p}\times K_{0,p}^*$$
を満たすものの全体とし, convolution で積を入れる。$\mathcal{H}_{0,p}$ は一般に非可換で, その中心を $\mathcal{H}_{0,p}^+$ で表そう。また, $K_{0,\mathrm{f}}^* := \prod_{p<\infty} K_{0,p}^*$ とおく。ほとんどすべての p で $K_{0,p} = K_{0,p}^*$ かつ $\mathcal{H}_{0,p} = \mathcal{H}_{0,p}^+$ である。同様に, $K_p, K_p^*, \mathcal{H}_p, \mathcal{H}_p^+$, K_f^*, $K_{1,p}, K_{1,p}^*, \mathcal{H}_{1,p}, \mathcal{H}_{1,p}^+$ $K_{1,\mathrm{f}}^*$ を定める。

§ 2. ゼータ積分

前節では, 3つの直交群 G_0, G, G_1 が出てきたが, このうち G_0 と G_1 の以下での役割は補助的なものである。つまり, $G(\mathbb{A})$ の保型表現の保型的 L-関数の解析的性質を, $G_0(\mathbb{A})$ のそれに帰着して調べようというのが [MS-1,2] の目論みであろう（S が定値かつ maximal のときには, この戦略が完遂されている)。この節では, それを簡単に説明する。以下, さまざまな群の表現 X に対して, その反傾表現を X^* で表す。

(2.1) π_0, π をそれぞれ $G_0(\mathbb{A})$ および $G(\mathbb{A})$ の尖点的保型表現とする。π_0 および π を無限成分と有限成分に分けて, $\pi_0 = \pi_{0,\infty}\boxtimes\pi_{0,\mathrm{f}}$, $\pi = \pi_\infty \boxtimes \pi_\mathrm{f}$ と書く。ここで, あとの議論にとって重大な次の仮定
$$(\bigstar): \quad \dim_\mathbb{C} \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}_0\oplus\mathfrak{g}, K_{0,\infty}\times K_\infty}(\pi_{0,\infty}^*\boxtimes\pi_\infty, C^\infty(G_\infty)) \leqslant 1$$
をおく。ただし, $C^\infty(G(\mathbb{R}))$ には $G_{0,\infty}$ と G_∞ がそれぞれ左移動および右移動で作用するものとする。$\pi_{0,\infty}$ (resp. $\pi_{0,\infty}$) に一意的に現れる $K_{0,\infty}$ (resp, K_∞) の有限次元（既約）表現 (τ_0, W_0) (resp. (τ, W)) をとる。さらに, $K_{1,\infty}$ の有限次元（既約）表現 (τ_1, W_1) と $K_{0,\infty}(\cong O(p)\times O(q))$-準同型 $i_{W_0} : W_0 \to W_1$ と $(K_\infty)^0(\cong SO(p)\times SO(q+1))$-準同型 $i_W : W_1\to W$ をとる。ただし, $i_W\circ i_{W_0}$ は zero でないものとする（そうでないと, 後述のゼータ積分も zero になってしまうので)。これらは, 次の (a),(b) を満足するものとする:
$$(a) : \tau_1\left(\kappa\left(\mathrm{diag}(1_p, -1, 1_q, -1)\right)\right) \text{ の } i_{W_0}(W_0) \text{ への制限は自明である;}$$
$$(b) : \tau_1\left(\kappa\left(\mathrm{diag}(1_{p-1}, r_\theta, 1_{q+1})\right)\right) = \mathrm{id}_{W_1} \quad \forall\, r_\theta := \begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}.$$

(2.2)Eisenstein-級数. f を $\pi^*_{0,\infty}$ に属す W_0-値の尖点的保型形式とする。言い換えると, $(\mathfrak{g}_0, K_{0,\infty})$-準同型 $\pi^*_{0,\infty} \hookrightarrow \mathcal{A}^{cusp}(G_0(\mathbb{Q})\backslash G_0(\mathbb{A}))$ の $K_{0,\infty}$-埋め込み $W^*_0 \hookrightarrow \pi^*_{0,\infty}$ による引き戻し

$$W^*_0 \hookrightarrow \pi^*_{0,\infty} \hookrightarrow \mathcal{A}^{cusp}(G_0(\mathbb{Q})\backslash G_0(\mathbb{A}))$$

を考える。ここで, $\mathcal{A}^{cusp}(G_0(\mathbb{Q})\backslash G_0(\mathbb{A}))$ は $G_0(\mathbb{A})$-上の尖点的保型形式の空間とする。Eisenstein-級数を定義するために, まず, "holomorphic section" $\Psi(f, s; g_1)$ を

$$\Psi(f,s;g_1) := \tau_1(k_{1,\infty}(g_1)^{-1}) i_{W_0}(f(\beta(g_1)))|\alpha(g_1)|^s, \qquad (s \in \mathbb{C},\ g_1 \in G_1(\mathbb{A}))$$
$$g_1 = m_1(\beta(g_1), \alpha(g_1)) n_1(g_1) k_{1,\infty}(g_1) k^*_{1,\mathrm{f}}(g_1)$$
$$m_1(\beta(g_1), \alpha(g_1)) \in M_1(\mathbb{A}),\ n_1(g_1) \in N_1(\mathbb{A}),$$
$$k_{1,\infty}(g_1) \in K_{1,\infty},\ k^*_{1,\mathrm{f}}(g_1) \in K^*_{1,\mathrm{f}}$$

で定義する。ここで $\Psi(f, s; g_1)$ の定義が g_1 の分解によらないことは, **(2.1)**(a) によって保証される。この $\Psi(f, s; g_1)$ を用いて, W_1-値の Eisenstein-級数

$$E(f,s;g_1) : \left\{ s \in \mathbb{C} | Re(s) > \frac{m}{2} \right\} \times G_1(\mathbb{A}) \to W_1$$

が

$$E(f,s;g_1) := \sum_{\gamma_1 \in P_1(\mathbb{Q})\backslash G_1(\mathbb{Q})} \Psi(f, s + \frac{m}{2}; \gamma_1 g_1)$$

で定義される。$E_1(f, s; g_1)$ は全 s-平面に有理型に解析接続され, 極以外では $G_1(\mathbb{A})$ 上の保型形式を定める (cf. [MW, II.1.5, IV.1])。

(2.3) ゼータ積分. F を W^*-値の π_∞ に属す尖点的保型型式とする:

$$F : W \hookrightarrow \pi_\infty \hookrightarrow \mathcal{A}^{cusp}(G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A})).$$

本稿では, 次のような $F(g)$ と $E(f, s; g_1)$ の Rankin-Selberg convolution

$$Z_{F,f}(s) := \int_{G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A})} \langle E(f, s - \frac{1}{2}; g), i^*_W(F(g)) \rangle \, dg$$

で定義されるゼータ積分を考える。ここで $\langle , \rangle$ は W_1 と W^*_1 との間の標準的な pairing を表すものとする。

(2.4) 大域的新谷関数と基本等式. 上のベクトル値尖点的保型形式, F および f によって

$$W^*_0 \boxtimes W \hookrightarrow \mathcal{A}^{cusp}(G_0(\mathbb{Q})\backslash G_0(\mathbb{A})) \boxtimes \mathcal{A}^{cusp}(G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A}))$$

が定まる。これと

$$\mathcal{P} : \mathcal{A}^{cusp}(G_0(\mathbb{Q})\backslash G_0(\mathbb{A})) \boxtimes \mathcal{A}^{cusp}(G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A})) \longrightarrow C^\infty(G(\mathbb{A}))$$
$$\mathcal{P}(\phi_1 \otimes \phi_2)(g) := \int_{G_0(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})} \phi_1(g_0)\phi_2(g_0 g) \, dg_0 \qquad (g \in G(\mathbb{A}))$$

とを合成して, $C^\infty(G(\mathbb{A})) \otimes W_0 \otimes W^*$ の元を得る。この $G(\mathbb{A})$ 上の $W_0 \otimes W^*$-値関数を (F, f) に付随する大域的新谷関数と呼んで $W_{F,f}(g)$ であらわす。もし, $W_{F,f}$ が $G(\mathbb{A})$ 上恒等的に zero でないならば 条件 (★) の下で

$$W_{F,f}(g_\infty g_\mathrm{f}) = W^{(\infty)}_{F,f}(g_\infty) W^{(\mathrm{f})}_{F,f}(g_\mathrm{f}), \quad (g_\infty, g_\mathrm{f}) \in G(\mathbb{R}) \times G(\mathbb{A}_f),$$

と分解する（結果的に (★) において等号が成立する)。次の Proposition (Basic Identity) は，通常の unfolding technique で示される (cf. [MS-1, Theorem (1.5)])。

Proposition.

$$Z_{F,f}(s)=\int_{G_0(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})}\epsilon_1\circ(i_{W_0}\boxtimes(\tau_1^*(k_{1,\infty})\circ i_W^*))\,W_{F,f}(\beta(g)^{-1}g)|\alpha(g)|_{\mathbb{A}}^{s+(m-1)/2}\,dg.$$

ここで，$\epsilon_1 : W_1\otimes W_1^*\to\mathbb{C}$ は W_1 と W_1^* の間の自然な pairing が引き起す $\mathbb{C}$-線型写像である。

さて，上述のように $W_{F,f}=W_{F,f}^{(\infty)}W_{F,f}^{(\mathrm{f})}$ と分解しているときには，$Z_{F,f}(s)$ も

$$\begin{aligned}Z_{F,f}(s)&=Z_{F,f}^{(\infty)}(s)Z_{F,f}^{(\mathrm{f})}(s)\\ Z_{F,f}^{(\infty)}(s)&:=\int_{G_0(\mathbb{R})\backslash G(\mathbb{R})}\epsilon_1\circ(i_{W_0}\boxtimes\tau_1^*(k_{1,\infty})\circ i_W^*)\,W_{F,f}^{(\infty)}(\beta(g_\infty)^{-1}g_\infty)\\ &\qquad\times|\alpha(g_\infty)|_\infty^{s+(m-1)/2}\,dg_\infty.\\ Z_{F,f}^{(\mathrm{f})}(s)&:=\int_{G_0(\mathbb{A}_f)\backslash G(\mathbb{A}_f)}W_{F,f}^{(\mathrm{f})}(\beta(g_{\mathrm{f}})^{-1}g_{\mathrm{f}})|\alpha(g_{\mathrm{f}})|_{\mathbb{A}_f}^{s+(m-1)/2}\,dg_{\mathrm{f}},\end{aligned}$$

と分解する。

(2.5) $Z_{F,f}^{(\mathrm{f})}(s)$ **と standard L-関数.** S および S_0 が "maximal" で，F (resp. f) が $\otimes'_{p<\infty}\mathcal{H}_p$(resp. $\otimes'_{p<\infty}\mathcal{H}_{0,p}$)-eigen form であるとする。このとき

$$Z_{F,f}^{(\mathrm{f})}(s)=\frac{L(F,s)}{L(f,s+1/2)}\begin{cases}1, & m\equiv 0 \mod 2,\\ \zeta(2s)^{-1}, & m\equiv 1 \mod 2,\end{cases}$$

となる (cf. [MS-2, Theorem (2.11)])。ここで，$L(F,s)=\prod_{p<\infty}L_p(F,s)$ は F の standard L-関数である（「分岐」素点 p での $L_p(F,s)$ の定義は [MS-2, §1.4] 参照)。$L(f,s)$ も同様。したがって，$Z_{F,f}^{(\infty)}(s)$ は π_∞, $\pi_{0,\infty}$ から定まるべき Γ-因子と関係するはずである（現状では，「関係する」という甚だ曖昧な述べ方しかできないが)。次節で $Z_{F,f}^{(\infty)}(s)$ の計算例を述べる。

§ 3 . ゼータ 積分の archimedean part の計算

(3.1) 積分の変形. 今しばらく，(p,q) を一般としておく。ただし $q>0$ とする。$q>0$ のときには，

$$G_0(\mathbb{R})\backslash G(\mathbb{R})\cong G_0(\mathbb{R})^0\backslash G(\mathbb{R})^0$$

であるから，局所ゼータ積分 $Z_{F,f}^{(\infty)}(s)$ の積分域を $G_0(\mathbb{R})^0\backslash G(\mathbb{R})^0$ にとりかえてよい。$G(\mathbb{R})^0\cong SO_0(p,q+1)$ のベクトル部分群 A を，

$$A:=\left\{a_t:=\kappa\left(\left[\begin{array}{cc|c}1_{p-1} & & \\ & \mathrm{ch}\,2t & -\mathrm{sh}\,2t\\ & 1 & \\ \hline & & 1_q\\ & -\mathrm{sh}\,2t & \mathrm{ch}\,2t\end{array}\right]\right)\,\Big|\,t\in\mathbb{R}\right\}$$

で定義すれば $G(\mathbb{R})^0 = G_0(\mathbb{R})^0 A K_\infty^0$ となる。この分解に応じて $G(\mathbb{R})^0$ の不変測度を分解してやることで (cf. [Fj, Theorem (2.6)])

$$Z_{F,f}^{(\infty)}(s) = \int_0^\infty dt \int_{K_\infty^0} dk\, \epsilon_1 \circ (i_{W_0} \otimes \tau_1^*(k_{1,\infty}(a_t k)) \circ i_W{}^*) \\ \times W_{F,f}^{(\infty)}(\beta(a_t k)^{-1} a_t k)|\alpha(a_t k)|_\infty^{s+(m-1)/2} (\mathrm{sh}\, 2t)^{p-1} (\mathrm{ch}\, 2t)^q,$$

となる。a_t は

$$a_t = m_1(1_m, \frac{1}{\mathrm{ch}\, 2t}) n_1 \kappa \left(\left[\begin{array}{cc|c} 1_{p-1} & & \\ & u & \\ \hline & & 1_{q+1} \end{array} \right] \right), \quad (n_1, u) \in N_1(\mathbb{R}) \times SO(2)$$

と $G_1(\mathbb{R})$ の中で Iwasawa 分解される。これより, さらに

$$Z_{F,f}^{(\infty)}(s) = \int_0^\infty dt \int_{K_\infty^0} dk\, \epsilon_1 \circ (i_{W_0} \otimes \tau_1^*(k_{1,\infty}(a_t)k) \circ i_W{}^*)) \\ \times \tau^*(k^{-1}) W_{F,f}^{(\infty)}(a_t)(\mathrm{ch}\, 2t)^{-s-(m-1)/2} (\mathrm{sh}\, 2t)^{p-1} (\mathrm{ch}\, 2t)^q,$$

と変形できる。最後に, i_W が K_∞^0-準同型であることと条件 (b) を用いると

$$Z_{F,f}^{(\infty)}(s) = \int_0^\infty \epsilon_1 \circ (i_{W_0} \otimes i_W{}^*) W_{F,f}^{(\infty)}(a_t)(\mathrm{sh}\, 2t)^{p-1} (\mathrm{ch}\, 2t)^{-s-(p-q-1)/2} dt,$$

を得る。

(3.2) 実新谷関数. したがって, $Z_{F,f}^{(\infty)}(s)$ を計算するには, $W_{F,f}^{(\infty)}(a_t)$ の明示形が分かれば良い。さて, $W_{F,f}^{(\infty)}$ は, ある $\Phi \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}, K_{0,\infty} \times K_\infty}(\pi_{0,\infty}^* \boxtimes \pi_\infty, C^\infty(G_\infty))$ の $W_0{}^* \boxtimes W \hookrightarrow H_{\pi_0}^* \boxtimes H_\pi$ による引き戻しとして得られることに注意する。ここで, $\pi_{0,\infty}^*$ および π_∞ の表現空間をそれぞれ $H_{\pi_0}^*, H_\pi$ で表した。Φ が尖点保型形式の空間を経由するか否かは別にして, とにかくこのようにして得られる, G_∞ 上の $W_0 \otimes W^*$-値のある種の球関数 $W^{(\infty)}(g_\infty)$ を 実新谷関数と呼ぶことにしよう。[Ha],[Mo-1],[Mo-2] では, それぞれ $(p,q) = (2,3), (2,2), (3,1)$ の場合にいくつかの系列の π_∞, $\pi_{0,\infty}$ に対してこれが計算されている。

$W^{(\infty)}(a_t)$ の計算方法について簡単に説明する。Φ は,

$$\tilde{\Phi} : H_\pi \to \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}_0, K_{0,\infty}}(\pi_{0,\infty}^*, C^\infty(G(\mathbb{R})))$$

なる $(\mathfrak{g}, K_\infty)$-準同型を定める。W の基底 $\{w_k\}_k$ と $H_{\pi_0} = (H_{\pi_0}^*)^*$ の基底 $\{v_i\}_{i \in I}$ をとってやると,

$$\tilde{\Phi}(w_k)(g_\infty) = \sum_{i \in I} \phi_{i,k}(g_\infty) \otimes v_i, \quad \phi_{i,k} \in C^\infty(G_\infty), g_\infty \in G_\infty$$

と（記号的に）書ける。Casimir 作用素と Schmid 作用素により $\phi_{i,k}(g_\infty)$ たちの満たす差分-微分方程式系ができる。それを解くことで $W^{(\infty)}(a_t)$ の明示公式が求まる。

(3.3) π_∞, (τ, W) のとり方. 以下, $(p,q) = (3,1)$ とする。$G_{0,\infty}$(resp. G_∞) の既約許容表現 $\pi_{0,\infty}$ (resp. π_∞) と その部分 $K_{0,\infty}$(resp. K_∞)-表現 $(\tau_0, W_0), (\tau, W)$ を (2.1) の (★), (a),(b) を満たすようにとらねばならない。

まず $(\pi_+, H_{\pi,+}) = \pi(\lambda, \nu_J)$ $(\lambda \in \mathbb{Z}, \lambda \geqslant 2, \nu_J \in \mathbb{C})$ を $G_\infty^0 \cong SO_0(3,2)$ の長い単純ルートに対応した放物部分群 $P = LN$ より誘導した一般化主系列表現とする。ただし, P の Levi 部分群 L は $\mathbb{R}_{>0} \times SL(2,\mathbb{R})$ に同型で ν_J は $\mathbb{R}_{>0}$ の quasi-character のパラメータ, λ は $SL(2,\mathbb{R})$ の（正則）離散系列の Blattner parameter である（講演では, 誤って $L \cong \mathbb{R}_{>0} \times SO_0(2,1)$ と述べてしまった, 訂正します。尚, 二重被覆 $Sp(2,\mathbb{R}) \to SO_0(3,2)$ による L の引き戻しは $\mathbb{R}^* \times SL(2,\mathbb{R})$ に同型で, P の引き戻しは $Sp(2,\mathbb{R})$ の Jacobi 型放物部分群である）。$\gamma := \kappa(\mathrm{diag}(1_4, -1, 1) \in G_{0,\infty}$ とおく。

$$H_\pi := \mathrm{Ind}(SO_0(3,2) \rtimes \langle\gamma\rangle \uparrow SO_0(3,2), \pi_+) = H_{\pi,+} \oplus \pi(\gamma) H_{\pi,+},$$

とおくと

$$H_\pi|_{SO_0(3,2)} \cong \pi(\lambda, \nu_J) \oplus \pi(-\lambda, \nu_J)$$

となる。さらに, -1_5 を H_π の上に自明に作用させて $G_\infty \cong O(3,2)$ の表現を得る。これを, π_∞ として取って, $(\pi_\infty(\lambda, \nu_J), H_\pi)$ と書こう。$w_+(\neq 0) \in H_{\pi,+}$ を

$$\pi_+(\kappa(\mathrm{diag}(1_4, r_\theta))w_+ = \exp(\sqrt{-1}\lambda\theta)w_+, \quad r_\theta := \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix},$$

で定数倍を除いて特徴づけられるベクトルとする。

$$(\tau, W) := \mathbb{C}w_+ \oplus \mathbb{C}w_-, \qquad w_- := \pi_\infty(\gamma)w_+ \in H_\pi$$

で (τ, W) を定める。

(3.4) $\pi_{0,\infty}$, τ_0 のとり方. まず (π_0, H_{π_0})（$\nu \in \mathbb{C}$）を $G_{0,\infty}^0 \cong SO_0(3,1)$ の spherical な既約主系列表現する。ここで, ν は 無限小指標を決めるパラメータである。H_{π_0} を γ による共役が引き起こす $G_{0,\infty}^0$ の外部自己同型で twist したものは, もとの H_{π_0} に同型である。すなわち, 同型 $I : H_{\pi_0} \cong H_{\pi_0}$ が存在して

$$I \circ \pi_0(x) = \pi_0(\gamma x \gamma^{-1}) \circ I, \qquad \forall x \in G_{0,\infty}^0$$

がなりたつ。よって, $\pi_0(\gamma) := I$ とおくことで (π_0, H_{π_0}) は $G_{0,\infty}^0 \rtimes \langle\gamma\rangle$ の表現にまで延長される。さらに -1_4 を自明に作用させて, $G_{0,\infty} \cong O(3,1)$ の表現を得る（講演の時とは, 若干変更した）。これを, $\pi_{0,\infty}$ として取り, $(\pi_{0,\infty}(\nu), H_{\pi_0})$ と書く。w_0 を $SO_0(3,1)$-spherical vector とする。必要なら, I を $-I$ にとりかえて $Iw_0 = w_0$ とする。そうしておいて $(\tau_0, W_0) := \mathbb{C}w_0$ とおく。

(3.5) (τ_1, W_1), i_{W_0}, i_W のとり方. $W_1 = \mathbb{C}^2$ として, その上に $K_{1,\infty}$ の作用 τ_1 を

$$\tau_1(\kappa(\mathrm{diag}(u_1, r_\theta)))(a,b) = (\exp(\sqrt{-1}\lambda\theta)a, \exp(-\sqrt{-1}\lambda\theta)b),$$

$$\forall u_1 \in SO(4),\ \forall r_\theta := \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix},$$

$$\tau_1(\gamma)(a,b) = (b,a), \qquad \tau_1(\mathrm{diag}(1_3, -1, 1_2))(a,b) = (a,b),$$

で決める。さらに $i_{W_0} : W_0 \ni aw_0 \mapsto (a,a) \in W_1$, $i_W : W_1 \ni (a,b) \mapsto aw_+ + bw_- \in W$ $(a, b \in \mathbb{C})$ と定めると, 確かに i_{W_0} は $K_{0,\infty}(\cong O(3) \times \{\pm 1\})$-準同型で, i_W は $(K_\infty)^0(\cong SO(3) \times SO(2))$-準同型であって, 条件 $(a), (b)$ が満たされる。

(3.6) 結論. 上で選んだ, $\pi_{0,\infty}$, π_∞, (τ_0, W_0), (τ, W), i_{W_0}, i_W に対して, $W^{(\infty)}$ はある $\phi \in C^\infty(G_\infty)$ を用いて

$$W^\infty(g_\infty) = \phi(g_\infty) w_0 \otimes w_+^* + \phi(\gamma^{-1} g_\infty \gamma) w_0 \otimes w_-^*$$

と書ける。ここで, $w_+^*, w_-^* \in W^*$ は $w_+, w_- \in W$ の双対基底である。$\phi(a_t)$ は先に述べた差分-微分方程式系を解くことで求められ, 同時に我々の $\pi_{0,\infty}$, π_∞ が $(\bigstar)$ を満たすことがいえる。$\psi(t) := |\tanh 2t| \times \phi(a_t)$, $(t \in \mathbb{R})$ は偶関数で, $y = (\mathrm{ch}\, 2t)^{-2}$ の関数と見ると

$$\left\{ y \prod_{k=1}^{4} \left(y\frac{d}{dy} + \alpha_k \right) - \prod_{k=1}^{4} \left(y\frac{d}{dy} - \gamma_k \right) \right\} \psi(y) = 0,$$

$$\begin{aligned} &\alpha_1 := (-1)/2; && \alpha_2 := 0; \\ &\alpha_3 := (-2\lambda + \nu)/4; && \alpha_4 := (-2\lambda - \nu)/4; \\ &\gamma_1 := (\nu_J + \lambda + 2)/4; && \gamma_2 := (\nu_J + \lambda + 4)/4; \\ &\gamma_3 := (-\nu_J + \lambda + 2)/4; && \gamma_4 := (-\nu_J + \lambda + 4)/4. \end{aligned}$$

なる一般超幾何微分方程式を満たす。これの $y = 1 (\leftrightarrow t = 0)$ での特性根は $1/2, 0, 1, 2$ である。$\phi(a_t)$ が $t = 0$ で滑らかでなくてはならないことを考えると, 特性根 $1/2$ に対応する解のみが適合する。E. Nörlund [N, p.310, (2.44)] によると, それは, 定数倍を除いて

$$\psi(t) = \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \prod_{k=1}^{4} \frac{\Gamma(\gamma_k - s)}{\Gamma(1 - \alpha_k - s)} \left(\frac{1}{\mathrm{ch}^2 2t} \right)^s ds,$$

なる Mellin-Barnes 型の積分で与えられる。ここで, $\sigma \in \mathbb{R}$ は $\sigma < Re(\alpha_k)$ $(1 \leqslant k \leqslant 4)$ をみたすようにとる。この積分は Meijer の G-関数という特殊関数たちの一つである (cf. [Er, Ch.V]). これを (3.1) の最後の式に代入することで次の定理を得る。

Theorem. $\pi_{0,\infty} := \pi_{0,\infty}(\nu)$, $\pi_\infty := \pi_\infty(\lambda, \nu_J)$, $(\tau_0, W_0), (\tau, W)$, (τ_1, W_1), i_{W_0}, i_W を上の通りとする。これらから生ずる実新谷関数を $W^{(\infty)} : G_\infty \to W_0 \otimes W^*$ と書くとき, $W^{(\infty)}$ に付随する局所ゼータ積分 $Z^{(\infty)}(W^{(\infty)}; s)$ を

$$\begin{aligned} Z^{(\infty)}(W^{(\infty)}; s) := &\int_{G_0(\mathbb{R}) \backslash G(\mathbb{R})} \epsilon_1 \circ (i_{W_0} \boxtimes \tau_1^*(k_{1,\infty}) \circ i_W^*)\, W^{(\infty)}(\beta(g_\infty)^{-1} g_\infty) \\ &\times |\alpha(g_\infty)|_\infty^{s + (4-1)/2}\, dg_\infty, \end{aligned}$$

で定義する。すると $C \in \mathbb{C}$ を定数として次が成立する。

$$
\begin{aligned}
&Z^{(\infty)}(W^{(\infty)}; s)\\
=&C \times \frac{\Gamma((2s+\nu_J+\lambda-1)/4)\Gamma((2s+\nu_J+\lambda+1)/4)}{\Gamma((2s+3)/4)\Gamma((2s+1)/4))}\\
&\qquad \times \frac{\Gamma((2s-\nu_J+\lambda-1)/4)\Gamma((2s-\nu_J+\lambda+1)/4)}{\Gamma((2s+2\lambda+\nu+1)/4)\Gamma((2s+2\lambda-\nu+1)/4)}\\
=&C \times \pi^{1/2}2^{-(s+\lambda-5/2)}\\
&\quad \times \frac{\Gamma((2s+\nu_J+\lambda-1)/2)\Gamma((2s-\nu_J+\lambda-1)/2)}{\Gamma((2s+1)/2)\Gamma((2s+2\lambda+\nu+1)/4)\Gamma((2s+2\lambda-\nu+1)/4)}.
\end{aligned}
$$

(二つ目の等式は, Γ-関数の倍角公式 $\Gamma(s)\Gamma(s+1/2) = 2^{1-2s}\pi^{1/2}\Gamma(2s)$ による。)

注意 Tsuzuki [T2] では, [T1] の計算に基づき $Z^{(\infty)}(W^{(\infty)}; s)$ の計算が, 実階数 1 のユニタリ群に対して行われている。ここでの定式化や計算も [T2] に倣った所が多い。

References

[Er] A. ERDELYI *et. al*, *Higher Transcendental Functions, vol. I*, McGraw-Hill (1953).

[Fj] M. FLENSTED-JENSEN, Discrete series for semisimple symmetric spaces , Ann. Math. **111** (1980), 253-311.

[Ha] T. HAYATA, Shintani functions on $SU(2,2)$, Koukyuroku. RIMS Kyoto University. **1002** (1997), 160-168. in Japanese.

[Mo-1] T. MORIYAMA, Spherical functions with respect to the semisimple symmetric pair $(Sp(2,\mathbb{R}), SL(2,\mathbb{R}) \times SL(2,\mathbb{R}))$, J. Math. Sci. Univ. Tokyo.**6** (1999), 127-179.

[Mo-2] T. MORIYAMA, Spherical functions for the semisimple symmetric pair $(Sp(2,\mathbb{R}), SL(2,\mathbb{C})))$, preprint (2000).

[MS-1] A. MURASE AND T. SUGANO, Shintani function and its application to automorphic L-functions for classical groups I, the orthogonal group case , Math. Ann.**299** (1994), 17-56.

[MS-2] A. MURASE AND T. SUGANO, On standard L-functions attached to automorphic forms on definite orthogonal groups , Nagoya Math. J. **152** (1998), 57-96.

[MW] C. MOEGLIN AND J.-L. WALDSPRUGER, *Spectral decomposition and Eisenstein series*, Cambridge University Press (1995).

[N] N. E. NÖRLUND, Hypergeometric functions , Acta. Math. **94** (1955), 289-349.

[T1] M. TSUZUKI, Real Shintani functions for a symmetric pair $(U(n,1), U(n-1,1) \times U(1))$, preprint (1996)

[T2] M. TSUZUKI, Archimedean local zeta integrals arising from certain Rankin-Selberg integrals on real rank one unitary groups, preprint (1997)

GRADUATE SCHOOL OF MATHEMATICAL SCIENCES, THE UNIVERSITY OF TOKYO, 3-8-1 KOMABA MEGURO-KU, TOKYO 153-8914, JAPAN

E-mail address: moriyama@ms318uo.ms.u-tokyo.ac.jp