数理解析研究所講究録
1175 巻 2000 年 51-62

The infiniteness of the SAGBI bases for certain invariant rings

東北大学大学院理学研究科数学専攻
黒田 茂 (Shigeru Kuroda)

1 序

グレブナー基底理論におけるイニシャルイデアルの概念は，多項式環のイデアルの代わりに部分代数に対しても自然に拡張でき，それらはイニシャル代数と呼ばれる．部分代数の生成系は，そのイニシャル単項式全体がイニシャル代数を生成するときにSAGBI (Subalgebra Analogue to Gröbner Bases for Ideals) 基底 [7] と呼ばれる．イニシャルイデアルとイニシャル代数の大きな違いは，イニシャルイデアルはヒルベルトの基底定理によりつねに有限生成であるのに対して，イニシャル代数は必ずしもそうとは限らないことである．そこで，イニシャル代数が有限生成となるための必要十分条件を求めることが，重要な問題となる．Göbel はある種の不変式環に対してこの問題を研究した [2]．我々は彼の結果を，彼とは異なる方法を用いて拡張した．さらに，これらの不変式環一つ一つに対して定まる，異なるイニシャル代数全体の濃度も決定した．

2 乗法的項順序の集合の位相構造と，ベクトル空間のスタンダード基底

任意の標数の体 k を固定する．n を正の整数とし，$k[\mathbf{x}] := k[x_1, \ldots, x_n]$ を n 変数多項式環，$k[\mathbf{x}, \mathbf{x}^{-1}] := k[x_1, \ldots, x_n, x_1^{-1}, \ldots, x_n^{-1}]$ を n 変数ローラン多項式環とする．この報告書を通して，$k[\mathbf{x}, \mathbf{x}^{-1}]$ の単項式は $\mathbf{x}^{\mathbf{a}} = x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n}$ と表記し，格子点 $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbf{Z}^n$ と同一視する．また，代数はつねに k 代数を意味するものとする．

$\mathbf{Z}^n$ 上の全順序 $\prec$ は，勝手な 3 つの元 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbf{Z}^n$ が $\mathbf{a} \prec \mathbf{b}$ ならば $\mathbf{a}+\mathbf{c} \prec \mathbf{b}+\mathbf{c}$ を満たすとき乗法的項順序という．乗法的項順序は，零ベクトル 0 が $\mathbf{Z}^n_{>0}$ の最小元となるときに項順序という．$(n-1)$ 次元単位球面 $\mathbf{S}^{n-1} \subset \mathbf{R}^n$ 上の点 $\omega = (\omega^1, \ldots, \omega^n)$ で，成分 $\omega^1, \ldots, \omega^n \in \mathbf{R}$ が $\mathbf{Q}$ 上一次独立であるもの全体の集合を $\mathbf{S}'$ と記す．各 $\omega \in \mathbf{S}'$ に対して，乗法的項順序 $\prec = \iota(\omega)$ が

$$\mathbf{a} \prec \mathbf{b} :\Leftrightarrow \omega \cdot \mathbf{a} \leq \omega \cdot \mathbf{b}$$

により定義される．$\omega^1, \ldots, \omega^n$ の $\mathbf{Q}$ 上の一次独立性より，$\mathbf{Z}^n$ の異なる元 $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ に対して，内積 $\omega \cdot \mathbf{a}$ と $\omega \cdot \mathbf{b}$ は一致しないことに注意する．

凸多面体 $P \subset \mathbf{R}^n$ と $\omega \in \mathbf{R}^n$ に対して，P の面 $\mathrm{face}_\omega(P)$ を

$$\mathrm{face}_\omega(P) := \{\mathbf{a} \in \mathbf{R}^n \mid \text{全ての } \mathbf{a}' \in P \text{ に対し } \omega \cdot \mathbf{a}' \leq \omega \cdot \mathbf{a}\}$$

と定義する．乗法的項順序全体の集合を Ω，単項式が生成する k ベクトル空間全体の集合を $\mathcal{V}$ と記すことにする．

集合 Ω と $\mathcal{V}$ に，以下のように位相構造を導入する．$\mathbf{Z}^n$ から $\mathbf{Z}_{>0}$ への写像 ρ で，任意の $l \in \mathbf{Z}_{>0}$ に対してその逆像 $\rho^{-1}(l)$ が有限集合となるものを固定する．関数 $d_\rho : \Omega \times \Omega \to \mathbf{R}$ および $\delta_\rho : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathbf{R}$ を以下のように定義する．任意の $\prec, \prec' \in \Omega$ に対し，

$$d_\rho(\prec, \prec') := \begin{cases} 0 & \prec = \prec' \\ 1/e & e = \max\{e \in \mathbf{Z}_{>0} \mid \rho(\mathbf{a}), \rho(\mathbf{b}) < e \text{ となる全ての } \mathbf{x}^\mathbf{a}, \mathbf{x}^\mathbf{b} \in k[\mathbf{x}, \mathbf{x}^{-1}] \\ & \qquad\qquad \text{に対し } \mathbf{x}^\mathbf{a} \prec \mathbf{x}^\mathbf{b} \Leftrightarrow \mathbf{x}^\mathbf{a} \prec' \mathbf{x}^\mathbf{b} \text{ が成立}\} \end{cases}$$

とする．また，任意の $V, V' \in \mathcal{V}$ に対し，

$$\delta_\rho(V, V') := \begin{cases} 0 & V = V' \\ 1/e & e = \max\{e \in \mathbf{Z}_{>0} \mid \rho(\mathbf{a}) < e \text{ となる全ての } \mathbf{x}^\mathbf{a} \in k[\mathbf{x}, \mathbf{x}^{-1}] \\ & \qquad\qquad \text{に対し } \mathbf{x}^\mathbf{a} \in V \Leftrightarrow \mathbf{x}^\mathbf{a} \in V' \text{ が成立}\} \end{cases}$$

とする．関数 d_ρ および δ_ρ が，それぞれ Ω と $\mathcal{V}$ に距離構造を定めることは容易に確かめられる．集合 $\mathbf{S}'$ に対しては，$\mathbf{R}^n$ から導かれる位相を考える．

定理 2.1 距離空間 (Ω, d_ρ) と $(\mathcal{V}, \delta_\rho)$ の位相構造は ρ の取り方によらずに定まる．集合 Ω と $\mathcal{V}$ はこの位相に関してコンパクトである．さらに，単射 $\iota : \mathbf{S}' \to \Omega$ は連続であり，像 $\iota(\mathbf{S}')$ は Ω の稠密な部分集合である．

上で定めた Ω の位相は，次のように定められたものと同じになる (cf. [5, Lecture 3], [8]): 包含写像 $\Omega \to \{1,-1\}^{\mathbf{Z}^n}$ を，$\prec \in \Omega$ に対し，$\mathbf{a} \in \mathbf{Z}^n$ が $0 \prec \mathbf{a}$ のときには $\prec(\mathbf{a}) := 1$，そうでないときには -1 と定める．集合 $\{1,-1\}^{\mathbf{Z}^n}$ は離散位相空間 $\{1,-1\}$ の直積空間と考える．Ω の位相はこの位相から誘導されるものとする．

以下，ベクトル空間 $V \subset k[\mathbf{x},\mathbf{x}^{-1}]$ は，全て k 上のものを意味するものとする．

定義 2.2 $\prec$ を乗法的項順序，$f = \sum_i c_i \mathbf{x}^{\mathbf{a}_i} \in k[\mathbf{x},\mathbf{x}^{-1}]$ を 0 でない多項式，$V \subset k[\mathbf{x},\mathbf{x}^{-1}]$ をベクトル空間とする．

(1) f の $\prec$ に関するイニシャル単項式 $\mathrm{in}_\prec(f)$ を，

$$\mathrm{in}_\prec(f) := \max_\prec\{\mathbf{x}^{\mathbf{a}_i} \mid c_i \neq 0\} \tag{2.1}$$

と定義する．このとき任意の $f,g \in k[\mathbf{x},\mathbf{x}^{-1}] \setminus \{0\}$ に対して，$\mathrm{in}_\prec(f\cdot g) = \mathrm{in}_\prec(f)\cdot\mathrm{in}_\prec(g)$ が成り立つ．

(2) V の $\prec$ に関するイニシャルベクトル空間 $\mathrm{in}_\prec(V)$ とは，$\{\mathrm{in}_\prec(f) \mid f \in V \setminus \{0\}\}$ が生成するベクトル空間のことをいう．A が $k[\mathbf{x},\mathbf{x}^{-1}]$ の部分代数とすると，任意の $f,g \in A \setminus \{0\}$ に対して $\mathrm{in}_\prec(f)\cdot\mathrm{in}_\prec(g) = \mathrm{in}_\prec(f\cdot g)$ となることより，$\mathrm{in}_\prec(A)$ は再び代数の構造を持つ．これを $\prec$ に関する A のイニシャル代数という．A の生成系 S は，集合 $\{\mathrm{in}_\prec(f) \mid 0 \neq f \in S\}$ が $\mathrm{in}_\prec(A)$ を代数として生成するとき，$\prec$ に関する SAGBI 基底という．A の有限 SAGBI 基底は，イニシャル代数 $\mathrm{in}_\prec(A)$ が 有限生成であるときに限り存在することに注意する．

ベクトル空間 $V \subset k[\mathbf{x},\mathbf{x}^{-1}]$ に対して，対応 $\prec \mapsto \mathrm{in}_\prec(V)$ は乗法的項順序全体の集合 Ω から，単項式が生成するベクトル空間全体の集合 $\mathcal{V}$ への写像を定める．この写像を F_V と記す．Ω と $\mathcal{V}$ の位相の定義の仕方より，写像 F_V は連続である．この写像による $\mathrm{in}_\prec(V) \in \mathcal{V}$ の逆像を $U_V(\prec)$ と記す．すなわち

$$U_V(\prec) := \{\prec' \in \Omega \mid \mathrm{in}_{\prec'}(V) = \mathrm{in}_\prec(V)\}. \tag{2.2}$$

位相空間 $\mathcal{V}$ はハウスドルフ，また写像 F_V は連続なので，$U_V(\prec)$ は Ω の閉集合である．

定義 2.3 $V \subset k[\mathbf{x},\mathbf{x}^{-1}]$ をベクトル空間，$\prec$ を乗法的項順序とする．

(1) ベクトル空間 V の基底 $\{f_i\}_i$ は，$\{\mathrm{in}_\prec(f_i)\}_i$ がベクトル空間 $\mathrm{in}_\prec(V)$ の基底となるとき，$\prec$ に関してスタンダードであるという．

(2) 多項式 $0 \neq f \in V$ は，$\mathrm{in}_{\prec}(f)$ 以外の f の単項式が $\mathrm{in}_{\prec}(V)$ に含まれないとき被約であるという．

(3) スタンダード基底 $\{f_i\}_i$ は，全ての f_i が被約であるとき被約であるという．

V の $\prec$ に関するスタンダード基底の添え字集合は，$\mathrm{in}_{\prec}(V)$ に含まれる単項式全体の集合に取ることができる．すなわち，m が $\mathrm{in}_{\prec}(V)$ の単項式全体を動くとき，$\{f_m\}_m$ と表される．ただし f_m は $m = \mathrm{in}_{\prec}(f_m)$ となる V の元とする．

次の補題はよく知られている．

補題 2.4 $V \subset k[\mathbf{x}, \mathbf{x}^{-1}]$ をベクトル空間，$\prec, \prec'$ を乗法的項順序とする．それぞれ $\prec$ と $\prec'$ に関する V の被約スタンダード基底が存在するとき，$\mathrm{in}_{\prec}(V) \subset \mathrm{in}_{\prec'}(V)$ ならば $\mathrm{in}_{\prec}(V) = \mathrm{in}_{\prec'}(V)$ である．

ベクトル空間 $V \subset k[\mathbf{x}, \mathbf{x}^{-1}]$ に対して，

$$\Delta(V) := \{\prec \in \Omega \mid \prec \text{ に関する } V \text{ の被約スタンダード基底が存在する}\} \quad (2.3)$$

とおく．$\prec \in \Delta(V)$ であれば $U_V(\prec)$ は $\Delta(V)$ に含まれる．

補題 2.5 $A \subset k[\mathbf{x}, \mathbf{x}^{-1}]$ を部分代数，$\prec \in \Delta(A)$ とする．もし，代数 $\mathrm{in}_{\prec}(A)$ が有限生成ならば，$U_A(\prec)$ は $\Delta(A)$ の開集合である．

3 主結果

この節と次の節を通して，$\mathbf{Z}^n$ の 0 を含む部分半群 S，および S に作用する群 G を任意に固定する．半群 S の k 上の半群環を R とおく．以下，半群環は全て体 k 上のものを考える．$\mathbf{Z}^n$ の点と単項式の同一視により，R は $k[\mathbf{x}, \mathbf{x}^{-1}]$ の部分代数と考えることができる．群 G の S への作用は，R への作用に線形に拡張できる．G のこの作用による R の不変部分環 R^G を考察する．

以下では G の作用は忠実であり，S の各元の G 軌道は有限であると仮定する．この仮定が一般性を失わないことを注意する．$S' \subset S$ を，軌道が有限である元全体のなす S の部分半群とし，R' をその半群環とする．このとき，R^G は R' の不変部分環 $(R')^G$ と一致する．また，G の部分群 $G(S) = \{\tau \in G \mid \text{全ての } \mathbf{a} \in S \text{ に対し } \tau(\mathbf{a}) = \mathbf{a}\}$ に対して，$G/G(S)$ の作用に関する R の不変部分環 $R^{G/G(S)}$ と R^G は等しい．

$\sigma \in G$ に対して，部分半群 $\{\mathbf{a} \in S \mid \sigma(\mathbf{a}) = \mathbf{a}\}$ の半群環を R_σ とおく．整域 R の k 上の超越次数を m とする．

定義 3.1 (1) $\sigma \in G$ は，R_σ の k 上の超越次数が $m-1$ のとき鏡映という．

(2) 群 G は鏡映によって生成されるとき，鏡映群であるという．

次が主結果である．

定理 3.2 $\prec$ を任意の乗法的項順序とする．

(1) R が有限生成ならば，不変式環 R^G のイニシャル代数 $\mathrm{in}_\prec(R^G)$ が有限生成であるための必要十分条件は，G が鏡映群であることである．

(2) R が有限生成でないならば，イニシャル代数 $\mathrm{in}_\prec(R^G)$ も有限生成でない．

定理 3.3 R^G の異なるイニシャル代数全体 $\{\mathrm{in}_\prec(R^G) \mid \prec \in \Omega\}$ の濃度は，

(1) G が鏡映群のときには群の位数 $|G|$ であり，

(2) G が鏡映群でないときには非可算である．

定理 3.2(1) の特殊な場合として，Göbel による次の結果を導くことができる．G を n 次対称群 S_n の部分群とする．G の $k[\mathbf{x}]$ へ作用を，変数の置換 $\sigma(f) := f(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)})$ $(\sigma \in G, f = f(x_1, \ldots, x_n) \in k[\mathbf{x}])$ により定める．この作用による $k[\mathbf{x}]$ の不変部分環を $k[\mathbf{x}]^G$ とおく．

定理 3.4 (Göbel [2]) $\prec_{\mathrm{lex}} \in \Omega$ を辞書式順序とする．このとき $\mathrm{in}_{\prec_{\mathrm{lex}}}(k[\mathbf{x}]^G)$ が有限生成であるための必要十分条件は，G が対称群の直積であることである．

ここで対称群とは，$\{1, \ldots, n\}$ の部分集合の対称群を意味する．G が対称群の直積であることは，G が互換で生成されることと同値である．

多項式環 $k[\mathbf{x}]$ を半群 $S = \mathbf{Z}^n_{\geq 0}$ の半群環と考える．すると，上のように定義された G の $k[\mathbf{x}]$ への作用は，次のように定義した S への作用を考えることに相当する：$\sigma \in G, \mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n) \in S$ に対して

$$\sigma(\mathbf{a}) := (a_{\sigma(1)}, \ldots, a_{\sigma(n)}). \tag{3.1}$$

この場合，$\sigma \in G$ が互換であることと σ が鏡映であることは同じである．特に，G が対称群の直積であるという条件は，G が鏡映群であるという条件と同値である．

単項式 $\mathbf{x}^{\mathbf{a}} \in R$ に対して,

$$f_G(\mathbf{x}^{\mathbf{a}}) := \sum_{\sigma \in G/G(\mathbf{a})} \mathbf{x}^{\sigma(\mathbf{a})} \tag{3.2}$$

と定める．ただし $G(\mathbf{a})$ は安定化部分群 $\{\tau \in G \mid \tau(\mathbf{a}) = \mathbf{a}\}$ である．ここで

$$B := \{f_G(\mathbf{x}^{\mathbf{a}}) \mid \mathbf{a} \in S\} \tag{3.3}$$

とおく.

補題 3.5 任意の乗法的項順序に対して，集合 B は R^G の被約スタンダード基底である.

この補題より

$$\Delta(R^G) = \Omega$$

である.

この節では，G が鏡映群でない場合を考察する．すなわち，G が鏡映群でないならば，(a) $\mathrm{in}_{\prec}(R^G)$ は有限生成でなく，(b) R^G の異なるイニシャル代数の濃度は非可算であることを説明する.

次の補題が鍵になる.

補題 3.6 G が鏡映群でないとする．このときどんな $\omega \in \mathbf{S}'$ も，ユークリッド位相に関して

$$\iota^{-1}(U_{R^G}(\prec)) = \{\omega' \in \mathbf{S}' \mid \prec' = \iota(\omega') \text{ に対し } \mathrm{in}_{\prec}(R^G) = \mathrm{in}_{\prec'}(R^G)\ \}$$

の内点とはならない．ただし $\prec = \iota(\omega)$ とおいた.

この補題を説明する前に，この事を仮定して (a) と (b) を示す.

$\prec$ を任意の乗法的項順序とする．$\mathrm{in}_{\prec}(R^G)$ が有限生成であったと仮定する．すると，補題 2.5 より，$U_{R^G}(\prec)$ は Ω の空でない開集合である．定理 2.1 より，その逆像 $\iota^{-1}(U_{R^G}(\prec))$ は $\mathbf{S}'$ の空でない開集合である．$\omega' \in \iota^{-1}(U_{R^G}(\prec))$ と $\prec' = \iota(\omega')$ に対して，$\iota^{-1}(U_{R^G}(\prec'))= \iota^{-1}(U_{R^G}(\prec))$ が成り立つ．これは補題 3.6 に矛盾する．従って $\mathrm{in}_{\prec}(R^G)$ は有限生成でない.

補題 3.6 より，$U_{R^G}(\prec)$ は内点を持たないことが分かる．$U_{R^G}(\prec)$ は閉集合であるので，これは Ω の疎な部分集合である．R^G の異なるイニシャル代数が高々可算個しか存在しなかったとする．すると Ω は，高々可算個の $U_{R^G}(\prec)$ という形の疎集合によって被

覆される事になる．ところが Ω はコンパクト距離空間なので，完備距離空間から高々可算個の疎集合を取り除いた集合は稠密であるという，ベールの補題に矛盾する．

この節の残りでは，補題 3.6 の説明を行う．

S が生成する $\mathbf{Z}^n$ の部分加群を M とおく．また，$M_{\mathbf{R}}$ (resp. C) を S が生成する $\mathbf{R}^n \simeq \mathbf{R} \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Z}^n$ の部分実ベクトル空間 (resp. 凸錐) とする．G の S への作用は，自然に $M, M_{\mathbf{R}}$ や C 上の作用へと拡張される．

各点 $\mathbf{a} \in C$ に対して，その G 軌道の凸包を $P_G(\mathbf{a})$ とおく．$P_G(\mathbf{a})$ の頂点全体の集合は，$\mathbf{a}$ の G 軌道と等しいことに注意する．

$\prec$ を $\omega \in \mathbf{S}'$ が定める乗法的項順序とする．このとき，各元 $\mathbf{a} \in S$ に対して，$\mathrm{face}_\omega(P_G(\mathbf{a})) = \{\mathbf{a}\}$ であることと $\mathrm{in}_\prec(f_G(\mathbf{x}^\mathbf{a})) = \mathbf{x}^\mathbf{a}$ であることは同値である．補題 3.5 より次の補題を得る．

補題 3.7 $\prec \in \Omega$ は $\omega \in \mathbf{S}'$ が定める乗法的項順序とする．このとき

$$\left\{ \mathbf{x}^\mathbf{a} \mid \mathbf{a} \in \bigcup_{\mathbf{a}' \in S} \mathrm{face}_\omega(P_G(\mathbf{a}')) \right\}$$

はベクトル空間 $\mathrm{in}_\prec(R^G)$ の基底となる．$\omega, \omega' \in \mathbf{S}'$ に対して，$\prec = \iota(\omega), \prec' = \iota(\omega')$ とおく．もしある元 $\mathbf{a} \in S$ が，$\mathrm{face}_\omega(P_G(\mathbf{a})) \neq \mathrm{face}_{\omega'}(P_G(\mathbf{a}))$ となるように存在すれば，$\mathrm{in}_\prec(R^G) \neq \mathrm{in}_{\prec'}(R^G)$ である．

図 1 と 2 は $S = \mathbf{Z}^3_{\geq 0}$ の場合のいくつかの $P_G(\mathbf{a})$ の例を示している．図 1 は $G = S_3$，図 2 は $G = A_3$ の場合であり，これらの 3 次対称群の部分群は，それぞれ S に対して座標の置換 (3.1) によって作用している．各々の図は，C の部分集合 $\{(a_1, a_2, a_3) \mid a_1+a_2+a_3 = 1\}$ の上にあるいくつかの $P_G(\mathbf{a})$ を表している．

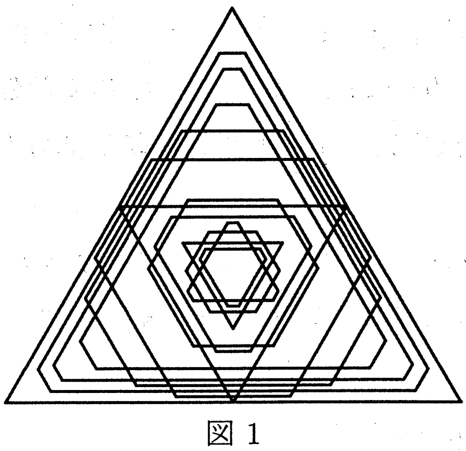

図 1

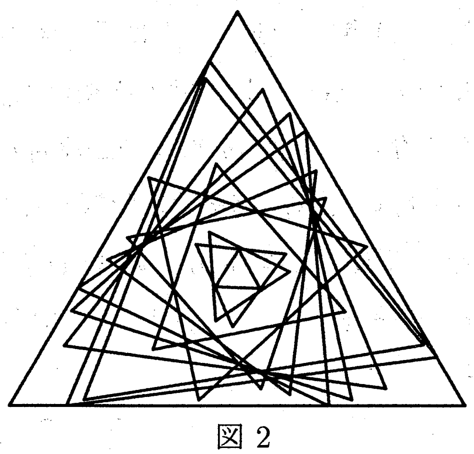

図 2

$\sigma \in G$ に対して，$\{\mathbf{a} \in S \mid \sigma(\mathbf{a}) = \mathbf{a}\}$ が生成する $M_{\mathbf{R}}$ の部分ベクトル空間を H_σ とおく．このとき

$$H_\sigma = \{\mathbf{v} \in M_{\mathbf{R}} \mid \sigma(\mathbf{v}) = \mathbf{v}\}$$

が成り立つことが容易に確かめられる．$\{\mathbf{a} \in S \mid \sigma(\mathbf{a}) = \mathbf{a}\}$ が生成する $\mathbf{Z}^n$ の部分加群は，階数が R_σ の k 上の超越次数と等しい自由加群である (例えば [10, Lemma 4.2] を参照)．特に，M は階数 m の自由加群である．また，ベクトル空間 H_σ の次元は，R_σ の k 上の超越次数と等しい．

ここで，群 G は有限となることを注意する．$\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m$ を自由加群 M の基底とする．仮定より S の任意の元の G 軌道は有限であるので，集合 $\{(\sigma(\mathbf{a}_1), \ldots, \sigma(\mathbf{a}_m)) \mid \sigma \in G\}$ は有限である．G の作用は忠実であると仮定したので，この有限集合の元と G の元とは一対一に対応する．従って，群 G は有限である．

$\tau \in G$ が鏡映ならば，τ の位数は 2 である．T を τ の作用が定める $M_{\mathbf{R}}$ の一次変換とする．H_τ は $M_{\mathbf{R}}$ の $m-1$ 次元部分空間である．$M_{\mathbf{R}}$ の基底を適当に取ることによって，一次変換 T は m 次正方行列を用いて

$$\begin{pmatrix} 1 & & & c_1 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & 1 & c_{m-1} \\ & & & c_m \end{pmatrix}$$

のように表される．ここで $c_1, \ldots, c_m$ は $\mathbf{R}$ の元である．群 G は有限なので，$\tau^l = 1$ となる正数 l が存在する．このとき，T の最小多項式 $\Phi_T(X) \in \mathbf{R}[X]$ は $X^l - 1$ を割り切る．従って，T の固有値は全て 1 の冪根であり，また T は半単純である．よって $c_m = 1$ または -1 である．T は半単純だから対角化可能であるので，もし $c_m = 1$ ならば $T = \mathrm{id}_{M_{\mathbf{R}}}$ となり，τ が鏡映であることに矛盾する．よって $c_m = -1$ であり，τ の位数は 2 である．

全ての $\sigma \in G \setminus \{1\}$ に対する集合 H_σ の和を H とおく．集合 $C \setminus H$ は有限個の連結成分からなる．C は m 次元の凸集合なので，余次元が 1 より大きい線形部分集合を有限個取り除いても，連結性に影響しない．

U を $C \setminus H$ の連結成分，$\mathbf{v}_0$ を U に含まれる点，そして $\overline{U}$ を C における U の閉包とする．各鏡映 $\tau \in G$ に対して，超平面 H_τ の法ベクトル $\mathbf{n}_\tau$ を $\mathbf{n}_\tau \cdot \mathbf{v}_0 > 0$ を満たすように取る．このとき

$$\overline{U} = \bigcap_\tau \{\mathbf{v} \in C \mid \mathbf{n}_\tau \cdot \mathbf{v} \geq 0\} \tag{3.4}$$

が成り立つ．ただし，右辺の交わりは G に含まれる全ての鏡映 τ について取る．以下，$C \setminus H$ の連結成分 U に対して，U の閉包 $\overline{U}$ は，C の中での閉包を意味するものとする．G に含まれる鏡映全体が生成する G の部分群を G' とおく．

補題 3.8 $C \setminus H$ の任意の連結成分 U に対して，自然な写像の合成 $\overline{U} \hookrightarrow C \to C/G'$ は全単射である．

補題 3.6 の証明：任意に $\omega \in \mathbf{S}'$ を固定し，$\prec = \iota(\omega)$ とおく．ω が $\iota^{-1}(U_{R^G}(\prec))$ の内点とならないことを証明する．

点 $\mathbf{a} \in C \setminus H$ を $\{\mathbf{a}\} = \mathrm{face}_\omega(\mathbf{a})$ を満たすように取り，$\mathbf{a}$ を含む $C \setminus H$ の連結成分を U とする．G は鏡映群でないので，G' は G の真部分群となる．従って，C/G' の少なくとも二つの元が，C/G の中で $\mathbf{a}$ の像と同じ元にうつる．補題 3.8 より，$\overline{U} \to C/G'$ は全単射なので，$\sigma(\mathbf{a}) \neq \mathbf{a}$ かつ $\sigma(\mathbf{a}) \in U$ となる $\sigma \in G$ が存在する．

集合 U は，余次元が 1 より大きい有限個の線形部分集合を，m 次元の凸錐から取り除いたものである．従って，弧 $\gamma : [0,1] \to U$ を

$$\gamma(0) = \mathbf{a}, \gamma(1) = \sigma(\mathbf{a})$$

となるように，S の点を線分でつなぐことによって定めることが出来る．具体的には，実数 $0 = s_0 < s_1 < \cdots < s_p < s_{p+1} = 1$ を，各 i に対して $\mathbf{b}_i := \gamma(s_i) \in S$，かつ $t \in (s_i, s_{i+1})$ ならば

$$\gamma(t) = \frac{(t - s_i)\mathbf{b}_{i+1} + (s_{i+1} - t)\mathbf{b}_i}{s_{i+1} - s_i}$$

となるように選ぶ．このとき，集合

$$T = \{t \in [0,1] \mid \text{ある } \sigma' \in G \text{ に対し } \omega \cdot \gamma(t) = \omega \cdot \sigma'(\gamma(t))\}$$

は空でない．実際，

$$\omega \cdot (\gamma(0) - \sigma^{-1}(\gamma(0))) = \omega \cdot (\mathbf{a} - \sigma^{-1}(\mathbf{a})) > 0$$

かつ

$$\omega \cdot (\gamma(1) - \sigma^{-1}(\gamma(1))) = \omega \cdot (\sigma(\mathbf{a}) - \mathbf{a}) < 0$$

であることより，中間値の定理から，実数 $t \in (0,1)$ が $\omega \cdot (\gamma(t) - \sigma^{-1}(\gamma(t))) = 0$ を満たすように存在する．$s := \inf(T), \mathbf{b} := \gamma(s)$ とおく．このとき

$$\omega \cdot \mathbf{b} = \omega \cdot \sigma_0(\mathbf{b}) \tag{3.5}$$

が，ある $1 \neq \sigma_0 \in G$ に対して成り立つ．また，全ての $t \in [0, s)$ と $1 \neq \sigma' \in G$ に対して

$$\omega \cdot \gamma(t) > \omega \cdot \sigma'(\gamma(t)) \tag{3.6}$$

が成り立つ．弧 γ は H と交わらないようにとったので，$\mathbf{b} \neq \sigma_0(\mathbf{b})$ である．各 $\delta \in \mathbf{R}_{>0}$ に対して，

$$\omega_\delta := \omega - \delta(\mathbf{b} - \sigma_0(\mathbf{b}))$$

とおく．(3.5) より $\mathbf{b}$ は有理点ではない．だから $s_{i_0} < s < s_{i_0+1}$ となる i_0 が存在する．

点列 $\{t_i\}_i \subset (s_{i_0}, s)$ を $\lim_{i\to\infty} t_i = s$，かつ $(t_i - s_{i_0})/(s_{i_0+1} - s_{i_0})$ が有理数となるように取る．各 t_i に対して $\mathbf{a}'_i := \gamma(t_i)$ とおく．すると，任意の実数 $\varepsilon' > 0$ に対してある正数 $N_{\varepsilon'}$ が存在して，

$$|(\mathbf{b} - \sigma_0(\mathbf{b})) \cdot ((\mathbf{b} - \sigma_0(\mathbf{b})) - (\mathbf{a}'_i - \sigma_0(\mathbf{a}'_i)))| < \varepsilon',$$

および

$$0 < \omega \cdot (\mathbf{a}'_i - \sigma_0(\mathbf{a}'_i)) < \varepsilon'$$

が，全ての整数 $i > N_{\varepsilon'}$ に対して成り立つ．

いま，ε を任意の正数とする．このとき，ある $\delta > 0$ が存在して

$$\left|\omega - \frac{\omega_\delta}{|\omega_\delta|}\right| < \varepsilon$$

かつ $|\omega_\delta|^{-1}\omega_\delta \in \mathbf{S}'$ とできる．$\varepsilon' = (1+\delta)^{-1}\delta|\mathbf{b} - \sigma_0(\mathbf{b})|^2$ とおく．このとき，任意の整数 $i > N_{\varepsilon'}$ に対して，

$$\begin{aligned}
\omega_\delta \cdot (\sigma_0(\mathbf{a}'_i) - \mathbf{a}'_i) &= (\omega - \delta(\mathbf{b} - \sigma_0(\mathbf{b}))) \cdot (\sigma_0(\mathbf{a}'_i) - \mathbf{a}'_i) \\
&= \omega \cdot (\sigma_0(\mathbf{a}'_i) - \mathbf{a}'_i) \\
&\quad -\delta(\mathbf{b} - \sigma_0(\mathbf{b})) \cdot \{((\mathbf{b} - \sigma_0(\mathbf{b})) - (\mathbf{a}'_i - \sigma_0(\mathbf{a}'_i))) - (\mathbf{b} - \sigma_0(\mathbf{b}))\} \\
&> -\varepsilon' - \delta\varepsilon' + \delta|\mathbf{b} - \sigma_0(\mathbf{b})|^2 = 0
\end{aligned}$$

が成り立つ．$\mathbf{a}'_i$ の定め方から，各 i についてある正の整数 α_i を，$\mathbf{a}_i := \alpha_i\mathbf{a}'_i \in S$ となるように見つけることが出来る．このとき

$$\omega_\delta \cdot (\sigma_0(\mathbf{a}_i) - \mathbf{a}_i) > 0$$

が全ての $i > N_{\varepsilon'}$ に対して成り立つ．すなわち

$$\mathrm{face}_{\omega_\delta}(P_G(\mathbf{a}_i)) \neq \{\mathbf{a}_i\} \ (i > N_{\varepsilon'}).$$

一方で (3.6) より，$\{\mathbf{a}_i\} = \mathrm{face}_\omega(P_G(\mathbf{a}_i))$ が全ての i に対して成り立つ．よって，$\prec_\delta = \iota(|\omega_\delta|^{-1}\omega_\delta)$ とおけば，補題 3.7 より $\mathrm{in}_{\prec_\delta}(k[\mathbf{x}]^G) \neq \mathrm{in}_\prec(k[\mathbf{x}]^G)$ が成り立つ．故に，$|\omega_\delta|^{-1}\omega_\delta \notin \iota^{-1}(U_{R^G}(\prec))$．従って ω は $\iota^{-1}(U_{R^G}(\prec))$ の内点ではない． □

4 鏡映群の場合

次に，G が鏡映群である場合について考える．

補題 4.1 G は鏡映群であるとする．U を $C \setminus H$ の連結成分とし，$\mathbf{v}_0 \in U$ と $\omega \in \mathbf{S}'$ を任意に取る．また，全ての $1 \neq \sigma \in G$ に対して $\omega \cdot \sigma(\mathbf{v}_0) < \omega \cdot \mathbf{v}_0$ であると仮定する．このとき，任意の $\mathbf{v} \in C$ に対して，$\mathbf{v}$ が $\overline{U}$ に含まれるための必要十分条件は，$\omega \cdot \sigma(\mathbf{v}) < \omega \cdot \mathbf{v}$ が全ての $\sigma \in G \setminus G(\mathbf{v})$ について成り立つことである．

この補題を用いて，次の命題が証明される．この命題によって，G が鏡映群の場合の R^G のイニシャル代数の構造は決定される．

命題 4.2 G は鏡映群であるとする．このとき，任意の乗法的項順序 $\prec$ に対して，$C \setminus H$ のある連結成分 U が存在して，イニシャル代数 $\mathrm{in}_\prec(R^G)$ は半群 $\overline{U} \cap S$ の半群環と等しい．また R^G の異なるイニシャル代数の個数は $|G|$ である．

特別な場合として，n 次対称群 S_n が半群 $S = \mathbf{Z}^n_{\geq 0}$ に座標成分の置換 (3.1) によって作用している場合を考える．S_n は位数 $n!$ の鏡映群である．命題 4.2 より，R^G に対して $n!$ 個の異なるイニシャル代数が存在する．実際，二つの乗法的項順序 $\prec$ と $\prec'$ が，R^G の同じイニシャル代数を定めるための必要十分条件は，n 個の単項式 $x_1, \cdots, x_n$ の間の大小関係が，二つの乗法的項順序 $\prec$ と $\prec'$ に関して等しいことである (cf. [7, Theorem 1.14])．

次の二つの系によって，定理 3.2 の説明が完了する．

系 4.3 G は鏡映群であるとする．もし R が有限生成ならば，任意の $\prec \in \Omega$ に関して，R^G のイニシャル代数 $\mathrm{in}_\prec(R^G)$ も有限生成である．

系 4.4 G は鏡映群であるとする．もし R が有限生成でないならば，任意の $\prec \in \Omega$ に関して，R^G のイニシャル代数 $\mathrm{in}_\prec(R^G)$ も有限生成でない．

参考文献

[1] D. Eisenbud, *Introduction to Commutative Algebra with a View Towards Algebraic Geometry*, GTM 150, Springer, New York (1995).

[2] M. Göbel, *A Constructive Description of SAGBI Bases for Polynomial Invariants of Permutation Group*, J. Symb. Comput. **26**, (1998), 261–272.

[3] M. Göbel, *Three remarks on SAGBI bases for polynomial invariants of permutation groups*, in *Combinatorics, Computation & Logic* '99 (Auckland), Aust. Comput. Sci. Commun., Vol. 21, Springer, Singapore, (1999), 190–201.

[4] S. Kuroda, *The infiniteness of the SAGBI bases for certain invariant rings*, submitted to J. Pure. Appl. Algebra.

[5] T.Y. Lam, *Ten lectures on quadratic forms over fields*, in *Conference on Quadratic Forms* 1976, G. Orzech, ed., Queen's Papers in Pure and Applied Mathematics 46.

[6] L. Robbiano, *On the theory of graded structures*, J. Symb. Comput. **2**, (1986), 139–170.

[7] L. Robbiano, M. Sweedler, *Subalgebra bases*, Springer Lecture Notes in Mathematics **1430**, (1988), 61–87.

[8] N. Schwartz, *Stability of Gröbner bases*, J. Pure. Appl. Algebra **53**, (1988), 171–186.

[9] M. Stillman, H. Tsai, *Using SAGBI bases to compute invariants*, J. Pure. Appl. Algebra **139**, (1999), 285–302.

[10] B. Sturmfels, *Gröbner Bases and Convex Polytopes*, AMS University Lecture Series, Vol. 8, (1995).