数理解析研究所講究録
1173 巻 2000 年 22-33

Hecke Eigenvalues for Real Quadratic Fields

立命館大学理工学研究科　岡田 薫 (Kaoru Okada)

F を類数が 1 より大きい総実代数体とする. このとき F 上の Hilbert cusp forms の空間 $\mathcal{S}_k(\mathfrak{c},\psi)$ 及び, それに作用する Hecke 作用素 $T(\mathfrak{a})$ について考える. ここで次のような自然な疑問が浮かぶ: "類数が 1 より大きいということが Hecke 作用素の固有値に影響を及ぼしているのだろうか?" 例えば F の各 ideal 類に対して, 類の各元に対応する Hecke 作用素の固有値たちは, 類ごとになんらかの共通する性質を持つのであろうか?

そのような疑問について考えるために、まずは固有値のデータを見てみたいということになるのであるが, これまで類数が 1 より大きい場合には Hecke 作用素の固有値が具体的に計算された例がないようである. そこで今回 F が特に実 2 次体の場合に trace formula を用いて Hecke 作用素の固有値を具体的に計算してみた. そしてその固有値についてデータをもとに考察したところ, 特に単項類については興味深い現象が見られた.

本稿では trace formula の計算方法について簡単に説明した後, $F=\mathbf{Q}(\sqrt{401})$ (類数は 5) の場合に Hecke 作用素の固有多項式をあたえ, そのうえでそのデータから読み取れる固有値の性質について述べる. (詳しくは [Okada] を参照されたい.)

1 Hilbert cusp forms and Hecke operators

この section では, 対象となる Hilbert cusp forms の空間, 及びそれに作用する Hecke 作用素の定義について述べる. その際 formulation は [Shimura, §2] に従う. (ただし level $\mathfrak{c}$ は F の maximal order $\mathfrak{o}_F$ に限定する.)

F を g 次総実代数体とする. $\mathfrak{d}_F$, D_F をそれぞれ F の $\mathbf{Q}$ 上の different, discriminant とする. $I(F)$ を F の ideal 群とする. $P(F)$, $Cl(F)$, h_F を F の 単項 ideal 群, ideal 類群, 類数とする (狭義のものはそれぞれ $P^+(F)$, $Cl^+(F)$, h_F^+ で表す). $\mathbf{a}$, $\mathbf{h}$ をそれぞれ F の archimedean primes, nonarchimedean primes 全体の集合とする. $F_{\mathbf{A}}$ を F の adele 環, $F_{\mathbf{A}}^\times$ を idele 群とする. $F_\mathfrak{p}$ の prime element を $\pi_\mathfrak{p}$ と書く. ここで $G=GL_2(F)$ とおき, G の adelization を $G_{\mathbf{A}}$ と表す. $F_\mathbf{a}$, $F_\mathbf{h}$, F_v 等で $F_{\mathbf{A}}$ の $\mathbf{a}$, $\mathbf{h}$, v-part 等を表すものとする; G の場合も同様とする.

まず $\alpha=\left(\begin{smallmatrix} a & b\\ c & d\end{smallmatrix}\right)\in G_{\mathbf{a}+}=\{x\in G_\mathbf{a}\mid \det(x)\gg 0\}$, $z\in H^g$, $k\in\mathbf{Z}^g$, H^g 上の複素数値関数 f について,

$$\alpha(z)=\big((a_vz_v+b_v)/(c_vz_v+d_v)\big)_{v\in\mathbf{a}},$$
$$J_k(\alpha,z)=\prod_{v\in\mathbf{a}}\big(\det(\alpha_v)^{-k_v/2}(c_vz_v+d_v)^{k_v}\big),$$
$$(f\|_k\alpha)(z)=J_k(\alpha,z)^{-1}f(\alpha(z))$$

とおく (H は複素上半平面). いま $\tilde{\mathcal{S}}_k$ を次の ($\mathrm{i_a}$), ($\mathrm{i_b}$) をみたす H^g 上の複素数値正則関数 f 全体とする:

($\mathrm{i_a}$) ある正の整数 N が存在して，すべての $\gamma \in SL_2(\mathfrak{o}_F) \cap (1_2 + N \cdot M_2(\mathfrak{o}_F))$ について $f\|_k\gamma = f$ をみたす．

($\mathrm{i_b}$) 任意の $\alpha \in G \cap G_{\mathbf{a}+}G_{\mathbf{h}}\,(\subset G_{\mathbf{A}})$ に対して，

$$(f\|_k\alpha)(z) = \sum_{0 \ll \xi \in L_\alpha} c_\alpha(\xi)\exp(2\pi\sqrt{-1}\sum_{v \in \mathbf{a}} \xi_v z_v)$$

をみたす F の lattice L_α 及び $c_\alpha(\xi) \in \mathbf{C}$ が存在する．

さてこれより adelic な Hilbert cusp forms の空間を定義する．(類数が 1 より大きい場合には adelic な取り扱いが不可欠である．) まず $\delta_{\mathbf{h}}\mathfrak{o}_{\mathbf{h}} = \mathfrak{d}_{\mathbf{h}}$ をみたす $\delta_{\mathbf{h}} \in F_{\mathbf{h}}$ をとる (ここで $\mathfrak{o}_\mathfrak{p}$, $\mathfrak{d}_\mathfrak{p}$ をそれぞれ $\mathfrak{o}_F$, $\mathfrak{d}_F$ の $F_\mathfrak{p}$ における topological closure とし，$\mathfrak{o}_{\mathbf{h}} = \prod_{\mathfrak{p}\in\mathbf{h}} \mathfrak{o}_\mathfrak{p}$, $\mathfrak{d}_{\mathbf{h}} = \prod_{\mathfrak{p}\in\mathbf{h}} \mathfrak{d}_\mathfrak{p}$ とおく)．そして

$$Y_{\mathbf{h}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \delta_{\mathbf{h}} \end{pmatrix} M_2(\mathfrak{o}_{\mathbf{h}}) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \delta_{\mathbf{h}} \end{pmatrix}^{-1} \cap G_{\mathbf{h}},$$

$$W_{\mathbf{h}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \delta_{\mathbf{h}} \end{pmatrix} GL_2(\mathfrak{o}_{\mathbf{h}}) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \delta_{\mathbf{h}} \end{pmatrix}^{-1},$$

$$Y = G_{\mathbf{a}+}Y_{\mathbf{h}}, \qquad W = G_{\mathbf{a}+}W_{\mathbf{h}}$$

とおく．ここで位数有限な F の Hecke character ψ で，特に $\psi(\mathfrak{o}_{\mathbf{h}}^\times) = \{1\}$ (すなわち conductor の nonarchimedean part が $\mathfrak{o}_F$) をみたすものをとる．このとき $\mathcal{S}_k(\mathfrak{o}_F, \psi)$ を次の ($\mathrm{ii_a}$), ($\mathrm{ii_b}$) をみたす $G_{\mathbf{A}}$ 上の複素数値関数 $\mathbf{f}$ 全体とする:

($\mathrm{ii_a}$) $s \in F_{\mathbf{A}}^\times$, $\alpha \in G$, $w \in W_{\mathbf{h}}$ に対して，$\mathbf{f}(s\alpha x w) = \psi(s)\mathbf{f}(x)$ が成り立つ ($x \in G_{\mathbf{A}}$)．

($\mathrm{ii_b}$) 任意の $x \in G_{\mathbf{h}}$ に対して，$f_x \in \tilde{S}_k$ が存在して，すべての $u \in G_{\mathbf{a}+}$ について $\mathbf{f}(\det(x)^{-1}xu) = (f_x\|_k u)(\mathbf{i})$ が成り立つ．(ここで $\mathbf{i} = (\sqrt{-1}, \ldots, \sqrt{-1}) \in H^g$.)

この $\mathcal{S}_k(\mathfrak{o}_F, \psi)$ の元を weight k, level $\mathfrak{o}_F$, character ψ の (adelic な) **Hilbert cusp form** という．

次に $\mathcal{S}_k(\mathfrak{o}_F, \psi)$ に作用する Hecke 作用素を定義する．まず $R_{\mathbf{C}}(W, Y)$ を W, Y に関する $\mathbf{C}$ 上の Hecke algebra とする．$y \in Y$ について，$WyW = \bigsqcup_{i=1}^m Wy_i$, $(y_i)_{\mathbf{a}} = 1$ と分解し，$\mathbf{f} \in \mathcal{S}_k(\mathfrak{o}_F, \psi)$ について，

$$(\mathbf{f}|WyW)(x) = \sum_{i=1}^m \mathbf{f}(x\det(y_i)y_i^{-1}) \quad (x \in G_{\mathbf{A}})$$

とおく．このとき $\mathbf{f}|WyW \in \mathcal{S}_k(\mathfrak{o}_F, \psi)$ をみたす．この作用を $R_{\mathbf{C}}(W, Y)$ 上に $\mathbf{C}$-linearly に拡張すると，$\mathbf{C}$-algebra としての準同型

$$\phi : R_{\mathbf{C}}(W, Y) \longrightarrow \mathrm{End}_{\mathbf{C}}\big(\mathcal{S}_k(\mathfrak{o}_F, \psi)\big)$$

が得られる．$\phi(R_{\mathbf{C}}(W, Y))$ の元を **Hecke operator** という．

特に F の整 ideal $\mathfrak{a}$ について，

$$T(\mathfrak{a}) = \sum_{\substack{WyW \in W\backslash Y/W \\ \det(y)\mathfrak{o}_F = \mathfrak{a}}} WyW \quad (\in R_{\mathbf{C}}(W, Y))$$

とおく．ここで $\phi(T(\mathfrak{a}))$ も同じく $T(\mathfrak{a})$ と表すことにする．

2 Trace Formula

$\mathcal{S}_k(\mathfrak{o}_F,\psi)$ に作用する Hecke 作用素 $T(\mathfrak{a})$ の trace の公式は, [Saito, Theorem 2.1] によって与えられている. その公式を level が $\mathfrak{o}_F$ の場合に制限し, 誤植等を修正したものが次の theorem である.

Theorem 2.1 (Saito). *F ($\neq \mathbf{Q}$) を g 次総実代数体, ψ を位数有限な F の Hecke character で conductor の nonarchimedean part が $\mathfrak{o}_F$ であるもの, $k=(k_1,\ldots,k_g)\in\mathbf{Z}^g$ を $k_j\geq 2$ でかつ各 $v_j\in\mathbf{a}$ で $\psi_{v_j}(-1)=(-1)^{k_j}$ をみたすものとする. η を $\eta(\mathfrak{b}P(F))=\mathfrak{b}^2P^+(F)$ によって定義される $Cl(F)$ から $Cl^+(F)$ への写像とする. このとき, F の任意の整 ideal $\mathfrak{a}$ について,*

$$\begin{aligned}\operatorname{tr}T(\mathfrak{a}) &= \varepsilon(\mathfrak{a})\delta(\mathfrak{a})\frac{2\zeta_F(2)|D_F|^{3/2}}{(2\pi)^{2g}}\psi\Big(\big(\pi_\mathfrak{p}^{\mathrm{ord}_\mathfrak{p}(\mathfrak{a})/2}\big)_{\mathfrak{p}\in\mathbf{h}}\Big)\Big(\prod_{j=1}^{g}(k_j-1)\Big)\\ &\quad+\varepsilon(\mathfrak{a})(-1)^g2^{-1}\sum_{\mathfrak{m}\in M_\mathfrak{a}}\psi\Big(\big(\pi_\mathfrak{p}^{\mathrm{ord}_\mathfrak{p}(\mathfrak{m})}\big)_{\mathfrak{p}\in\mathbf{h}}\Big)^{-1}\\ &\quad\cdot\sum_{n\in N_\mathfrak{m}}\sum_{s\in S_n}\Big(\prod_{j=1}^{g}\Phi(s_j,n_j,k_j)\Big)\sum_{\Lambda\in R_{sn}}\frac{h(\Lambda)}{h_F[\Lambda^\times:\mathfrak{o}_F^\times]}\\ &\quad+(-1)^{g-1}b(k)\sum_{\lambda\in C(\psi)}\lambda\Big(\big(\pi_\mathfrak{p}^{\mathrm{ord}_\mathfrak{p}(\mathfrak{a})}\big)_{\mathfrak{p}\in\mathbf{h}}\Big)\sum_{\substack{\mathfrak{b}\mid\mathfrak{a}\\ \mathfrak{b}\subset\mathfrak{o}_F\\ \mathfrak{b}\in I(F)}}N(\mathfrak{b}).\end{aligned}\tag{2.1}$$

ここで

- $\varepsilon(\mathfrak{a})$ は $\mathfrak{a}P^+(F)\in\eta(Cl(F))$ のとき 1, そうでないとき 0;
- $\delta(\mathfrak{a})$ は $\mathfrak{a}$ が *square* のとき 1, そうでないとき 0;
- $M_\mathfrak{a}=\{\mathfrak{m}\}$ は $\mathfrak{m}\subset\mathfrak{o}_F$ かつ $\gcd(\mathfrak{m},\mathfrak{a})=\mathfrak{o}_F$ をみたす $\{\mathfrak{m}P(F)\in Cl(F)\mid\mathfrak{m}^2\mathfrak{a}\in P^+(F)\}$ の完全代表系;
- 各 $\mathfrak{m}\in M_\mathfrak{a}$ について, $(n_\mathfrak{m})_F=\mathfrak{m}^2\mathfrak{a}$ かつ $n_\mathfrak{m}\gg 0$ をみたす $n_\mathfrak{m}\in\mathfrak{o}_F$ をとり, $N_\mathfrak{m}=n_\mathfrak{m}E_F$ とおく, ここで E_F は $\{\varepsilon\in\mathfrak{o}_F^\times\mid\varepsilon\gg 0\}/(\mathfrak{o}_F^\times)^2$ の完全代表系とする;
- 各 $n\in N_\mathfrak{m}$ について, $S_n=\{s\in\mathfrak{m}\mid s^2-4n\ll 0\}$;
- s_j, n_j を s, n の $F_\mathbf{a}$ における v_j-*component* とし, α_j, β_j を $X^2-s_jX+n_j$ の 2 根とする; このとき
$$\Phi(s_j,n_j,k_j)=\frac{\alpha_j^{k_j-1}-\beta_j^{k_j-1}}{\alpha_j-\beta_j}n_j^{-(k_j-2)/2};$$
- $K_{sn}=F(\sqrt{s^2-4n})$ とおき, R_{sn} を $\mathfrak{o}_F\subset\Lambda$ かつ $D_{K_{sn}/F}(\Lambda)\mid(s^2-4n)_F\mathfrak{m}^{-2}$ をみたす K_{sn} の *order* Λ 全体とする (ここで $D_{K_{sn}/F}(\Lambda)$ は K_{sn}/F に関する *order* Λ の *relative discriminant* である);
- $h(\Lambda)$ は Λ の類数, すなわち, $h(\Lambda)=|(K_{sn}\otimes_F F_\mathbf{h})^\times/K_{sn}^\times\prod_{\mathfrak{p}\in\mathbf{h}}\Lambda_\mathfrak{p}^\times|$ (ここで $\Lambda_\mathfrak{p}$ は $K_{sn}\otimes_F F_\mathfrak{p}$ における Λ の *topological closure* である);

- $b(k)$ は $k=(2,\ldots,2)$ のとき 1, そうでないとき 0;
- $C(\psi)$ は $\lambda^2=\psi$ をみたす F の *unramified Hecke character* λ 全体とする.

さてこれより (2.1) の右辺の第 2 項の order の類数がはしる部分をより計算しやすい形に変形する.

有限次代数体 F, 及び F の 2 次拡大体 K に対して, $\mathfrak{o}_F$ を含む K の order 全体を $\mathcal{O}_{K/F}$ と表すことにする. このとき

Lemma 2.2. *F を有限次代数体, K を F の 2 次拡大体とする. F の 整 ideal $\mathfrak{c}$ に対して, $\rho(\mathfrak{c})=\mathfrak{o}_F+\mathfrak{c}\mathfrak{o}_K$ とおく. このとき ρ は F の整 ideal 全体から $\mathcal{O}_{K/F}$ への全単射となる.*

ここで ρ^{-1} を c と表し, $\Lambda\in\mathcal{O}_{K/F}$ に対して $c(\Lambda)$ を Λ の **conductor** と呼ぶ.

いま $\mathfrak{p}\in\mathbf{h}$ に対して,

$$\left(\frac{K}{\mathfrak{p}}\right)=\begin{cases}1 & \mathfrak{p}\text{ が } K \text{ で分解するとき},\\ -1 & \mathfrak{p}\text{ が } K \text{ で分解も分岐もしないとき},\\ 0 & \mathfrak{p}\text{ が } K \text{ で分岐するとき}\end{cases}$$

とおく. このとき

Lemma 2.3. *F を有限次総実代数体, K を F の 総虚 2 次拡大体とする. このとき $\Lambda\in\mathcal{O}_{K/F}$ に対して,*

$$h(\Lambda)=h_K\left[\mathfrak{o}_K^\times:\Lambda^\times\right]^{-1}N(c(\Lambda))\prod_{\substack{\mathfrak{p}|c(\Lambda)\\ \mathfrak{p}\in\mathbf{h}}}\left(1-\left(\frac{K}{\mathfrak{p}}\right)N(\mathfrak{p})^{-1}\right)$$

が成り立つ.

上の lemmas から次の proposition が得られる.

Proposition 2.4. 記号は *Theorem* 2.1 と同じとする. このとき

$$\begin{aligned}\operatorname{tr}T(\mathfrak{a})&=\varepsilon(\mathfrak{a})\delta(\mathfrak{a})(-1)^g2^{1-g}\zeta_F(-1)\psi\Big(\big(\pi_\mathfrak{p}^{\mathrm{ord}_\mathfrak{p}(\mathfrak{a})/2}\big)_{\mathfrak{p}\in\mathbf{h}}\Big)\Big(\prod_{j=1}^g(k_j-1)\Big)\\
&\quad+\varepsilon(\mathfrak{a})(-1)^g2^{-g}\sum_{\mathfrak{m}\in M_\mathfrak{a}}\psi\Big(\big(\pi_\mathfrak{p}^{\mathrm{ord}_\mathfrak{p}(\mathfrak{m})}\big)_{\mathfrak{p}\in\mathbf{h}}\Big)^{-1}\sum_{n\in N_\mathfrak{m}}\sum_{s\in S_n}\Big(\prod_{j=1}^g\Phi(s_j,n_j,k_j)\Big)\\
&\quad\cdot L_F(0,\chi_{K_{sn}/F})\Bigg(\prod_{\substack{\mathfrak{p}|\mathfrak{f}_{sn}\\ \left(\frac{K_{sn}}{\mathfrak{p}}\right)=-1\\ \mathfrak{p}\in\mathbf{h}}}\frac{N(\mathfrak{p})^{\mathrm{ord}_\mathfrak{p}(\mathfrak{f}_{sn})+1}+N(\mathfrak{p})^{\mathrm{ord}_\mathfrak{p}(\mathfrak{f}_{sn})}-2}{N(\mathfrak{p})-1}\Bigg)\\
&\quad\cdot\Bigg(\prod_{\substack{\mathfrak{p}|\mathfrak{f}_{sn}\\ \left(\frac{K_{sn}}{\mathfrak{p}}\right)=1\\ \mathfrak{p}\in\mathbf{h}}}N(\mathfrak{p})^{\mathrm{ord}_\mathfrak{p}(\mathfrak{f}_{sn})}\Bigg)\Bigg(\prod_{\substack{\mathfrak{p}|\mathfrak{f}_{sn}\\ \left(\frac{K_{sn}}{\mathfrak{p}}\right)=0\\ \mathfrak{p}\in\mathbf{h}}}\frac{N(\mathfrak{p})^{\mathrm{ord}_\mathfrak{p}(\mathfrak{f}_{sn})+1}-1}{N(\mathfrak{p})-1}\Bigg)\\
&\quad+(-1)^{g-1}b(k)\sum_{\lambda\in C(\psi)}\lambda\Big(\big(\pi_\mathfrak{p}^{\mathrm{ord}_\mathfrak{p}(\mathfrak{a})}\big)_{\mathfrak{p}\in\mathbf{h}}\Big)\sum_{\substack{\mathfrak{b}|\mathfrak{a}\\ \mathfrak{b}\subset\mathfrak{o}_F\\ \mathfrak{b}\in I(F)}}N(\mathfrak{b}),\end{aligned}\tag{2.2}$$

ここで $\mathfrak{f}_{sn} = \left((s^2-4n)_F D_{K_{sn}/F}{}^{-1}\right)^{1/2}\mathfrak{m}^{-1}$, $\chi_{K_{sn}/F}$ は 拡大 K_{sn}/F に対応する *ideal character* である.

3 Computation for real quadratic fields

この section では F が実 2 次体の場合に, (2.2) を計算する方法について簡単に説明する.

$F = \mathbf{Q}(\sqrt{m})$ とおく.(ここで m は square-free integer とする.) F が実 2 次体のときには (2.2) は次の 3 つの factor を除いて容易に計算することができる:

$$\text{(i)}\ \ D_{K_{sn}/F}, \qquad \text{(ii)}\ \ \left(\frac{K_{sn}}{\mathfrak{p}}\right), \qquad \text{(iii)}\ \ L_F(0, \chi_{K_{sn}/F}).$$

よってこの 3 つの factor の求め方について述べる. ただし簡単のためここでは $m \equiv 1 \pmod{8\mathbf{Z}}$ をみたす場合についてのみ取り扱うことにする.

いま $\omega = (1+\sqrt{m})/2$ とおく. $\beta, \gamma \in F$ について, β, γ で生成される $\mathbf{Z}$-加群を $[\beta, \gamma]$ で表す. $\alpha = s^2 - 4n$ とおく. また K_{sn} を単に K と書くことにする. (このとき $K = F(\sqrt{\alpha})$, $0 \gg \alpha \in \mathfrak{o}_F$.) ここで $D_{K/F} = \prod_{\mathfrak{p}\in\mathfrak{h}} D_\mathfrak{p}$ と prime ideal 分解しておく.

最初に, $\mathfrak{p}$ が odd prime (すなわち $\mathfrak{p} \nmid (2)_F$) の場合に $D_\mathfrak{p}$ 及び $\left(\frac{K}{\mathfrak{p}}\right)$ の求め方について述べる. まず $\mathfrak{p}$ が odd より $D_\mathfrak{p}$ は

$$D_\mathfrak{p} = \begin{cases} \mathfrak{o}_F & 2 \mid \mathrm{ord}_\mathfrak{p}(\alpha) \text{ のとき}, \\ \mathfrak{p} & \text{otherwise} \end{cases}$$

と表せるので, これによって $D_\mathfrak{p}$ が決定できる. 一方 $\left(\frac{K}{\mathfrak{p}}\right)$ については Dedekind の判別定理より

$$\left(\frac{K}{\mathfrak{p}}\right) = 0 \Longleftrightarrow \mathfrak{p} \mid D_\mathfrak{p}$$

という関係がなりたっているので, $\mathfrak{p} \nmid D_\mathfrak{p}$ をみたす場合のみ考えればよい. ここで次の proposition が成り立つ.

Proposition 3.1. m を $m \equiv 1 \pmod{4\mathbf{Z}}$ をみたす *square-free positive integer* とし, $F = \mathbf{Q}(\sqrt{m})$ とおく. $K = F(\sqrt{\alpha})$ $(0 \gg \alpha \in \mathfrak{o}_F)$ とし, $\alpha = a_1 + a_2\omega$ $(a_1, a_2 \in \mathbf{Z})$ とおく. $\mathfrak{p}$ を $\mathfrak{p} \nmid D_\mathfrak{p}$ をみたす F の *odd prime ideal* とし, p を $\mathfrak{p}$ の下にある素数とする. $t = \mathrm{ord}_\mathfrak{p}(\alpha)$ とおく. 特に p が $F/\mathbf{Q}$ で分解するとき, $\mathfrak{p} = [p, r+\omega]$ $(r \in \mathbf{Z})$, $l = \mathrm{ord}_p(\gcd(a_1, a_2))$ とおき, $u^2 \equiv m \pmod{p^{t-l+1}\mathbf{Z}}$ かつ $u \equiv -2r-1 \pmod{p\mathbf{Z}}$ をみたす $u \in \mathbf{Z}$ をとる. ここで

$$a = \begin{cases} p^{-2t}\left(a_1^2 + a_1 a_2 + a_2^2(1-m)/4\right) & p \text{ が } F/\mathbf{Q} \text{ で分解も分岐もしないとき}, \\ (mp^{-2})^{t/2}\left(a_1 - a_2(p-1)/2\right) & p \text{ が } F/\mathbf{Q} \text{ で分岐するとき}, \\ p^{-t}\left((p+1)/2\right)\left(2a_1 + a_2(1+u)\right) & p \text{ が } F/\mathbf{Q} \text{ で分解するとき} \end{cases}$$

とおく. このとき

$$\left(\frac{K}{\mathfrak{p}}\right) = \left(\frac{a}{p}\right),$$

ここで $\left(\frac{a}{p}\right)$ は *Legendre symbol* である.

Proposition 3.1 は α が $F_{\mathfrak{p}}^2$ に含まれる必要十分条件を詳しく調べることによって得られる.

次に, $\mathfrak{p}$ が even prime (すなわち $\mathfrak{p} \mid (2)_F$) の場合の $D_{\mathfrak{p}}$ 及び $\left(\frac{K}{\mathfrak{p}}\right)$ の求め方であるが, これについては次の proposition が成り立つ.

Proposition 3.2. m を $m \equiv 1 \pmod{8\mathbf{Z}}$ をみたす *square-free positive integer* とし, $F = \mathbf{Q}(\sqrt{m})$ とおく. $K = F(\sqrt{\alpha})$ $(0 \gg \alpha \in \mathfrak{o}_F)$ とし, $\alpha = a_1 + a_2\omega$ $(a_1, a_2 \in \mathbf{Z})$ とおく. $\mathfrak{p}$ を F の *even prime ideal* とする. いま $\mathfrak{p}^2 \nmid (\alpha)_F$ であると仮定する. ここで $l = (m-1)/8$, $\mathfrak{p} = [2, r+\omega]$ $(r = 0$ *or* $1)$ とおく. さらに

$$A_m = \{(a,b) \in \mathbf{Z}^2 \mid a + b(2l(-1)^r + r) - 1 \in 8\mathbf{Z}\},$$
$$A'_m = \{(a,b) \in \mathbf{Z}^2 \mid a - b(2l - r) - 1 \in 4\mathbf{Z}\}$$

とおく. このとき

$$\left(\frac{K}{\mathfrak{p}}\right) = \begin{cases} 1 & \mathfrak{p} \nmid (\alpha)_F,\ (a_1, a_2) \in A_m \text{ のとき}, \\ -1 & \mathfrak{p} \nmid (\alpha)_F,\ (a_1, a_2) \notin A_m,\ (a_1, a_2) \in A'_m \text{ のとき}, \\ 0 & \textit{otherwise}, \end{cases}$$

及び

$$D_{\mathfrak{p}} = \begin{cases} \mathfrak{o}_F & \left(\frac{K}{\mathfrak{p}}\right) \neq 0 \text{ のとき}, \\ \mathfrak{p}^2 & \left(\frac{K}{\mathfrak{p}}\right) = 0,\ \mathfrak{p} \nmid (\alpha)_F \text{ のとき}, \\ \mathfrak{p}^3 & \mathfrak{p} \mid (\alpha)_F \text{ のとき} \end{cases}$$

をみたす.

ここで Proposition 3.2 における条件 $\mathfrak{p}^2 \nmid (\alpha)_F$ はなんら問題はない. というのは, たとえ α がその条件をみたさなかったとしても, $K = F(\sqrt{\alpha_1})$, $\mathfrak{p}^2 \nmid (\alpha_1)_F$ をみたす $\alpha_1 \in \mathfrak{o}_F$ をとることができるので, その α_1 に対して Proposition 3.2 を適用してやればよい.

最後に, [Shintani] において一般の総実代数体 F に対して開発された "新谷の方法" による $L_F(0, \chi_{K/F})$ の 求め方について述べる.

さて [Okazaki] は新谷公式を F が特に実2次体の場合に適用し, K/F に対応する ideal character の値を Legendre symbol 及び Hilbert symbol で表すことで L-関数の値を計算した. その結果を整理すると次のようになる:

F, m, α, K, a_1, a_2 は Proposition 3.1 と同じとする. ε を 1 よりも大きい F の基本単数とし,

$$\varepsilon_+ = \begin{cases} \varepsilon & \varepsilon \gg 0 \text{ のとき}, \\ \varepsilon^2 & \text{otherwise} \end{cases}$$

とおく. $\varepsilon_+ = e + e'\omega$ をみたす $e, e' \in \mathbf{Z}$ をとる. $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_{h_F^+}$ をすべての μ で $\mathfrak{a}_\mu \subset \mathfrak{o}_F$ をみたす $Cl^+(F)$ の完全代表系とする. $1 \leq \mu \leq h_F^+$ について,

$$d_\mu[d'_\mu, d''_\mu + \omega] = \mathfrak{a}_\mu D_{K/F},$$

$d_\mu, d'_\mu > 0$, $0 \leq d''_\mu < d'_\mu$ をみたす d_μ, d'_μ, $d''_\mu \in \mathbf{Z}$ が一意的に決まる. また s_μ, s'_μ, $Q_\mu \in \mathbf{Z}$ を次のようにとる:

(i) $\mathfrak{a}_\mu D_{K/F} \in P(F)$ のとき,

$$\left(s_\mu + s'_\mu \omega\right)_F = \mathfrak{a}_\mu D_{K/F}$$

をみたす s_μ, s'_μ をとり,

$$Q_\mu = 1$$

とおく.

(ii) $\mathfrak{a}_\mu D_{K/F} \notin P(F)$ のとき, $\gcd(\mathfrak{q}_\mu, (\alpha)_F) = \mathfrak{o}_F$, $\mathfrak{q}_\mu \mathfrak{a}_\mu D_{K/F} \in P(F)$ をみたす F の odd split prime ideal $\mathfrak{q}_\mu$ をとり, $\mathfrak{q}_\mu = [q_\mu, r_\mu + \omega]$ $(q_\mu, r_\mu \in \mathbf{Z})$ と表す. そして

$$\left(s_\mu + s'_\mu \omega\right)_F = \mathfrak{q}_\mu \mathfrak{a}_\mu D_{K/F}$$

をみたす s_μ, s'_μ をとり,

$$Q_\mu = \left(\tfrac{a_1 - a_2 r_\mu}{q_\mu}\right)$$

とおく.

さらに, $1 \leq i \leq d_\mu$, $1 \leq j \leq e' d_\mu d'_\mu$ について,

$$r_{\mu ij} \equiv e' d'_\mu i - (e + e'(d''_\mu + 1))j \pmod{e' d_\mu d'_\mu \mathbf{Z}}$$

をみたす整数 $1 \leq r_{\mu ij} \leq e' d_\mu d'_\mu$ をとり,

$$\begin{aligned}
B_{\mu ij} &= 4^{-1}(e' d_\mu d'_\mu)^{-2}\left((2e + e')(r_{\mu ij}^2 + j^2) + 4 r_{\mu ij} j\right) \\
&\quad - 4^{-1}(e' d_\mu d'_\mu)^{-1}(2e + e' + 2)(r_{\mu ij} + j) \\
&\quad + 12^{-1}(2e + e' + 3), \\
u_{\mu ij} &= (e' d_\mu d'_\mu)^{-1}\left(r_{\mu ij} s_\mu + j\left(e s_\mu + e' s'_\mu \frac{m-1}{4}\right)\right), \\
v_{\mu ij} &= (e' d_\mu d'_\mu)^{-1}\left(r_{\mu ij} s'_\mu + j(e s'_\mu + e' s_\mu + e' s'_\mu)\right)
\end{aligned}$$

とおく. (このとき $u_{\mu ij}, v_{\mu ij} \in \mathbf{Z}$ であることに注意.) ここで F の odd prime ideal $\mathfrak{p}$, $u + v\omega \in \mathfrak{o}_F$ に対して,

$$\chi_{\mathfrak{p}}(u + v\omega) = \begin{cases} \left(\frac{N_{F/\mathbf{Q}}(u+v\omega)}{p}\right) & \mathfrak{p} = (p)_F \text{ のとき}, \\ \left(\frac{u - vr}{p}\right) & \text{otherwise} \end{cases}$$

とおく (ここで p は $\mathfrak{p}$ の下にある素数, r は $\mathfrak{p} = [p, r + \omega]$ をみたす整数). また $D_{K/F}$ を割る F の even prime ideal $\mathfrak{p}$ と $\beta \in \mathfrak{o}_F$ に対して,

$$\chi_{\mathfrak{p}}(\beta) = \begin{cases} (\beta, \alpha)_{F_{\mathfrak{p}}} & \mathfrak{p} \nmid (\beta)_F \text{ のとき}, \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

とおく (ここで $(\ ,\ )_{F_\mathfrak{p}}$ は Hilbert symbol). このとき

$$
\begin{aligned}
L_F(0,\chi_{K/F}) = \sum_{\mu=1}^{h_F^+} &\operatorname{sgn}\bigl(N_{F/\mathbf{Q}}(s_\mu + s'_\mu\omega)\bigr) Q_\mu \\
&\cdot \Biggl(\sum_{i=1}^{d_\mu} \sum_{j=1}^{e' d_\mu d'_\mu} B_{\mu ij} \prod_{\substack{\mathfrak{p}\mid D_{K/F} \\ \mathfrak{p}\in \mathbf{h}}} \chi_\mathfrak{p}(u_{\mu ij} + v_{\mu ij}\omega) \\
&\qquad + \sum_{l=1}^{d_\mu} \frac{2l - d_\mu}{2d_\mu} \prod_{\substack{\mathfrak{p}\mid D_{K/F} \\ \mathfrak{p}\in \mathbf{h}}} \chi_\mathfrak{p}\bigl(l d_\mu^{-1}(s_\mu + s'_\mu\omega)\bigr) \Biggr)
\end{aligned}
\tag{3.1}
$$

が成り立つ.

よって even prime ideal $\mathfrak{p}$ に対して Hilbert symbol $(\beta,\alpha)_{F_\mathfrak{p}}$ $(\alpha,\beta \in \mathfrak{o}_F - \{0\})$ が計算できれば, (3.1) によって $L_F(0,\chi_{K/F})$ を求めることができる. ここで $m \equiv 1 \pmod{8\mathbf{Z}}$ の場合には次の proposition が成り立つ.

Proposition 3.3. m を $m \equiv 1 \pmod{8\mathbf{Z}}$ をみたす *square-free positive integer* とし, $F = \mathbf{Q}(\sqrt{m})$ とおく. F の *even prime ideal* $\mathfrak{p} = [2, r+\omega]$ $(r = 0$ *or* $1)$ をとる. $\beta_1, \beta_2 \in \mathfrak{o}_F - \{0\}$ について, $\beta_j = c_j + d_j\omega$ $(c_j, d_j \in \mathbf{Z})$ とおく. ここで $l_j = \mathrm{Min}\{\mathrm{ord}_2(2c_j + d_j), \mathrm{ord}_2(d_j)\}$ とおき, $u_j^2 \equiv m \pmod{2^{\mathrm{ord}_\mathfrak{p}(\beta_j) - l_j + 5}\mathbf{Z}}$, $u_j \equiv -2r - 1 \pmod{4\mathbf{Z}}$ をみたす $u_j \in \mathbf{Z}$ をとる. そして $t_j = 2^{-\mathrm{ord}_\mathfrak{p}(\beta_j)}(c_j + d_j(1 + u_j)/2)$ とおく. このとき

$$
(\beta_1,\beta_2)_{F_\mathfrak{p}} = (-1)^{(t_1-1)(t_2-1)/4 + \mathrm{ord}_\mathfrak{p}(\beta_1)(t_2^2-1)/8 + \mathrm{ord}_\mathfrak{p}(\beta_2)(t_1^2-1)/8}
$$

である.

4 Numerical Example

この section では, $F = \mathbf{Q}(\sqrt{401})$ の場合に Hecke 作用素の固有値について考察する. このとき F の類数は広義及び狭義ともに 5 である. ここでは特に $k = (2,2)$, ψ が identity character $\mathit{1}$ (すなわち $\psi(F_\mathbf{A}^\times) = \{1\}$) の場合のみ取り扱うことにする.

まず $\mathcal{S}_{(2,2)}(\mathfrak{o}_F, \mathit{1})$ は次のように分解される:

$$
\mathcal{S}_{(2,2)}(\mathfrak{o}_F, \mathit{1}) = \mathcal{S}_{(2,2)}^N(\mathfrak{o}_F, \mathit{1}) \bigoplus \mathcal{S}_{(2,2)}^0(\mathfrak{o}_F, \mathit{1}),
$$

ここで $\mathcal{S}_{(2,2)}^N(\mathfrak{o}_F, \mathit{1})$ は level 401 の "Neben"-type の elliptic cusp forms の空間 $S_2(\Gamma_0(401), (\frac{401}{}))$ からの Base change lift, $\mathcal{S}_{(2,2)}^0(\mathfrak{o}_F, \mathit{1})$ は $\mathcal{S}_{(2,2)}(\mathfrak{o}_F, \mathit{1})$ の "F-proper" な部分空間, すなわち $\mathcal{S}_{(2,2)}^N(\mathfrak{o}_F, \mathit{1})$ の standard な内積による直交補空間である. ここで $\mathcal{S}_{(2,2)}^N(\mathfrak{o}_F, \mathit{1})$ 及び $\mathcal{S}_{(2,2)}^0(\mathfrak{o}_F, \mathit{1})$ は $T(\mathfrak{a})$ の作用で閉じている.

いま $\dim_\mathbf{C} S_2(\Gamma_0(401), (\frac{401}{})) = 32$ より $\dim_\mathbf{C} \mathcal{S}_{(2,2)}^N(\mathfrak{o}_F, \mathit{1}) = 16$. 一方 (2.2) より $\dim_\mathbf{C} \mathcal{S}_{(2,2)}(\mathfrak{o}_F, \mathit{1}) = \mathrm{tr}\, T(\mathfrak{o}_F) = 24$. よって

$$
\dim_\mathbf{C} \mathcal{S}_{(2,2)}^0(\mathfrak{o}_F, \mathit{1}) = 8
$$

である.

さて $T(\mathfrak{a})$ を $\mathcal{S}^N_{(2,2)}(\mathfrak{o}_F, \mathit{1})$ に制限したものは良く知られている elliptic cusp forms の空間の trace formula によって計算することができる．そして $\mathcal{S}^0_{(2,2)}(\mathfrak{o}_F, \mathit{1})$ の部分が今回初めて計算されたところである．よって以後，この空間に対する固有値に注目する．

$\mathcal{S}^0_{(2,2)}(\mathfrak{o}_F, \mathit{1})$ における trace は $\mathcal{S}_{(2,2)}(\mathfrak{o}_F, \mathit{1})$ における trace から $\mathcal{S}^0_{(2,2)}(\mathfrak{o}_F, \mathit{1})$ における trace を引くことによって求まる．そして Hecke の関係式と Newton の公式を用いると trace から固有多項式が得られる．Table 4.1 は F の split prime ideal $\mathfrak{p}$ に対する Hecke 作用素 $T(\mathfrak{p})$ の $\mathcal{S}^0_{(2,2)}(\mathfrak{o}_F, \mathit{1})$ における固有多項式の表である．(ここで $\mathfrak{p}$ の範囲は $N(\mathfrak{p}) \leq 643$ をみたす単項な $\mathfrak{p}$, 及び $N(\mathfrak{p}) \leq 263$ をみたす非単項な $\mathfrak{p}$ である.)

このとき $T([2,\omega])$ の固有値は,

$$c_{ijl} = \frac{1}{40}\Bigg(15 - (-1)^i 5\sqrt{5} + (-1)^{i+j}\sqrt{5}\sqrt{110+10\sqrt{5}}$$
$$+ (-1)^l \sqrt{4900 - (-1)^i 100\sqrt{5} + (-1)^j\left(150 - (-1)^i 10\sqrt{5}\right)\sqrt{110+10\sqrt{5}}}\Bigg)$$

$(0 \leq i, j, l \leq 1)$．ここで $\mathbf{f}|T([2,\omega]) = c_{000}\mathbf{f}$ をみたす $\mathcal{S}^0_{(2,2)}(\mathfrak{o}_F, \mathit{1})$ の primitive form $\mathbf{f}$ をとる．このとき

$$K_{\mathbf{f}} = \mathbf{Q}\left(\sqrt{4900 - 100\sqrt{5} + (150 - 10\sqrt{5})\sqrt{110+10\sqrt{5}}}\right),$$
$$K_{\mathbf{f}}^+ = \mathbf{Q}\left(\sqrt{110+10\sqrt{5}}\right),$$

ここで $K_{\mathbf{f}}$ は $\mathbf{f}$ の Hecke field であり, $K_{\mathbf{f}}^+$ はすべての有理素数 p に対応する Hecke 作用素の固有値 $C_{\mathbf{f}}((p)_F)$ で生成される $K_{\mathbf{f}}$ の部分体である．(このとき $K_{\mathbf{f}}$ の $\mathbf{Q}$ 上の Galois closure は 128 次体である.) ここで

$$D_{K_{\mathbf{f}}/\mathbf{Q}} = 5^4 \cdot 29^2 \cdot 131 \cdot 139,$$
$$D_{K_{\mathbf{f}}^+/\mathbf{Q}} = 5^2 \cdot 29,$$
$$N(D_{K_{\mathbf{f}}/K_{\mathbf{f}}^+}) = 131 \cdot 139.$$

いま Table 4.1 の範囲の split prime ideal $\mathfrak{p}$ について，それに対応する Hecke 作用素 $T(\mathfrak{p})$ の固有値 $C_{\mathbf{f}}(\mathfrak{p})$ によって生成される, $\mathfrak{o}_{K_{\mathbf{f}}^+}$ を含む $K_{\mathbf{f}}$ の order

$$\Lambda(\mathfrak{p}) = \mathfrak{o}_{K_{\mathbf{f}}^+} + C_{\mathbf{f}}(\mathfrak{p})\mathfrak{o}_{K_{\mathbf{f}}^+}$$

を考え, その conductor

$$c(\Lambda(\mathfrak{p})) = \left(D_{K_{\mathbf{f}}/K_{\mathbf{f}}^+}(C_{\mathbf{f}}(\mathfrak{p})) \cdot D_{K_{\mathbf{f}}/K_{\mathbf{f}}^+}{}^{-1}\right)^{1/2}$$

をとってみる．(これは $K_{\mathbf{f}}^+$ の ideal である.) それの norm をとったものの表が Table 4.2 である．

このとき **Table 4.2** の範囲のすべての単項な **split prime ideal** $\mathfrak{p}$ について

$$19 \mid N\bigl(c(\Lambda(\mathfrak{p}))\bigr)$$

をみたしている. よって各 $c(\Lambda(\mathfrak{p}))$ は $(19)_{K_{\mathbf{f}}^+}$ のいずれかの素因子で割れている.

これをもう少し詳しくみてみる. いま

$$\mathfrak{P}_{19} = c(\Lambda([83, 30 + \omega]))$$

とおくと, これは $K_{\mathbf{f}}^+$ の prime ideal で, $(19)_{K_{\mathbf{f}}^+}$ は

$$(19)_{K_{\mathbf{f}}^+} = \mathfrak{P}_{19}\mathfrak{P}'_{19}\mathfrak{P}''_{19}$$

と分解される. ここで $\mathfrak{P}'_{19}$, $\mathfrak{P}''_{19}$ は

$$\mathfrak{P}_{19}\mathfrak{P}'_{19} = [19, 4 + (1+\sqrt{5})/2] \cdot \mathfrak{o}_{K_{\mathbf{f}}^+},$$
$$\mathfrak{P}''_{19} = [19, 14 + (1+\sqrt{5})/2] \cdot \mathfrak{o}_{K_{\mathbf{f}}^+}$$

で決まる $K_{\mathbf{f}}^+$ の prime ideal である. そして実は **Table 4.2** の範囲のすべての単項な **split prime ideal** $\mathfrak{p}$ について

$$\mathfrak{P}_{19} \mid c(\Lambda(\mathfrak{p}))$$

をみたしていることがわかる.

Table 4.1. $\mathbf{Q}(\sqrt{401})$ の split prime ideal $\mathfrak{p}$ に対する $T(\mathfrak{p})|_{S^0_{(2,2)}(\mathfrak{o}_{\mathbf{Q}(\sqrt{401})},1)}$ の固有多項式 $X^8 + a_1X^7 + \cdots + a_7X + a_8$ の係数:

$\mathfrak{p}$	a_1,	a_2,	a_3,	a_4,	a_5,	a_6,	a_7,	a_8
$[2,\ \omega]$	−3,	−10,	28,	37,	−78,	−58,	53,	19
$[5,\ \omega]$	−3,	−18,	41,	111,	−163,	−234,	155,	1
$[7,\ 5+\omega]$	−6,	−12,	120,	−175,	−42,	175,	−83,	11
$[11,\ 7+\omega]$	9,	10,	−101,	−253,	149,	918,	809,	179
$[29,\ 22+\omega]$	13,	−5,	−523,	−408,	8053,	1917,	−48078,	38359
$[41,\ 27+\omega]$	−16,	−90,	2332,	−2437,	−86432,	249407,	263905,	43909
$[43,\ 26+\omega]$	−32,	309,	−148,	−11780,	43156,	18606,	−138350,	−42131
$[47,\ 44+\omega]$	15,	−46,	−1114,	861,	24682,	−30282,	−133239,	211541
$[73,\ 39+\omega]$	4,	−362,	−1343,	36721,	107356,	−1265768,	−1867352,	14282224
$[83,\ 30+\omega]$ *	−32,	92,	5761,	−41264,	−341588,	3084758,	6681459,	−69332531
$[89,\ 60+\omega]$	−10,	−278,	3166,	13505,	−241434,	703443,	−114403,	−611281
$[103,\ 85+\omega]$	27,	−118,	−6456,	−10369,	372198,	1371298,	−3479619,	−15228421
$[109,\ 74+\omega]$	29,	−186,	−10994,	−61417,	448682,	4111874,	7230513,	−1231091
$[113,\ 23+\omega]$	−34,	88,	7570,	−77675,	−156608,	5544655,	−26618987,	40066931
$[149,\ 55+\omega]$	−68,	1775,	−22208,	131704,	−237922,	−810800,	2670928,	1079011
$[151,\ 92+\omega]$	−22,	−151,	5415,	−7430,	−329865,	1334049,	−291087,	−2791879
$[173,\ 110+\omega]$	−11,	−381,	7795,	−37942,	−157229,	2060155,	−6349795,	5629151
$[179,\ 107+\omega]$	−88,	2950,	−45092,	245937,	1261812,	−21112768,	83231088,	−104306576
$[181,\ 21+\omega]$	−7,	−310,	2548,	18965,	−210804,	594832,	−493872,	−100624
$[197,\ 45+\omega]$	40,	168,	−9515,	−110360,	121710,	6701416,	29340685,	31232399
$[223,\ 31+\omega]$	−68,	1453,	−2076,	−317709,	3811290,	−9269721,	−49448362,	130826831
$[229,\ 57+\omega]$	33,	−67,	−8851,	−51342,	253023,	1988777,	−1662381,	−18676169
$[239,\ 206+\omega]$	−53,	1066,	−10574,	54335,	−132516,	96784,	72897,	−69191
$[241,\ 167+\omega]$	−35,	218,	2705,	−15695,	−84085,	59836,	48125,	−30371
$[257,\ 122+\omega]$ *	10,	−1119,	−14842,	336025,	6080144,	−7871441,	−548680256,	−2339785241
$[263,\ 201+\omega]$	−36,	−295,	12183,	91010,	−605219,	−5055489,	−2431643,	17176609
$[337,\ 172+\omega]$ *	−47,	105,	24343,	−327430,	−1820659,	57625757,	−337202462,	582948571
$[379,\ 103+\omega]$ *	−25,	−1214,	26233,	458881,	−6336001,	−81101528,	302094243,	3696976091
$[383,\ 205+\omega]$ *	−63,	286,	61218,	−1739923,	17945914,	−49335124,	−306466744,	1582083824
$[397,\ 197+\omega]$ *	−77,	690,	64185,	−1089907,	−15159265,	255263350,	1030269191,	−910014589
$[421,\ 304+\omega]$ *	48,	−494,	−47086,	−216435,	13127696,	123014259,	−842081917,	−9542329681
$[487,\ 70+\omega]$ *	−25,	−1553,	38867,	743048,	−20170693,	−84273537,	3477790992,	−11951208719
$[499,\ 264+\omega]$ *	−22,	−1402,	39386,	246139,	−13711178,	90023337,	71238749,	−717378001
$[643,\ 474+\omega]$ *	−72,	−896,	147914,	−1370115,	−68019308,	937509055,	3125818491,	−4860460921

* : 単項 ideal

Table 4.2. $\mathbf{Q}(\sqrt{401})$ の split prime ideal $\mathfrak{p}$ に対する $c(\Lambda(\mathfrak{p}))$ の norm:

$\mathfrak{p}$	$N(c(\Lambda(\mathfrak{p})))$
$[2,\ \omega]$	1
$[5,\ \omega]$	1
$[7,\ 5+\omega]$	1
$[11,\ 7+\omega]$	1
$[29,\ 22+\omega]$	1
$[41,\ 27+\omega]$	31
$[43,\ 26+\omega]$	31
$[47,\ 44+\omega]$	31
$[73,\ 39+\omega]$	3^4
$[83,\ 30+\omega]$ *	19
$[89,\ 60+\omega]$	41
$[103,\ 85+\omega]$	23^2
$[109,\ 74+\omega]$	$19\cdot 29$
$[113,\ 23+\omega]$	1
$[149,\ 55+\omega]$	5^2
$[151,\ 92+\omega]$	29
$[173,\ 110+\omega]$	41
$[179,\ 107+\omega]$	19
$[181,\ 21+\omega]$	11
$[197,\ 45+\omega]$	379
$[223,\ 31+\omega]$	61
$[229,\ 57+\omega]$	19
$[239,\ 206+\omega]$	1
$[241,\ 167+\omega]$	7^2
$[257,\ 122+\omega]$ *	$19\cdot 139$
$[263,\ 201+\omega]$	409
$[337,\ 172+\omega]$ *	$19\cdot 41$
$[379,\ 103+\omega]$ *	$19\cdot 31$
$[383,\ 205+\omega]$ *	$7^2\cdot 19$
$[397,\ 197+\omega]$ *	$19\cdot 41$
$[421,\ 304+\omega]$ *	$11\cdot 19^2$
$[487,\ 70+\omega]$ *	$19^2\cdot 31$
$[499,\ 264+\omega]$ *	$11^2\cdot 19$
$[643,\ 474+\omega]$ *	$19\cdot 79$

* : 単項 ideal

References

[Okada] K. Okada, *Hecke eigenvalues for real quadratic fields*, preprint.

[Okazaki] R. Okazaki, *On evaluation of L-functions over real quadratic fields*, J. Math. Kyoto Univ. **31** (1991), 1125–1153.

[Saito] H. Saito, *On an operator U_χ acting on the space of Hilbert cusp forms*, J. Math. Kyoto Univ. **24** (1984), 285–303.

[Shimura] G. Shimura, *The special values of the zeta functions associated with Hilbert modular forms*, Duke Math. J. **45** (1978), 637–679.

[Shintani] T. Shintani, *On evaluation of zeta functions of totally real algebraic number fields at non-positive integers*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math. **23** (1976), 393–417.