数理解析研究所講究録
1174 巻 2000 年 23-31

譲渡可能効用を持つ提携形ゲームの種々の解の一貫性について

小樽商科大学 商学部 社会情報学科　行方 常幸（Tsuneyuki Namekata）
Department of Information and Management Science
Otaru University of Commerce

1. はじめに

本稿では譲渡可能効用を持つ提携形ゲームの種々の 1 点解を縮小ゲームによる一貫性という性質を用い特徴付ける。次のような状況を考えてみる：複数の参加者（プレイヤー）全員が協力してある額の利益を得た。この全利益を参加者間にいかに配分すべきであろうか？譲渡可能効用を持つ提携形ゲームは、この配分問題を、プレイヤーの部分的な集まり（提携）がどれくらいの利益を生み出すかを考慮にいれて、解く。このゲームに、様々な公平性の観点から異なる解（配分方法）が提唱されている。これらの種々の解を共通の基準で比較する試みがなされている。本稿で述べる縮小ゲームによる一貫性はこの試みの 1 つであり、種々の解の差異を縮小ゲームの差異によって説明する。

2. ETP を持つ線形な値

譲渡可能効用を持つ提携形ゲーム（transferable utility game, TU-game）は*プレイヤー*の集合 $N:=\{1,2,\ldots,n\}$ と*特性関数* $v:2^N\to\mathbb{R}\left(v(\varnothing)=0\right)$ の順序対 (N,v) で与えられる。N の部分集合 S は*提携*と呼ばれ、その*提携値* $v(S)$ は S のメンバーが協力して得られる利益を表している。今後、$s=|S|$ で提携 S に含まれるプレイヤーの人数を表す。ゲーム (N,v) の解は全体提携 N の提携値 $v(N)$ を各プレイヤーにいかに分けるかという問題に関係している。TU-ゲームすべての集合を G とする。G 上の 1 点解（*値*）とは関数 $\sigma:G\to\mathbb{R}^N$、ただし、$\sigma(N,v)=\left(\sigma_j(N,v)\right)_{j\in N},\sum_{j\in N}\sigma_j(N,v)=v(N)$ である。$\sigma_j(N,v)$ はゲーム (N,v) においてプレイヤー j が得る利益の評価値である。

本稿で扱う値の集合を限定するためにいくつかの定義が必要である。

線形性：　G 上の値 σ がつぎの条件を満たすとき σ は*線形*であるという：

$$\sigma(N,v+w)=\sigma(N,v)+\sigma(N,w)\quad\left(\forall(N,v),(N,w)\in G\right)$$

ETP： G 上の値σがつぎの条件を満たすとき *ETP(equal treatment property)*を持つという：
$v(S\cup\{i\})=v(S\cup\{j\})$ $\left(\forall S\subset N-\{i,j\}\right)$ を満たすゲーム $(N,v)\in G$ に対して $\sigma_i(N,v)=\sigma_j(N,v)$ $\left(i,j\in N(i\neq j)\right)$ である。

本稿では ETP を持つ線形な値のみを扱う。この ETP を持つ線形な値は次の補題が示すように、簡単な形を持っている。

補題 1. （Ruiz *et al.* 1998）値σ が ETP を持ちかつ線形であるのは、次の(1)を満たす重みの集合$\left\{\left(m_{n,s}\right)_{s=1,\dots,n-1}\mid n=2,\dots\right\}$が存在するときかつその時のみである：

$$\sigma_i(N,v)=\frac{v(N)}{n}+\sum_{\substack{S:i\in S\subset N\\ S\neq N}} m_{n,s}v(S)-\sum_{\substack{S:S\subset N\\ S\neq\emptyset,N}}\frac{s}{n}m_{n,s}v(S)\quad\left(\forall(N,v)\in G,\forall i\in N\right)\tag{1}$$

(1)式において重み$\left\{\left(m_{n,s}\right)_{s=1,\dots,n-1}\mid n=2,\dots\right\}$は任意の値を取ってもよい。この ETP を持つ線形な値と関連するものとして最小二乗値（Least Square value）がある。最小二乗値は（Ruiz *et al.* 1998）によって次のように定義されている。

重み$\left\{\left(m_{n,s}\right)_{s=1,\dots,n-1}\mid n=2,\dots\right\}$は非負であり、各 n=2,…に対して $m_{n,s}$ （s=1,…,n−1）の少なくとも 1 つが正とする。重み m を持つ最小二乗値 LS^m は次の問題の最適解として定義される：

$$\text{Minimize}\ \sum_{\substack{S:S\subset N\\ S\neq N}} m_{n,s}\left(v(S)-\sum_{j\in S}x_j\right)^2\quad\text{subject to}\ \sum_{j\in N}x_j=v(N)$$

すなわち、

$$LS_i^m(N,v):=\frac{v(N)}{n}+\frac{1}{\sum_{s=1}^{n-1}\binom{n-2}{s-1}m_{n,s}}\left[\sum_{\substack{S:i\in S\subset N\\ S\neq N}} m_{n,s}v(S)-\sum_{\substack{S:S\subset N\\ S\neq\emptyset,N}}\frac{s}{n}m_{n,s}v(S)\right]\quad\left(\forall i\in N\right)$$

である。この式と(1)式と比較すれば、ETP を持つ線形な値σ において、重み m が非負でありさらに

$$\sum_{s=1}^{n-1}\binom{n-2}{s-1}m_{n,s}=1\quad\left(n=2,\dots\right)\tag{2}$$

を満たせば、σ は最小二乗値とみなせる。

ETP を持つ線形な値のいくつかの例を与える。最小二乗値であるものもないものもある。

例 **2**. 重み m により、(1)式で与えられる値は次のようなる。

(i) $m_{n,s}=\dfrac{1}{n-s}\begin{pmatrix}n-1\\s-1\end{pmatrix}^{-1}\ (n=2,\ldots;s=1,\ldots,n-1)$ であればシャープレイ値となり、

(ii) $m_{n,s}=\dfrac{1}{2^{n-2}}\ (n=2,\ldots;s=1,\ldots,n-1)$ であれば最小二乗準仁（Least Square prenucleolus, Ruiz *et al*. 1996）であり、

(iii) $m_{n,s}=\delta_{sk}\dfrac{n-1}{n-s}\begin{pmatrix}n-1\\s-1\end{pmatrix}^{-1}\ (n=2,\ldots;s=1,\ldots,n-1)$ であれば EN^{k}AC- 値（k=1,…,n–1）（Namekata *et al*. 2000a）となり（ただし、$\delta_{sk}=1\ (s=k)$、$\delta_{sk}=0\ (s\neq k)$である）、

(iv) $m_{n,s}=\dfrac{1}{(s+1)(n-s)}\begin{pmatrix}n-1\\s-1\end{pmatrix}^{-1}\ (n=2,\ldots;s=1,\ldots,n-1)$ であれば団結値（Solidarity value, Nowak *et al*. 1994）となる。

(2)式が成立するかをチェックすることにより、シャープレイ値、最小二乗準仁、EN^{k}AC-値は最小二乗値であるが、団結値は最小二乗値ではないことが分かる。

3. ETP を持つ線形な値の一貫性

ETP を持つ線形な値を縮小ゲームによる一貫性という性質を用いて特徴付ける。

ゲーム(N,v)（$n\geq 2$）に対し、利得ベクトル $x\in\mathbb{R}^N$ と除かれるプレイヤーi が与えられたときの*縮小ゲーム* $(N-\{i\},v^x)$ は次のように与えられる：プレイヤーi は自分の利得 x_i を得て、ゲームから退く。残りのプレイヤー$N-\{i\}$が新しい全体提携となり縮小ゲーム$(N-\{i\},v^x)$が形成される。この縮小ゲームの特性関数 v^x に関しては $v^x(\emptyset)=0, v^x(N-\{i\})=v(N)-x_i$ だけを仮定する。残りの $v^x(S)\left(\emptyset\subsetneq S\subsetneq N-\{i\}\right)$ の値は次に述べる縮小ゲーム性を成立させるために各値ごとに定義される。

縮小ゲーム性： G 上の値σがある縮小ゲームに関してつぎの条件を満たすときその縮小ゲームに対して*縮小ゲーム性*を満たすという：

$$\sigma_j\left(N-\{i\},v^{\sigma(N,v)}\right)=\sigma_j(N,v)\left((N,v)\in G,n\geq 2,i\in N,j\in N-\{i\}\right)$$

ある値の縮小ゲーム性は次のことを主張している：元のゲームから 1 人のプレイヤーがこのゲームの値の自分の取り分を持ってゲームから退く、そのとき、結果として形成される縮小ゲームにおいて、残りのプレイヤーは元のゲームと同じ値を得る。このように縮小ゲーム性は一貫性の性質とみなすことができる。

2 人ゲームに対するα-標準性： *G 上の値σがつぎの条件を満たすとき 2 人ゲームに対してα-標準的*であるという：

$$\sigma_i(\{i,j\},v)=\frac{1}{2}v(\{i,j\})+\alpha\left[v(\{i\})-v(\{j\})\right]$$

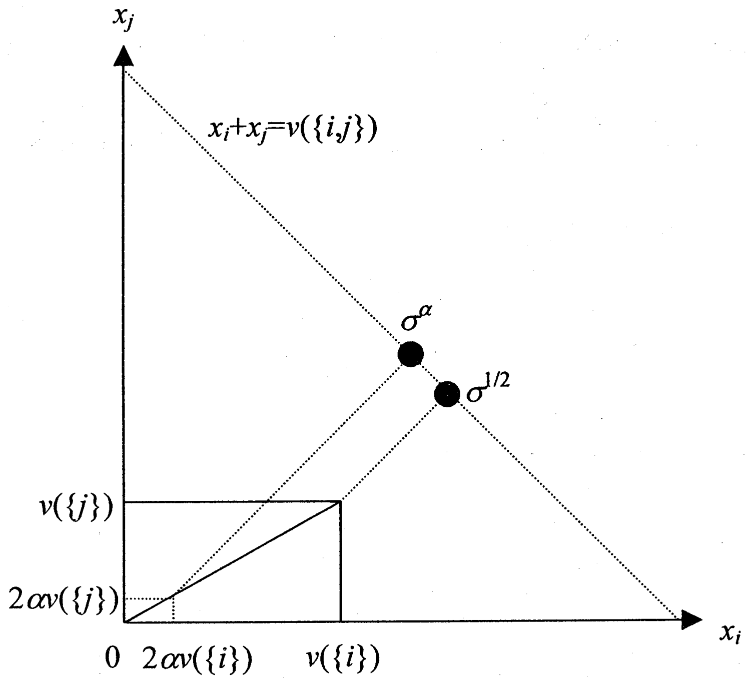

図 **1.** 2 人ゲームに対するα-標準性の意味。
$\sigma^{1/2}$ は 2 人ゲームに対して標準的であるが、σ^{α} は 2 人ゲームに対してα-標準的である。

2 人ゲームに対するα-標準性の意味は図 1 に与えられている。2 人ゲームにおいてαが小さくなればなるほど、プレイヤー間の力の差、$v(\{i\})$と $v(\{j\})$の差、が $v(\{i,j\})$の分け方に反映されない。特に、a=0 の時には $v(\{i\})$と $v(\{j\})$の差に関係なく $v(\{i,j\})$を等分する。従来の 2 人ゲームに対する標準性はα=1/2 のときである。団結値は 1/4-標準性

を満たすことに注意。

次の定理で（Ruiz *et al*. 1998）による最小二乗値に関する縮小ゲームによる一貫性の結果を述べる。ここで、次の条件が成り立つとき、重み m は*一貫している*という：

$$m_{n,s}=m_{n+1,s}+m_{n+1,s+1}\quad(n=2,\ldots;s=1,\ldots,n-1)$$

定理 **3**. (Ruiz *et al*. 1998) 重み m を持つ最小二乗値は、重み m が一貫しているならば、1/2-標準性と次の縮小ゲームに対して縮小ゲーム性を満たす G 上の一意な値である：$S\subset N-\{i\},\ S\neq\varnothing, N-\{i\}$ に対して

$$v^x(S):=\frac{m_{n,s+1}}{m_{n,s+1}+m_{n,s}}\left[v(S\cup\{i\})-x_i\right]+\frac{m_{n,s}}{m_{n,s+1}+m_{n,s}}v(S)$$

シャープレイ値と最小二乗準仁と EN^{1}AC-値と EN^{n-1}AC-値の重み m は一貫しているが、EN^{k}AC-値（k=2,…,n–2）の重み m は一貫していない。

ここで、ETP を持つ線形な値のために、次のタイプの縮小ゲームを考察する。

$0\le p_s\le 1, 0\le q_s\le 1, r_s>0$ とし、$\varnothing\subsetneq S\subsetneq N-\{i\}$ に対して、

$$v^x(S):=r_s\left[\begin{array}{l}\dfrac{n-s-1}{n-1}p_s v(S)+\dfrac{1}{n-1}(1-p_s)\displaystyle\sum_{l\in N-S\cup\{i\}}v(S\cup\{l\})\\+\dfrac{1}{n-1}q_s\displaystyle\sum_{l\in S}\left[v(S\cup\{i\}-\{l\})-x_i\right]+\dfrac{s}{n-1}(1-q_s)\left[v(S\cup\{i\})-x_i\right]\end{array}\right]\qquad(3)$$

この縮小ゲームは次のような意味を持つ。縮小ゲーム (N–$\{i\}$,v^x) における提携 S の提携値を評価するために、提携 S はプレイヤーi を、(1) 提携の大きさを変えずに、または (2) 提携の人数を 1 人増やすことにより、取り込もうとする。しかし、(1) 置き換えるための、または、(2) 増やすための、候補者 l は N–$\{i\}$から無作為に、すなわち、確率 1/(n–1)で選ばれる。この候補者 l が提携 S に属さなければ（図 2 の上の図を参照)、(1) 提携 S は確率 p_s で提携の大きさを変えずにプレイヤーi を取り込むことはできず、(N–$\{i\}$,v^x) における提携値は元の $v(S)$ のままであり、また、(2) 提携 S は確率 1–p_s でプレイヤーl を説得して彼の代わりにプレイヤーi を取り込むことができず、(N–$\{i\}$,v^x) における提携値は $v\left(S\cup\{l\}\right)$ である。候補者 l が提携 S に属せば（図 2 の下の図を参照)、(1) 確率 q_s でプレイヤーi はプレイヤーl と置き換わり提携 $S\cup\{i\}-\{l\}$ を形成し、(2) 確率 1–q_s でプレイヤーi は提携 S に加わり $S\cup\{i\}$ を形成する。プレイヤーi が利得 x_i を持ってゲーム(N,v)から退く時、縮小ゲーム (N–$\{i\}$,v^x) において提携 S はその残り、すなわち、(1) $v\left(S\cup\{i\}-\{l\}\right)-x_i$ または (2) $v\left(S\cup\{i\}\right)-x_i$

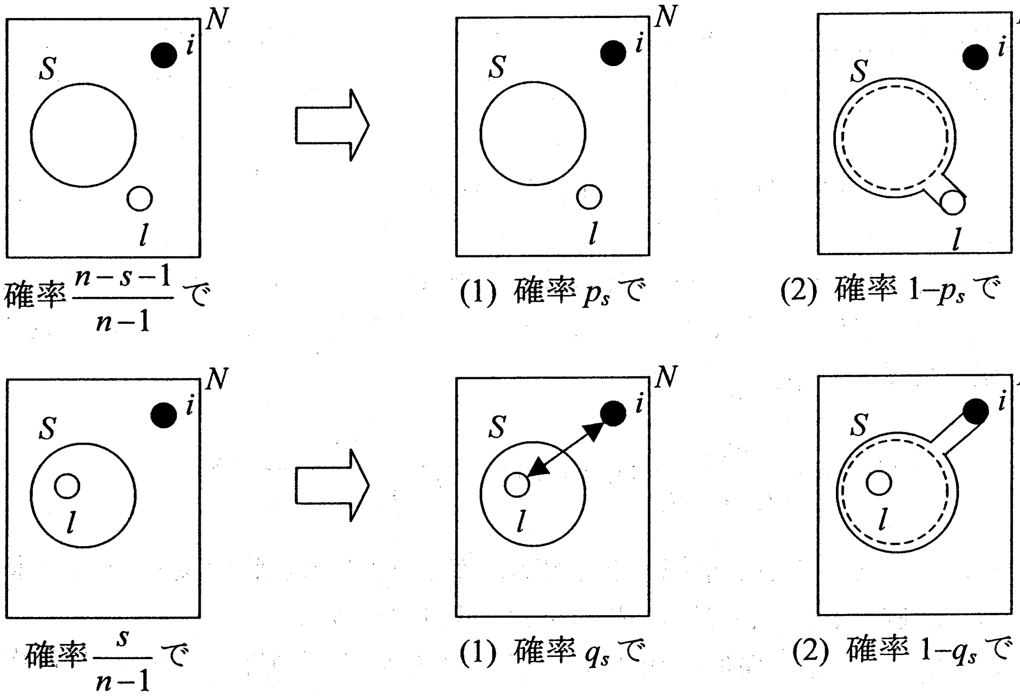

図 **2.** 提携 S がプレイヤーi を取り込もうとする方法

を得る。従って、$(N-\{i\},v^x)$ における提携 S の期待提携値 $v^x(S)$は(3)で与えられる。ただし、r_sはある値で、1 に等しくなければ、厳密な意味での期待値ではない。

p_sと q_sの 3 つの解釈を述べる：(i) p_s=q_s=p（一定）、(ii) $p_s = q_s = \dfrac{n-s-1}{n-1}$、(iii) $p_s = q_s = \dfrac{n-s-1}{n}$。(1) 提携 S が提携の大きさを変えないか (2) 一人だけ人数を増やすか、を決定するために、あるプレイヤーが無作為に選ばれ (1) か (2) を選ぶ。もし、どの選ばれたプレイヤーも確率 p で (1) を選び、確率 $1-p$ で (2) を選べば、(i) が得られる。もし、S のメンバーは (2) を選び、S 以外のメンバーが (1) を選び、プレイヤーi がこの決定過程から除外されているならば、(ii) が得られる。もし、S のメンバーとプレイヤーi が (2) を選び、それ以外が (1) を選べば、(iii) が得られる。

このとき次のことが成立する。

定理 4. (Namekata *et al.* 2000b) シャープレイ値、最小二乗準仁、団結値は表 1 のように係数 p, q, r を定めれば(3)の縮小ゲームに対して縮小ゲーム性を満たし、2 人ゲームに対する $m_{2,1}/2$-標準性を満たす G 上の一意の値である。

表 1. 縮小ゲーム(3)における係数 p, q, r の値

値	p_s	q_s	r_s
シャープレイ値	$p_1=\dfrac{1}{2-\alpha}$ $p_s=\alpha(s\neq 1,n-2)$ $p_{n-2}=\dfrac{\alpha}{1+\alpha}$	$q_1=\dfrac{1}{2-\alpha}$ $q_s=\alpha(s\neq 1,n-2)$ $q_{n-2}=\dfrac{\alpha}{1+\alpha}$	$r_1=2-\alpha$ $r_s=1(s\neq 1,n-2)$ $r_{n-2}=1+\alpha$
	$p_1=\dfrac{\alpha}{3+2\alpha-n}$ $p_s=\dfrac{n-s-1}{\alpha+1}(s\neq 1)$	$q_1=\dfrac{\alpha}{3+2\alpha-n}$ $q_s=\dfrac{n-s-1}{\alpha+1}(s\neq 1)$	$r_1=\dfrac{3+2\alpha-n}{\alpha}$ $r_s=\dfrac{\alpha+1}{\alpha}(s\neq 1)$
最小二乗準仁	$p_s=\dfrac{1}{2}$	$q_s=\dfrac{1}{2}$	$r_s=\dfrac{n-1}{n-2}$
団結値	$p_s=1(s\neq n-2)$ $p_{n-2}=\dfrac{1}{2-\frac{1}{n}}$	$q_s=1(s\neq n-2)$ $q_{n-2}=\dfrac{1}{2-\frac{1}{n}}$	$r_s=1(s\neq n-2)$ $r_{n-2}=2-\dfrac{1}{n}$
	$p_1=\dfrac{n}{n+2}$ $p_s=\dfrac{n-s-1}{n}(s\neq 1)$	$q_1=\dfrac{n}{n+2}$ $q_s=\dfrac{n-s-1}{n}(s\neq 1)$	$r_1=\dfrac{n+2}{n}$ $r_s=1(s\neq 1)$

定理 4 によりシャープレイ値と最小二乗準仁と団結値が同じ土俵の上、特に、同じタイプの縮小ゲーム(3)の係数の違い、で比較可能となった。まず、シャープレイ値と最小二乗準仁では $m_{2,1}=1$ であるので、2 人ゲームに対する 1/2-標準性を満たすが、一方、団結値では $m_{2,1}=1/2$ であるので、2 人ゲームに対する 1/4-標準性を満たす。

まず、シャープレイ値と最小二乗準仁を比較する。表 1 のシャープレイ値の上の行で $\alpha=1/2$ とおいたものと最小二乗準仁の行を比較する。違いは p_1, q_1, p_{n-2}, q_{n-2}, r_s である；シャープレイ値では $r_s=1$ であるが、最小二乗準仁では $r_s=1+1/(n-2)$である。また、表 1 のシャープレイ値の下の行で $\alpha=n-2$ とおいたものと最小二乗準仁の行を比較する。違いは p_s と q_s である；シャープレイ値の方は（ii）の解釈であり、最小二乗準仁の方

は（i）の解釈である。

次に、シャープレイ値と団結値を比較する。表 1 のシャープレイ値の上の行でα=1 とおいたものと団結値の上の行を比較する。違いは $p_{n-2}, q_{n-2}, r_{n-2}$ である；さらに、シャープレイ値は 2 人ゲームに対する 1/2-標準性を満たすが、団結値は 2 人ゲームに対する 1/4-標準性を満たす。また、表 1 のシャープレイ値の下の行でα=n−1 とおいたものと団結値の下の行を比較する。違いは、2 人ゲームに対する標準性に加え、p_1, q_1, r_s である。

最後に、従来知られていなかった団結値に関する結果を系として述べる。

系 **5**. 団結値は次の(4)と(5)の縮小ゲームに対して縮小ゲーム性を満たし、2 人ゲームに対する 1/4-標準性を満たす G 上の一意の値である。

$$v^x(S)=\begin{cases}\dfrac{n-s-1}{n-1}v(S)+\dfrac{1}{n-1}\sum_{l\in S}\left[v(S\cup\{i\}-\{l\})-x_i\right] & \text{for } s\neq n-2,\\ \dfrac{n-s-1}{n-1}v(S)+\dfrac{1}{n}\sum_{l\in N-S\cup\{i\}}v(S\cup\{l\}) & \\ \quad+\dfrac{1}{n-1}\sum_{l\in S}\left[v(S\cup\{i\}-\{l\})-x_i\right]+\dfrac{n-2}{n}\left[v(S\cup\{i\})-x_i\right] & \text{for } s=n-2.\end{cases}\tag{4}$$

$$v^x(S)=\begin{cases}\dfrac{n-2}{n-1}v(S)+\dfrac{s+1}{n(n-1)}\sum_{l\in N-S\cup\{i\}}v(S\cup\{l\}) & \\ \quad+\dfrac{1}{n-1}\sum_{l\in S}\left[v(S\cup\{i\}-\{l\})-x_i\right]+\dfrac{s(s+1)}{n(n-1)}\left[v(S\cup\{i\})-x_i\right] & \text{for } s=1,\\ \dfrac{(n-s-1)^2}{n(n-1)}v(S)+\dfrac{s+1}{n(n-1)}\sum_{l\in N-S\cup\{i\}}v(S\cup\{l\}) & \\ \quad+\dfrac{n-s-1}{n(n-1)}\sum_{l\in S}\left[v(S\cup\{i\}-\{l\})-x_i\right]+\dfrac{s(s+1)}{n(n-1)}\left[v(S\cup\{i\})-x_i\right] & \text{for } s\neq 1.\end{cases}\tag{5}$$

4. おわりに

本稿では、ETP を持つ線形な値、特に、シャープレイ値、最小二乗準仁、団結値を縮小ゲームによる一貫性という性質で特徴付けた。定理等の証明は省略した。証明は参考文献を参照されたい。

参考文献

Namekata, T. and Driessen, T. S. H. (2000a) Reduced Game Property of the Egalitarian Non-k-Averaged Contribution (EN^{k}AC-) Value and the Shapley Value, **International Transactions in Operational Research 7**, 365-382.

Namekata, T. and Driessen, T. S. H. (2000b) Reduced Game Property of a Class of Values without Inessential Game Property, unpublished manuscript.

Nowak, A. S. and Radzik, T. (1994) A Solidarity Value for n-Person Transferable Utility Games, **International Journal of Game Theory 23**, 43-48.

Ruiz, L. M., Valenciano, F. and Zarzuelo, J. M. (1996) The Least Square Prenecleolus and the Least Square Nucleolus. Two Values for TU Games Based on the Excess Vector, **International Journal of Game Theory 25**, 113-134.

Ruiz, L. M., Valenciano, F. and Zarzuelo, J. M. (1998) The Family of Least Square Values for Transferable Utility Games, **Games and Economic Behavior 24**, 109-130.