数理解析研究所講究録
1173 巻 2000 年 72-81

$SL_2(\mathbf{Z})$ とその部分群に対する Laplacian の隣接固有値の比の評価

大阪府立大学総合科学部
知念 宏司 (Koji Chinen)*

1 Introduction

$\mathbf{R}^2$ の場合

まず $\mathbf{R}^2$ の場合に, 次のような問題がある: $\Delta_E = -(\partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2)$, Ω を $\mathbf{R}^2$ の有界領域 (「領域」= 区分的に滑らかな境界をもつ連結開集合) とし, Dirichlet 問題

$$\begin{cases} \Delta_E u = \lambda u, & \text{in } \Omega, \\ u = 0, & \text{on } \partial\Omega. \end{cases}$$

の固有値を

$$(0 <)\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots$$

とする. これらの固有値について, その隣接するものの比 λ_{n+1}/λ_n を上から評価する, という問題である. これは 1956 年, Payne-Pólya-Weinberger [14] で初めて提起され, その中で

定 理 1.1 $\forall n \geq 1$, $\forall \Omega$:bdd. に対して

$$\frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} \leq 3.$$

が示され, さらに

予 想 1.2 (PPW Conjecture) $\forall \Omega \in \mathbf{R}^2$, bdd. に対して

$$\left.\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|_{\Omega} \leq \left.\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|_{\text{disc}} = 2.539\ldots$$

ただし, $\left.\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|_{\text{disc}}$ は Ω が円のときの比を表す. また, 等号は Ω が円のときに限られる.

が述べられている. これは 1991 年に Ashbaugh-Benguria [2] によって肯定的に解決された. また, 2.539... という値は, Bessel 関数 $J_n(x)$ の零点で書けることもわかった.

これらの問題の motivation

1° Universal inequality.

領域 Ω の形, 大きさに関係なく成り立つ, 固有値の間の不等式を universal inequality という. これは, どのような数列が Δ_E の固有値になり得るか, というところから発せられた問いである. 定理 1.1 は, 固有値になり得る正数列はかなり限られることを示している.

* E-mail: YHK03302@nifty.ne.jp

2° 等スペクトル問題.

つまり同じ固有値 $(\lambda_n)_{n\in\mathbf{N}}$ をもつ 2 つの領域 Ω_1, Ω_2 があったとき, $\Omega_1 = \Omega_2$ となるか, という問題である. これは 1966 年の Kac [10] で提起されて以来, 多くの研究がある. 予想 1.2 は, 固有値のうち, 最初の 2 つがわかれば, 領域が円かどうかの判定はできることを示している. もっとも, 長年未解決であった $\mathbf{R}^2$ の等スペクトル問題も 1992 年, Gordon-Webb-Wolpert [5] によって否定的に解決された (i.e. 同じスペクトル $(\lambda_n)_{n\in\mathbf{N}}$ をもち, 形の異なる 2 つの領域の存在が示された).

数論的な場合への類似

こういった問題の「数論的類似」を考えてみようというのが目標である. つまり, Δ_E を $\Delta = -y^2(\partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2)$ で, $\mathbf{R}^2$ を上半平面 H で, Ω を 基本領域 $\Gamma\setminus H$ (Γ: 第 1 種 Fuchs 群) でおきかえる. すると固有関数はいわゆる Maass waveform となる:

定 義 1.3 $f: H \to \mathbf{C}$ が Γ に対する Maass waveform であるとは,
(i) $\Delta f(z) = \lambda f(z) \quad (\exists\lambda \in \mathbf{C})$;
(ii) $f(\gamma z) = f(z) \quad (\forall\gamma \in \Gamma)$;
(iii) $f(z)$ は Γ の cusp の近傍で高々多項式オーダー
が成り立つこと.

また, $\lim_{z\to\mathfrak{a}} f(z) = 0$ ($\mathfrak{a}$: Γ の cusp) のとき, $f(z)$ を cusp form という. Cusp form が存在すれば, cusp forms の列 $(u_j(z))_{j\geq 1}$ で, $\Delta u_j(z) = \lambda_j u_j(z)$,

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots, \lim_{j\to\infty} \lambda_j = \infty$$

となるものがとれる. このような固有値に関しては,

予 想 1.4 (Selberg の固有値予想) Γ: 合同部分群なら $\lambda_1 \geq 1/4$.

予 想 1.5 (Phillips-Sarnak) Γ: 数論的でない $\Rightarrow$ {cusp forms}={0}.

などの問題がある. Maass waveform についてより詳しくは, Hejhal [6], Iwaniec [8], [9], Kubota [11], Terras [20] などを参照. 以後, Γ としては

$$(*) \qquad \Gamma \subset SL_2(\mathbf{Z}) \text{ かつ } \Delta \text{ が } \Gamma \text{ に対し無限個の固有値をもつ}$$

をみたすものをとる. そして次の問題を考える:

問 題 1.6 Γ に対する Δ の第 j 固有値 λ_j について λ_{j+1}/λ_j を上から評価せよ.

Motivation についてちょっと補足

我々は数論的な場合ということで基本領域を考えていて, H の任意の領域を考えてはいないので, $\mathbf{R}^2$ の場合の完全な analogy ではないが, H の場合にこの問題を持ち込んだ動機

について少し述べておく. それは, $\mathbf{R}^2$ における円という領域の特殊性である. $\mathbf{R}^2$ の場合, Ω の面積が大きいほど λ_1 は小さくなることを我々は経験的に知っているが (大きな太鼓ほど低い音が出る), λ_1 を決めるのは Ω の面積だけでなく, 形も重要である. 例えば Ω が辺の長さ πa と πb の長方形なら, $\lambda_1 = 1/a^2 + 1/b^2$ となるから, a を固定すれば, いくら b を大きくしても λ_1 は $1/a^2$ 以下にはなり得ない. 一般に vol(Ω): 一定なら

$$\lambda_1|_\Omega \geq \lambda_1|_{\text{disc}}$$

(Faber-Krahn の定理) であり, また, Ω に含まれる最も大きな円の半径を r_Ω とすると,

$$\lambda_1 \geq \frac{1}{4r_\Omega^2}$$

(Osserman [12]) などが知られている. このように, 円という領域はある意味で λ_1 の下限を決定づける. そして, PPW Conjecture によれば, 比 λ_2/λ_1 はその円という領域を特徴づけていることがわかる. H の場合に λ_1 の下限を問題にするのが Selberg 予想であるから, Δ の固有値の比にも何らかの意味があるのではないか, というのが, 当初の動機である. なお, Δ_E の固有値に関する種々の結果については, Payne-Pólya-Weinberger [14] のほか, Arnol'd et al [1], Osserman [13], Protter [16], Yau [21] などを参照.

本日の結果

特殊な領域に対しては固有関数が具体的にわかる Euclid の場合とは異なり, 我々の場合は種々の困難が伴うが,

1° $\lambda_j \geq \exists X_0$ なるすべての λ_j に対して $\lambda_{j+1}/\lambda_j \leq M$ (for $\exists M > 0$).
2° 残る有限個の $\lambda_j(< X_0)$ に対しては λ_j の数値計算を利用して λ_{j+1}/λ_j の最大値を求める.

という結果を目標とする. 1° の部分は (*) を満たすすべての Γ に対して成り立つ評価を, Selberg 跡公式を用いて導く. 2° については, Hejhal [7] の $SL_2(\mathbf{Z})$ に対する計算結果を利用する. 2° の部分は $SL_2(\mathbf{Z})$ のみに対する結果となる. 本日の主結果は次の通り:

定 理 1.7 Γ は (*) を満たす $SL_2(\mathbf{Z})$ の任意の部分群とし, Γ に対する Δ の第 j 固有値を λ_j とすると, $\lambda_j \geq 677$ なるすべての λ_j に対して

$$\frac{\lambda_{j+1}}{\lambda_j} \leq \frac{8}{5}.$$

右辺の値 8/5 は, $SL_2(\mathbf{Z})$ に対する λ_{j+1}/λ_j の, $\lambda_j < 677$ のときの最大値 $\lambda_2/\lambda_1 = 1.628...$ と比較して設定したものである (小さい固有値の具体的な値については参考文献のあとの表を参照). さらに,

定 理 1.8 $SL_2(\mathbf{Z})$ に対する Δ の第 j 固有値を λ_j とすると, すべての $j \geq 1$ に対して

$$\frac{\lambda_{j+1}}{\lambda_j} \leq \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = 1.628...$$

もちろん, 定理 1.7 が主結果のうち本質的な部分である. 前述の通り, Selberg 跡公式を用いて証明するのだが, 計算そのものは相当厄介ではあるものの, その一つ一つは初等的なので, 具体的な計算は Chinen [3] をご覧頂くことにして, 以下では証明のアイデアを中心に述べたいと思う.

2 証明の方針

Selberg 跡公式と隣接固有値

以下, 定理 1.7 の証明である. 我々は条件 $(*)$ を満たすすべての Γ を問題にしているが, 実際の計算は $SL_2(\mathbf{Z})$ に対してのみ行えば十分である. それは, $SL_2(\mathbf{Z})$ に対する固有関数は部分群に対する固有関数でもあり, この意味で, より小さな部分群を考えれば固有関数は増える. 言い換えれば, 固有値の間隔はより詰まっていくためである. $SL_2(\mathbf{Z})$ に対する Selberg 跡公式 は次のようである:

定 理 2.1 (The Selberg trace formula for $SL_2(\mathbf{Z})$) 関数 $h(r)$ は次の条件を満たすとする:

$$\begin{cases} h(r) \text{ は帯状領域 } |\mathrm{Im}\, r| \leq \dfrac{1}{2}+\varepsilon \text{ で正則 (for some } \varepsilon > 0); \\ h(r) \text{ は偶関数}; \\ \text{上の帯状領域で } h(r) \ll (|r|+1)^{-2-\varepsilon}. \end{cases} \tag{2.1}$$

また $h(r)$ の Fourier 変換を

$$g(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} h(r)e^{irt}dr \tag{2.2}$$

で定義する. さらに $j \geq 1$ に対して, r_j を $\lambda_j = 1/4 + r_j^2$ を満たす正の数とする. このとき次が成り立つ:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{\infty} h(r_j) &= \frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty} h(r)\frac{\varphi'}{\varphi}\left(\frac{1}{2}+ir\right)dr + \frac{1}{12}\int_{-\infty}^{\infty} r\tanh(\pi r)h(r)dr \\ &+ \sum_{P}\sum_{l=1}^{\infty} \frac{g(l\log p)\log p}{p^{\frac{l}{2}} - p^{-\frac{l}{2}}} + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{h(r)}{\cosh(\pi r)}\left(\frac{1}{8} + \frac{1}{3\sqrt{3}}\cosh\frac{\pi r}{3}\right)dr \\ &+ \frac{1}{4}h(0)\left(1 - \varphi\left(\frac{1}{2}\right)\right) - g(0)\log 2 - \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} h(r)\psi(1+ir)dr, \end{aligned} \tag{2.3}$$

ここで

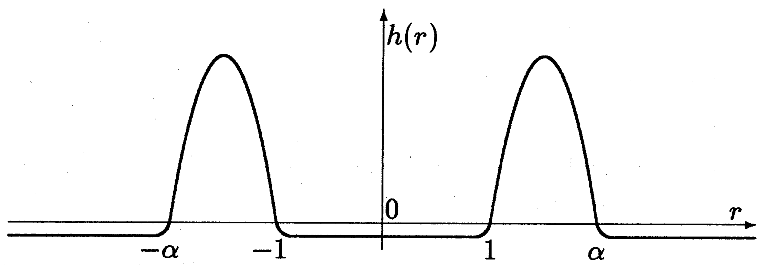
$$\varphi(s) = \pi^{2s-1}\frac{\Gamma(1-s)\zeta(2-2s)}{\Gamma(s)\zeta(2s)},$$

$\psi(s)$ は Gamma 関数の対数微分:

$$\psi(s) = \frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)} = -\gamma - \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{n+s} - \frac{1}{n+1}\right) \quad (\gamma : \text{ Euler's constant}),$$

和 $\sum_P$ は $SL_2(\mathbf{Z})$ の原始的双曲的共役類にわたる和であり, p は共役類 P のノルム, すなわち $\gamma \in P$ に対して $g \in SL_2(\mathbf{R})$ があって $g^{-1}\gamma g = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}$ $(a > 1)$ となるとき, $p = a^2$. すべての積分, 級数は絶対収束する.

一般に, Selberg 跡公式の利用法としては, 問題に適する $h(r)$ を選んで右辺を評価することにより固有値に関する量 (= 左辺) を知り, 必要な情報を引き出す, という手順になる. $h(r)$ はテスト関数と呼ばれる. 我々は $h(r)$ として (2.1) を満たし, 下のようなグラフをもつものをとる $(\alpha > 1)$:



山の部分はできるだけ高い方がよく, $1 \le |r| \le \alpha$ 以外ではつねに負, そして負の部分はできるだけ座標軸に近い方がよい. また $r \to \infty$ のとき, $h(r) \to 0$ となる. この $h(r)$ に対して

主 張 2.2 ある $X_0 > 0$ があり, $X \ge X_0$ なる任意の X に対し,

$$\sum_{j=1}^{\infty} h(r_j/X) \ge \max_{r \in \mathbf{R}} h(r).$$

が言えたとする. すると, $1 \le r_j/X \le r_{j+1}/X \le \alpha$ なる r_j, r_{j+1} が存在し, $Y = X^2 + 1/4$ とおけば $Y \le \lambda_j \le \lambda_{j+1} \le \alpha^2 Y + (1-\alpha^2)/4 \le \alpha^2 Y$ となり, これから $\lambda_{j+1}/\lambda_j \le \alpha^2$ が言えて比の評価ができる.

テスト関数の構成

関数 $h(r)$ は, 具体的には次のようにして作る:

$$h(r) = h_+(r) - h_-(r),$$

$$h_+(r) = e^{-A(r-c)^2} + e^{-A(r+c)^2}, \quad h_-(r) = Ke^{-Br^2},$$

各定数は

$$A = a \log k, \quad B = \log k, \quad K = k(k^{-a(1-c)^2} + k^{-a(1+c)^2})$$

とし, 最終的に

$$a = 500, \quad c = 1.13, \quad k = 1.6$$

と決めた. なお, 最終ページ (文献表の次) には, $a = 300, 400, 500$ に対する数値計算例 (グラフ) を載せてある. 大きい方の零点 α については $\alpha < (2ac - a + 1)/(a - 1)$ が成り立つので, この値を α のかわりに用いる. 上記の a, c, k に対して $\alpha^2 < 398161/249001 \approx 1.599 < 1.6$ となり, 固有値の比を 1.6 で押えることが可能になる. あとは跡公式右辺 (いわゆる geometric trace) を具体的に評価すればよい. そして結論としては $X_0 = 26$ に対して主張 2.2 が成り立つことが数値的にわかり, 定理 1.7 が出る.

困難な点

通常, Selberg 跡公式を応用する場合, 漸近的な式を導くことが目標である場合が多い. しかし我々の問題では, すでに見た通り, 言わば 2 つの trace の差を下から具体的な数値で評価してやる必要があり, 漸近公式では不十分である. つまり, geometric trace の評価において, 小さな項ももれなく拾ってやらねばならない. その場合問題となるのが双曲的共役類の寄与である. 一般の群に対しては双曲的共役類の挙動を知ることは難しく, 正確に評価するのは不可能である. しかし, 幸い我々は $SL_2(\mathbf{Z})$ だけを相手にすればよいのであり, その場合には実 2 次体の単数および類数に関する Gauss-Siegel の定理を用いることにより, 双曲的共役類の挙動をかなり詳しく知ることができる. これについて, 節をあらためて述べよう.

3 双曲的共役類について

双曲的共役類

Selberg 跡公式における双曲的共役類の寄与は, パラメータ X を含む形 (すなわち $h(r/X)$ に対する跡公式において) では

$$X \sum_P \sum_{l=1}^{\infty} \frac{g(lX \log p) \log p}{p^{\frac{l}{2}} - p^{-\frac{l}{2}}} \tag{3.1}$$

である. 以下, 各項の説明と, 評価を Gauss-Siegel の定理に持ち込む方法について述べる. $\gamma \in \Gamma := SL_2(\mathbf{Z})$, $g \in G := SL_2(\mathbf{R})$ とする.

定 義 3.1 (i) γ: 双曲的 $\underset{\mathrm{def}}{\Leftrightarrow} |\mathrm{tr}\,\gamma| > 2 \Leftrightarrow g^{-1}\gamma g = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}$ $(\exists a > 1)$.
(ii) $N\gamma := a^2$ を γ の norm という.

a は実 2 次体の単数であることが容易にわかり, また G における双曲的共役類の代表系が $\left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix};\ a > 1 \right\}$ であることから, 各 γ に対して $N\gamma$ が決まる. さらに共役類 $P = [\gamma] = \{\tau^{-1}\gamma\tau;\ \tau \in \Gamma\}$ について $N\gamma = N\gamma'$ $(\forall\gamma' \in P)$ なので, norm は各共役類に対して定まる値であることがわかる. その意味で, $NP = N\gamma$ を P の norm という.

定 義 3.2 $P = [\gamma]$ が原始的 $\underset{\mathrm{def}}{\Leftrightarrow} \gamma = \gamma_0^l$ $(l > 1)$ なる双曲元 $\gamma_0 \in \Gamma$ が存在しない.

一般に $\gamma = \gamma_0^l$ のとき, $NP = NP_0^l$ $(P = [\gamma],\ P_0 = [\gamma_0])$. よって, (3.1) において, P と l の両方を動かすことで, すべての双曲的共役類にわたる和を得ている.

<u>Gauss-Siegel の定理</u>

原始的双曲的共役類と実 2 次体の単数との関連を述べよう.

$$D = \{d \in \mathbf{N}\ ;\ d \equiv 0, 1 \pmod 4,\ d : \text{not a square}\},$$

$$h(d) : \text{判別式 } d \text{ をもつ原始的 2 元 2 次形式の狭義の類数},$$

$$\varepsilon_d = (x_0 + \sqrt{d}y_0)/2 \quad ((x_0, y_0) : x^2 - dy^2 = 4 \text{ の基本解})$$

とする. このとき,

定 理 3.3 (Sarnak)

$$\{NP;\ P : \text{原始的双曲的}\} = \{\varepsilon_d^2;\ d \in D\},$$

ただし, NP の重複度は $h(d)$ (i.e. $h(d)$ 個の P が同じノルム ε_d^2 をもつ).

これは Sarnak [17] による. この定理により, (3.1) は

$$2X \sum_{d \in D} h(d) \log \varepsilon_d \sum_{l=1}^{\infty} \frac{g(2lX \log \varepsilon_d)}{\varepsilon_d^l - \varepsilon_d^{-l}}$$

と書き換えられる. なお, この書き換えによって和の順序が入れ替わっているが (もともとは共役類のノルムの順 = 単数の大きさの順だが, 判別式の大きさの順に変わっている), 評価しようとしている級数は絶対収束だから問題はない. これの評価に Gauss-Siegel の定理

$$\sum_{\substack{d \in D \\ d \le x}} h(d) \log \varepsilon_d = \frac{\pi^2 x^{3/2}}{18\zeta(3)} + O(x \log x). \quad (x \to \infty) \tag{3.2}$$

を用いる. これは普通上記のような漸近公式の形で述べられるが, Siegel の証明 ([19]) は, 本質的には指標和に対する Pólya-Vinogradov の不等式

$$\left| \sum_{k=1}^{n} \chi(k) \right| < cq^{1/2} \log q \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

(ただし $\chi(k)$: non-principal, mod q) に基づくものであり, この不等式の定数 c は具体的に決められる. 実際, $c = 2$ でよい (Davenport [4, Chapter 23]). このことから Gauss-Siegel の定理の implied constant は明示することができ, 我々の証明に使えるのである:

定 理 3.4 (Gauss-Siegel) $r = 0, 1$ に対して

$$\sigma_x^r = \sum_{\substack{d \in D \\ d \le x \\ d \equiv r \pmod 4}} h(d) \log \varepsilon_d$$

とすると, $x \geq 12$ に対し,

$$\sigma_x^r \leq \alpha_r x^{\frac{3}{2}} + \beta_r x \log x + \gamma_r \tag{3.3}$$

ただし

$$\begin{cases} \alpha_0 = \dfrac{\pi^2}{42\zeta(3)},\ \alpha_1 = \dfrac{2\pi^2}{63\zeta(3)}, \\ \beta_0 = \beta_1 = 3\left(\dfrac{\sqrt{6}\log 3}{2\log 2} + \dfrac{17}{4}\right), \\ \gamma_0 = 0,\ \gamma_1 = \dfrac{201}{100}. \end{cases}$$

なお, Gauss-Siegel の定理についてはより詳しい式 (いわゆる新谷公式, Shintani [18]) が知られているが, 双曲的共役類の寄与はもともと小さく, 上記で十分である. あとは $\varepsilon_d \geq \sqrt{d}$ (容易にわかる) と Abel の変形によればよい.

参考文献

[1] Arnol'd, V. I. et al: Some unsolved problems in the theory of differential equations and mathematical physics. Russian Math. Surveys **44:4** (1989), 157-171

[2] Ashbaugh, M. S., Benguria, R. D.: Proof of Payne-Pólya-Weinberger conjecture. Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) **25:1** (1991), 19-29

[3] Chinen, K.: A bound for the ratio of consecutive eigenvalues of the hyperbolic Laplacian for modular groups. To appear in Forum Math.

[4] Davenport, H.: Multiplicative Number Theory. Second Edition, Springer-Verlag, 1980

[5] Gordon, C., Webb, D. and Wolpert, S.: Isospectral plane domains and surfaces via Riemannian orbifolds, Invent. Math. **110** (1992), 1-22

[6] Hejhal, D. A.: The Selberg Trace Formula for $PSL(2,\mathbf{R})$ Vol. 2. Lecture Notes in Math. **1001**, Springer-Verlag, 1983

[7] _______: Eigenvalues of the Laplacian for Hecke Triangle groups. Mem. of Amer. Math. Soc. No. 469 (1992)

[8] Iwaniec, H.: Non-holomorphic modular forms and their applications. In: Modular Forms, pp. 157-196, Ellis Horwood Series of Halsted Press, 1984

[9] _______: Introduction to the Spectral Theory of Automorphic Forms. Biblioteka de la Revista Matemática Iberoamericana, 1995

[10] Kac, M.: Can one hear the shape of a drum? Amer. Math. Monthly, **73** (1966), 1-23

[11] Kubota, T.: Elementary Theory of Eisenstein Series. John Wiley and Sons, 1973

[12] Osserman, R.: A note on Hayman's theorem on the bass note of a drum. Comm. Math. Helvetici, **52** (1977), 545-555

[13] ________: The isoperimetric inequality. Bull. Amer. Math. Soc. **84-6** (1978), 1182-1238

[14] Payne, L. E., Pólya, G., Weinberger, H. F.: On the ratio of consecutive eigenvalues. J. Math. and Phys. **35** (1956), 289-298

[15] Phillips, R. S., Sarnak, P.: On cusp forms for cofinite subgroups of $PSL(2, \mathbf{R})$. Invent. Math. 80 (1985), 339-364

[16] Protter, M.H.: Can one hear the shape of a drum? revisited. SIAM Review **29-2** (1987), 185-197

[17] Sarnak, P.: Class numbers of indefinite binary quadratic forms. J. Number Theory **15** (1982), 229-247

[18] Shintani, T.: On zeta-functions associated with the vector space of quadratic forms. J. Fac. Sci. Univ. Tokyo **22** (1975), 25-65

[19] Siegel, C. L.: The average measure of quadratic forms with given determinant and signature. Ann. of Math. **45** (1944), 667-685

[20] Terras, A.: Harmonic Analysis on Symmetric Spaces and Applications I. Springer Verlag, 1985

[21] Yau, S.-T.: Problem section, in Seminar on Differential Geometry. Ann. Math. Studies **102**, 669-706, Princeton University Press, 1982

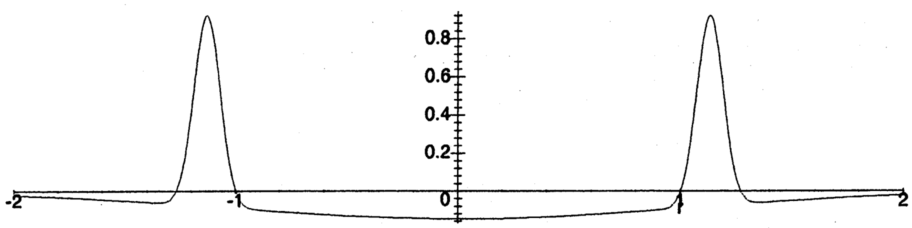
$SL_2(\mathbf{Z})$ に対する Δ の固有値 (Hejhal [7] による)

j	λ_j	λ_{j+1}/λ_j
1	91.14134035	1.628592725
2	148.4321238	1.280932542
3	190.1315376	1.085652508
4	206.4167807	1.262917672
5	260.6874002	1.063654620
6	277.2813577	1.135693434
7	314.9066173	1.050456742
8	330.7957793	1.141252815
9	377.5216142	1.006310806
10	379.9040797	1.064819267
11	404.5291838	1.123808065

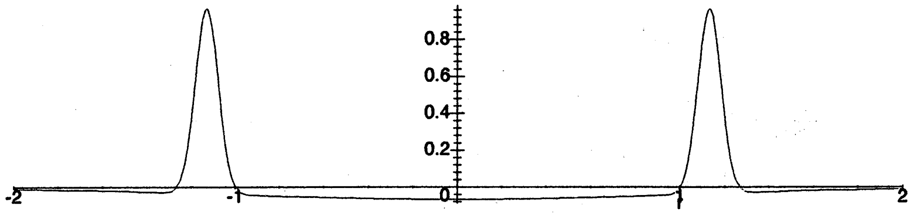
j	λ_j	λ_{j+1}/λ_j
12	454.6131591	1.015368613
13	461.5999326	1.067707162
14	492.8535540	1.053959426
15	519.4476490	1.036783548
16	538.5547763	1.005376463
17	541.4502960	1.074254777
18	581.6555672	1.025645613
19	596.5724807	1.052337070
20	627.7953362	1.062838222
21	667.2448791	1.017936588
22	679.2129757	-

テスト関数 数値例

$a := 300$
$c := 1.13$
$k := 1.6$
$A := 141.0010888$
$B := .4700036292$
$K := .1476493946$



$a := 400$
$c := 1.13$
$k := 1.6$
$A := 188.0014517$
$B := .4700036292$
$K := .06672197605$



$a := 500$
$c := 1.13$
$k := 1.6$
$A := 235.0018146$
$B := .4700036292$
$K := .03015130606$