数理解析研究所講究録
1177 巻 2000 年 26-36

RANKS AND EMBEDDINGS OF C^*-ALGEBRAS OF CONTINUOUS FIELDS

須藤　隆洋 (SUDO Takahiro)　　琉球大理

§0. 研究の動機 (MOTIVATION) など

次の問題が今回の講演の研究の動機である：

問題. 離散ハイゼンベルグ群 $H_3^{\mathbb{Z}}$の C^*-群環 $C^*(H_3^{\mathbb{Z}})$ のステイブル・ランク (*stable rank*) を (群の言葉で) 計算せよ。つまり、記号では、$\mathrm{sr}(C^*(H_3^{\mathbb{Z}}))=?$ となる。ただし、

$$H_3^{\mathbb{Z}} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & n & l \\ 0 & 1 & m \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (l,m,n), \quad n,m,l \in \mathbb{Z} \right\}$$

この問題は、$H_3^{\mathbb{Z}}$を一般のリー群 G で置き換えたときの Rieffel の問題 [Rf1] の特殊な場合である。一般の (リー) 群 G の場合は、コンパクトのときは簡単で、$\mathrm{sr}(C^*(G)) = 1$ なので、非コンパクトとして、ラフに言うと、次のように場合分けされる：

$$G:\text{連結リー群}\begin{cases} \text{アメナブル群}\begin{cases}\text{巾零リー群}\\ \text{可解リー群}\\ \cdots\cdots\end{cases} \\ \text{非アメナブル群}\begin{cases}\text{半単純リー群}\\ \text{可約リー群}\\ \cdots\cdots\end{cases}\end{cases}$$

$$G:\text{離散群}\begin{cases} \text{アメナブル群}\begin{cases}\text{巾零離散群}\\ \text{可解離散群}\\ \cdots\cdots\end{cases} \\ \text{非アメナブル群}\begin{cases}\text{自由積群}\\ \text{融合自由積群}\\ \cdots\cdots\end{cases}\end{cases}$$

Talk on June 6, 2000
2000 Mathematics Subject Classification. Primary 46L05, 46L80, 19K56
Key words and phrases. Stable rank, real rank, continuous field, Heisenberg group.

ただし、Gが非アメナブルのときは、Gの縮約C*-群環を考える。Rieffelの問題は、[ST1, 2] より巾零単連結リー群、I型単連結可解リー群の場合は済みで、[Sd1,2,3] よりI型アメナブル連結リー群、I型非アメナブル連結リー群の場合はほぼ済みで、[Sd4,5] より非I型可解リー群の重要な例であるMautner群、Dixmier群を含む特殊なリー半直積群の場合は済みである。一方、[DHR], [DH] より自由積群の場合は済みで、融合自由積群の場合は一部済みである。$H_3^{\mathbb{Z}}$はアメナブル巾零離散群であり、今回の研究結果は、アメナブル離散群の場合のRieffelの問題への第一ステップと考えられる。

次に、C*-群環 $C^*(H_3^{\mathbb{Z}})$ は、連続場のC*-環の構造をもつことを復習する。$H_3^{\mathbb{Z}}$は、上の行列とベクトルの同一視で、半直積 $\mathbb{Z}^2 \rtimes \mathbb{Z}$ に同型なのと、フーリエ変換を用いて、$C^*(H_3^{\mathbb{Z}})$ は、次の接合積に同型である：

$$C^*(H_3^{\mathbb{Z}}) \cong C^*(\mathbb{Z}^2) \rtimes \mathbb{Z} \cong C(\mathbb{T}^2) \rtimes_\alpha \mathbb{Z}.$$

ただし、2-トーラス $\mathbb{T}^2$上の $\mathbb{Z}$ の作用αは、

$$\alpha_n(w, z) = (w, w^n z) \quad w, z \in \mathbb{T}, n \in \mathbb{Z}$$

このとき、各 $w \in \mathbb{T}$ に対して、$\{w\} \times \mathbb{T}$ はαで不変で、特に $\{1\} \times \mathbb{T}$ はαで不動である。従って、次の上への$*$-準同型 π_wが定義できる：

$$\pi_w : C(\mathbb{T}^2) \rtimes_\alpha \mathbb{Z} \to C(\{w\} \times \mathbb{T}) \rtimes_\alpha \mathbb{Z} \equiv \mathfrak{A}_w \cong \mathbb{T}_\theta^2$$

ただし、$w = e^{2\pi i\theta}$, $\theta \in [0, 1]$ で、$\mathbb{T}_\theta^2$は非可換2-トーラス (=無理数回転環) である。さらに、次の $\mathbb{T}$ 上の関数：

$$\hat{a} : \mathbb{T} \ni w \mapsto \pi_w(a) \in \mathfrak{A}_w$$

は $\mathbb{T}$ 上の $\{\mathfrak{A}_w\}_{w\in\mathbb{T}}$をファイバーとするC*-環の連続場で、ノルム値関数 $w \mapsto \|\pi_w(a)\|$ は $\mathbb{T}$ 上連続である。このとき次の同型対応がある：

$$C^*(H_{\mathbb{Z}}^3) \ni a \mapsto \hat{a} \in \Gamma(\mathbb{T}, \{\mathfrak{A}_w\}_{w\in\mathbb{T}}, \mathfrak{F})$$

ただし、右辺は $\hat{a}$全体 ($= \mathfrak{F}$ としてよい) で定義される連続場の C*-環である (cf.[AP]).

一般には、底空間 (base space) として局所コンパクト、ハウスドルフ空間 X と、ファイバーとして C*-環の族 $\{\mathfrak{A}_t\}_{t\in X}$ と、X 上の C*-環の連続場の適当な族 $\mathfrak{F}$ (各点の代数演算で閉じていて、各点の局所収束でも閉じている) を与えると、(無限遠で消える) 連続場の C*環 $\Gamma_0(X, \{\mathfrak{A}_t\}_{t\in X}, \mathfrak{F})$ が定義できる (cf.[Dx]).

この連続場の C*環は、ファイバー空間のファイバーを、一般に非可換の C*-環にした、ある非可換ファイバー空間の無限遠で消えるノルム値連続断面全体とみなせるが、次の意味での局所自明性は一般にはない：連続場の C*環の底空間の適当な開近傍 W への制限は、テンソル積 $C_0(W) \otimes \mathfrak{A}_w$, $w \in W$ に同型である。ちなみに、各ファイバーが、同次的 (homogeneous) C*-環の場合は、その連続場の C*-環は局所自明性をもつ。しかしながら、$C^*(H_3^{\mathbb{Z}})$ の場合は、局所自明性がまったくなく、これ以上の解析は、不能であると思われ、そのランクの計算は、これまで成されてなかった。

§1. 主結果

次の命題が、今回の研究の鍵 (キー) である：

命題. *Let X be a locally compact Hausdorff space and $\{\mathfrak{A}_t\}_{t\in X}$ a family of C^*-algebras $\mathfrak{A}_t$. Then $\Gamma_0(X, \{\mathfrak{A}_t\}_{t\in X}, \mathfrak{F})$ is a quotient of a C^*-subalgebra of $\oplus^{c_0}_{t\in X} C_0(X, \mathfrak{A}_t)$.*

ただし、$\Gamma_0(X, \{\mathfrak{A}_t\}_{t\in X}, \mathfrak{F})$ は、適当な C*-環の連続場 $\mathfrak{F}$ に附随する連続場の C*-環で、$C_0(X, \mathfrak{A}_t)$ は、X から $\mathfrak{A}_t$への無限遠で消える連続関数全体のなす C*-環で、$\oplus^{c_0}_{t\in X}$は (位相的) 制限直和である。すなわち、$(a_t)_{t\in X}$をこの直和の元とすると、任意の $\varepsilon > 0$ に対して、ある X のコンパクト集合 C が存在して、$\|a_t\| < \varepsilon$, $t \in X \setminus C$ が成り立つ。この命題の証明のキーは、連続場の C*-環を拡大し、上の制限直和に埋め込むことである。実際、次の拡大を考える：

$$\Gamma_0(X, \{\mathfrak{A}_t\}_{t\in X}, \mathfrak{F}) \ni f \mapsto \tilde{f} \in \oplus^{c_0}_{t\in X} C_0(X, \mathfrak{A}_t),$$

$$\tilde{f}(\cdot, t) \in C_0(X, \mathfrak{A}_t), \quad \tilde{f}(t,t) = f(t) \in \mathfrak{A}_t.$$

拡大の仕方は一意的ではなく、全ての f に対して、このような拡大全ての集合を $\mathfrak{B}$ とおくと、$\oplus^{c_0}_{t\in X} C_0(X, \mathfrak{A}_t)$ の部分 C*-環になる。このとき、次が成り立つ：

定理 **1.** *Let X be a locally compact Hausdorff space and $\{\mathfrak{A}_t\}_{t\in X}$ a family of C^*-algebras $\mathfrak{A}_t$. Then we have that*

$$\begin{cases} \mathrm{sr}(\Gamma_0(X, \{\mathfrak{A}_t\}_{t\in X}, \mathfrak{F})) \le \sup_{t\in X} \mathrm{sr}(C_0(X, \mathfrak{A}_t)), \\ \mathrm{RR}(\Gamma_0(X, \{\mathfrak{A}_t\}_{t\in X}, \mathfrak{F})) \le \sup_{t\in X} \mathrm{RR}(C_0(X, \mathfrak{A}_t)), \\ \mathrm{csr}(\Gamma_0(X, \{\mathfrak{A}_t\}_{t\in X}, \mathfrak{F})) \le \sup_{t\in X} (\mathrm{csr}(C_0(X, \mathfrak{A}_t)) \vee \mathrm{sr}(C_0(X, \mathfrak{A}_t))). \end{cases}$$

ただし、$\mathrm{sr}(\cdot)$, $\mathrm{RR}(\cdot)$, $\mathrm{csr}(\cdot)$ はそれぞれステイブル・ランク、リアル・ランク (*real rank*), 連結ステイブル・ランク (*connected stable rank*) を意味し、$\vee$は最大値を意味する。

証明の概略. 上で定義した C*-環 $\mathfrak{B}$ から $\Gamma_0(X, \{\mathfrak{A}_t\}_{t\in X}, \mathfrak{F})$ の上への*-準同型が自然にあるので、

$$\mathrm{sr}(\Gamma_0(X, \{\mathfrak{A}_t\}_{t\in X}, \mathfrak{F})) \le \mathrm{sr}(\mathfrak{B}), \quad \mathrm{RR}(\Gamma_0(X, \{\mathfrak{A}_t\}_{t\in X}, \mathfrak{F})) \le \mathrm{RR}(\mathfrak{B})$$

が成り立つ。さらに、ランク特有の細かい議論より次を証明する：

$$\mathrm{sr}(\mathfrak{B}) \le \sup_{t\in X} \mathrm{sr}(C_0(X, \mathfrak{A}_t)), \quad \mathrm{RR}(\mathfrak{B}) \le \sup_{t\in X} \mathrm{RR}(C_0(X, \mathfrak{A}_t)).$$

連結ステイブル・ランクの評価式は、連結ステイブル・ランクの基本事実 ([Rf1], [Eh1]) と上のステイブル・ランクの評価式を示す際の議論を使う。細かい証明に興味ある読者は、[Sd7] を参照せよ。 □

注意. 逆の不等式として、次が成り立つ：

$$\begin{cases} \mathrm{sr}(\Gamma_0(X, \{\mathfrak{A}_t\}_{t\in X}, \mathfrak{F})) \geq \sup_{t\in X} \mathrm{sr}(\mathfrak{A}_t), \\ \mathrm{RR}(\Gamma_0(X, \{\mathfrak{A}_t\}_{t\in X}, \mathfrak{F})) \geq \sup_{t\in X} \mathrm{RR}(\mathfrak{A}_t), \end{cases}$$

望ましい新事実として、次を述べたが、一般には間違いのようである。

$$\mathrm{csr}(\Gamma_0(X, \{\mathfrak{A}_t\}_{t\in X}, \mathfrak{F})) \geq \sup_{t\in X} \mathrm{csr}(\mathfrak{A}_t).$$

ここでお詫びしたい。間違いは、$\Gamma_0(X, \{\mathfrak{A}_t\}_{t\in X}, \mathfrak{F})$ から $\mathfrak{A}_t$への上への写像が分裂してる (split) と勘違いした所でした (分裂してる場合は上の不等式は正しい)。反例として、$C_0(\mathbb{R}^2) = C_0(\mathbb{R}, C_0(\mathbb{R}))$ より、$\mathfrak{A}_t = C_0(\mathbb{R}), t \in \mathbb{R}$ とすると、

$$\mathrm{csr}(C_0(\mathbb{R}^2)) = 1 < \mathrm{csr}(C_0(\mathbb{R})) = 2.$$

さらに、次の完全列：

$$0 \to C_0(\mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{R} \times \{0\})) \to C_0(\mathbb{R}^2) \to C_0(\mathbb{R}) \to 0$$

が分裂してると仮定すると、K_0群の完全列

$$0 \to \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z} \to 0 \to 0$$

が従うはずであるが、これは矛盾である。

一方、次が成り立つ：

定理 **2.** X を局所コンパクト、ハウスドルフ空間とし、$\{\mathfrak{A}_t\}_{t\in X}$を C^*-環の族とする。このとき連続場の C^*-環 $\Gamma_0(X, \{\mathfrak{A}_t\}_{t\in X}, \mathfrak{F})$ は、(フル) 直和 $\oplus_{t\in X}(C^b(X) \otimes \mathfrak{A}_t)$ に埋め込み可能である。ただし、$C^b(X)$ は、X 上の有界連続関数全体のなす C^*-環である。

証明の概略. 次の埋め込み (embedding) を考える：

$$\Gamma_0(X, \{\mathfrak{A}_t\}_{t\in X}, \mathfrak{F}) \ni f \mapsto \{1 \otimes f(t)\}_{t\in X} \in \oplus_{t\in X}(C^b(X) \otimes \mathfrak{A}_t).$$

□

定理 1 の証明と同様にして、次が成り立つ：

定理 **3.** *Let X be a locally compact Hausdorff space and $\{\mathfrak{A}_t\}_{t\in X}$ a family of C^*-algebras $\mathfrak{A}_t$. Then we have that*

$$\begin{cases} \mathrm{sr}(\Gamma^b(X,\{\mathfrak{A}_t\}_{t\in X},\mathfrak{F})) \le \sup_{t\in X} \mathrm{sr}(C^b(X)\otimes\mathfrak{A}_t), \\ \mathrm{RR}(\Gamma^b(X,\{\mathfrak{A}_t\}_{t\in X},\mathfrak{F})) \le \sup_{t\in X} \mathrm{RR}(C^b(X)\otimes\mathfrak{A}_t), \\ \mathrm{csr}(\Gamma^b(X,\{\mathfrak{A}_t\}_{t\in X},\mathfrak{F})) \le \sup_{t\in X}(\mathrm{csr}(C^b(X)\otimes\mathfrak{A}_t)\vee \mathrm{sr}(C^b(X)\otimes\mathfrak{A}_t)). \end{cases}$$

ただし、$\Gamma^b(X,\{\mathfrak{A}_t\}_{t\in X},\mathfrak{F})$ は、有界な連続場の C^*-環である。

注意. 各 $\mathfrak{A}_t$が単位元 1_tを持ち、$\mathfrak{F}$ が (局所) 単位連続場 $t\mapsto 1_t$を含めば、

$$M(\Gamma_0(X,\{\mathfrak{A}_t\}_{t\in X},\mathfrak{F})) \cong \Gamma^b(X,\{\mathfrak{A}_t\}_{t\in X},\mathfrak{F})$$

ただし、左辺は、連続場の C*-環の multiplier.

§2. 応用

まず最初に、以下で使うランクの公式をあげておく。

(F1): C*環の完全列 $0\to\mathfrak{I}\to\mathfrak{A}\to\mathfrak{A}/\mathfrak{I}\to 0$ に対して、

$$\begin{cases} \mathrm{sr}(\mathfrak{I})\vee\mathrm{sr}(\mathfrak{A}/\mathfrak{I}) \le \mathrm{sr}(\mathfrak{A}) \le \mathrm{sr}(\mathfrak{I})\vee\mathrm{sr}(\mathfrak{A}/\mathfrak{I})\vee\mathrm{csr}(\mathfrak{A}/\mathfrak{I}), \\ \mathrm{csr}(\mathfrak{A}/\mathfrak{I}) \le \mathrm{csr}(\mathfrak{A})\vee\mathrm{sr}(\mathfrak{A}), \quad \mathrm{csr}(\mathfrak{A}) \le \mathrm{csr}(\mathfrak{I})\vee\mathrm{csr}(\mathfrak{A}/\mathfrak{I}), \\ \mathrm{RR}(\mathfrak{I})\vee\mathrm{RR}(\mathfrak{A}/\mathfrak{I}) \le \mathrm{RR}(\mathfrak{A}) \le \mathrm{RR}(M(\mathfrak{I}))\vee\mathrm{RR}(\mathfrak{A}/\mathfrak{I}), \end{cases}$$

ただし、$\vee$ は最大値。 ([Rf1], [Sh], [Eh1,2], [NOP]).

(F2): X をコンパクト、ハウスドルフ空間として、[Rf1], [Ns1], [BP] により、

$$\begin{cases} \mathrm{sr}(C(X)) = [\dim X/2]+1 \equiv \dim_{\mathbb{C}} X, \\ \mathrm{csr}(C(X)) \le [(\dim X+1)/2]+1, \quad \mathrm{RR}(C(X)) = \dim X, \end{cases}$$

ただし、$\dim X$ は X の被覆次元で、$[x]$ は x 以下の最大の整数を意味する。

(F3): C*環 $\mathfrak{A}$ 上の n 次の行列環 $M_n(\mathfrak{A})$ について、 [Rf1], [Rf2], [BE] により、

$$\begin{cases} \mathrm{sr}(M_n(\mathfrak{A})) = \{(\mathrm{sr}(\mathfrak{A})-1)/n\}+1, \quad \mathrm{csr}(M_n(\mathfrak{A})) \le \{(\mathrm{csr}(\mathfrak{A})-1)/n\}+1, \\ \mathrm{RR}(M_n(C(X))) = \{\dim X/(2n-1)\}, \end{cases}$$

ただし、$\{x\}$ は x 以上の最小の整数である。

(F4): $\mathbb{K}$ を可算無限次元のヒルベルト空間上のコンパクト作用素全体の C*環とする。このとき、

$$\begin{cases} \mathrm{sr}(\mathfrak{A}\otimes\mathbb{K}) = \mathrm{sr}(\mathfrak{A})\wedge 2, \quad \mathrm{csr}(\mathfrak{A}\otimes\mathbb{K}) \le \mathrm{csr}(\mathfrak{A})\wedge 2, \\ \mathrm{RR}(\mathfrak{A}\otimes\mathbb{K}) = \mathrm{RR}(\mathfrak{A})\wedge 1 \end{cases}$$

ただし、$\wedge$ は最小値を意味する。[Rf1], ([Sh], [Ns1], [Rf2]), ([BE], [BP]) をそれぞれ参照。

さて、階数 $(2n+1)$ の離散ハイゼンベルグ群 $H^{\mathbb{Z}}_{2n+1}$ は次で定義される：

$$H^{\mathbb{Z}}_{2n+1} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & n & l \\ & 1_n & m^t \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} = (l,m,n) : n,m \in \mathbb{Z}^n, l \in \mathbb{Z} \right\}$$

ただし、1_nは n 次単位行列で、m^tは、m の転置である。上の行列とベクトルの同一視より、$H^{\mathbb{Z}}_{2n+1}$は半直積 $\mathbb{Z}^{n+1} \rtimes \mathbb{Z}^n$に同型である。

上の定理 1 を主に用いて、

定理 4. $H^{\mathbb{Z}}_{2n+1}$を階数 $(2n+1)$ の離散ハイゼンベルグ群とし、$C^*(H^{\mathbb{Z}}_{2n+1})$ をその C^*-群環とする。このとき、

$$\begin{cases} \mathrm{sr}(C^*(H^{\mathbb{Z}}_{2n+1})) = n+1 = \dim_{\mathbb{C}}(\hat{H}^{\mathbb{Z}}_{2n+1})_1, \\ 2 \le \mathrm{csr}(C^*(H^{\mathbb{Z}}_{2n+1})) \le n+1, \\ \mathrm{RR}(C^*(H^{\mathbb{Z}}_{2n+1})) = 2n = \dim(\hat{H}^{\mathbb{Z}}_{2n+1})_1. \end{cases}$$

ただし、$(\hat{H}^{\mathbb{Z}}_{2n+1})_1$は、$H^{\mathbb{Z}}_{2n+1}$の 1 次元表現全体の空間である。

証明の概略. §0 の $n=1$ の場合を参考にして、次が成り立つ：

$$C^*(H^{\mathbb{Z}}_{2n+1}) \cong C^*(\mathbb{Z}^{n+1}) \rtimes \mathbb{Z}^n \cong C(\mathbb{T}^{n+1}) \rtimes \mathbb{Z}^n \cong \Gamma(\mathbb{T}, \{\otimes^n \mathfrak{A}_w\}_{w\in\mathbb{T}})$$

ただし、$\otimes^n$は n 重テンソル積である。定理 1 を直接用いて、

$$\begin{cases} \mathrm{sr}(C^*(H^{\mathbb{Z}}_{2n+1})) \le \sup_{w\in\mathbb{T}} \mathrm{sr}(C(\mathbb{T}, \otimes^n\mathfrak{A}_w)), \\ \mathrm{csr}(C^*(H^{\mathbb{Z}}_{2n+1})) \le \sup_{w\in\mathbb{T}} (\mathrm{csr}(C(\mathbb{T}, \otimes^n\mathfrak{A}_w)) \vee \mathrm{sr}(C(\mathbb{T}, \otimes^n\mathfrak{A}_w))), \\ \mathrm{RR}(C^*(H^{\mathbb{Z}}_{2n+1})) \le \sup_{w\in\mathbb{T}} \mathrm{RR}(C(\mathbb{T}, \otimes^n\mathfrak{A}_w)). \end{cases}$$

さらに、$w=1$ のとき、

$$\begin{cases} \mathrm{sr}(C(\mathbb{T}^{2n+1})) = n+1, & \mathrm{csr}(C(\mathbb{T}^{2n+1})) = n+2, \\ \mathrm{RR}(C(\mathbb{T}^{2n+1})) = 2n+1, & \end{cases}$$

$w \neq 1$ のとき、w によって、$\mathfrak{A}_w$ が単純 A$\mathbb{T}$ 環か、同次的 C*環であることより、

$$\begin{cases} \mathrm{sr}(C(\mathbb{T}, \otimes^n \mathfrak{A}_w)) \leq 2, & \mathrm{csr}(C(\mathbb{T}, \otimes^n \mathfrak{A}_w)) \leq 2, \\ \mathrm{RR}(C(\mathbb{T}, \otimes^n \mathfrak{A}_w)) \leq 1. & \end{cases}$$

がわかる (cf.[EE], [Rf1]).

よりシャープなランク評価式を得るために、次の可換図式を考える：

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathfrak{I} & \longrightarrow & C^*(H^{\mathbb{Z}}_{2n+1}) & \longrightarrow & C(\mathbb{T}^{2n}) & \longrightarrow & 0 \\ & & \| & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathfrak{I} & \longrightarrow & M(\mathfrak{I}) & \longrightarrow & M(\mathfrak{I})/\mathfrak{I} & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

ただし、$\mathfrak{I} = C_0((\mathbb{T} \setminus \{1\}) \times \mathbb{T}^n) \rtimes \mathbb{Z}^n$ で、$M(\mathfrak{I}) \cong \Gamma^b(\mathbb{T} \setminus \{1\}, \{\mathfrak{A}_w\}_{w \in \mathbb{T}\setminus\{1\}}, \mathfrak{F})$ が成り立つ。このとき、[NOP, Proposition 1.6] と定理 3 と上の評価式を用いて、

$$\begin{aligned} \mathrm{sr}(C^*(H^{\mathbb{Z}}_{2n+1})) &\leq \mathrm{sr}(C(\mathbb{T}^{2n})) \vee \mathrm{sr}(M(\mathfrak{I})) \\ &\leq (n+1) \vee \sup_{w \in \mathbb{T}\setminus\{1\}} \mathrm{sr}(C^b(\mathbb{T} \setminus \{1\}) \otimes \mathfrak{A}_w) \leq n+1, \\ \mathrm{RR}(C^*(H^{\mathbb{Z}}_{2n+1})) &\leq \mathrm{RR}(C(\mathbb{T}^{2n})) \vee \mathrm{RR}(M(\mathfrak{I})) \\ &\leq (2n) \vee \sup_{w \in \mathbb{T}\setminus\{1\}} \mathrm{RR}(C^b(\mathbb{T} \setminus \{1\}) \otimes \mathfrak{A}_w) \leq 2n. \end{aligned}$$

ここで、$C^b(\mathbb{T} \setminus \{1\}) \cong C(\beta(\mathbb{T} \setminus \{1\}))$, $\dim \beta(\mathbb{T} \setminus \{1\}) = \dim \mathbb{T}$ がなりたつことに注意する。一方、(F1) と定理 3 より、

$$\begin{aligned} &\mathrm{csr}(C^*(H^{\mathbb{Z}}_{2n+1})) \leq \mathrm{csr}(C(\mathbb{T}^{2n})) \vee \mathrm{csr}(\mathfrak{I}) \\ &\leq (n+1) \vee \sup_{w \in \mathbb{T}\setminus\{1\}} (\mathrm{csr}(C_0(\mathbb{T} \setminus \{1\}) \otimes \mathfrak{A}_w) \vee \mathrm{sr}(C_0(\mathbb{T} \setminus \{1\}) \otimes \mathfrak{A}_w)) \leq n+1. \end{aligned}$$

□

$H^{\mathbb{Z}}_{2n+1}$の定義において、$\mathbb{Z}$ を $\mathbb{R}$ で置き換えると、実 $(2n+1)$ 次元のハイゼンベルグ・リー群 $H^{\mathbb{R}}_{2n+1}$ が定義できる。このとき、定理 4 と同様の論法で、次が計算される：

定理 5. $H^{\mathbb{R}}_{2n+1}$を実 $(2n+1)$ 次元ハイゼンベルグ・リー群とし、$C^*(H^{\mathbb{R}}_{2n+1})$ をその C^*-群環とする。このとき、

$$\begin{cases} \mathrm{sr}(C^*(H^{\mathbb{R}}_{2n+1})) = n+1 = \dim_{\mathbb{C}}(\hat{H}^{\mathbb{R}}_{2n+1})_1, \\ 2 \le \mathrm{csr}(C^*(H^{\mathbb{R}}_{2n+1})) \le n+1, \\ \mathrm{RR}(C^*(H^{\mathbb{R}}_{2n+1})) = 2n = \dim(\hat{H}^{\mathbb{R}}_{2n+1})_1. \end{cases}$$

注意. C^*-群環 $C^*(H^{\mathbb{R}}_{2n+1})$ は、次に同型である：

$$C^*(H^{\mathbb{R}}_{2n+1}) \cong C^*(\mathbb{R}^{n+1}) \rtimes \mathbb{R}^n \cong C_0(\mathbb{R}^{n+1}) \rtimes \mathbb{R}^n \cong \Gamma_0(\mathbb{R}, \{\mathfrak{A}_t\}_{t\in\mathbb{R}})$$

ただし、$\mathfrak{A}_0 = C_0(\mathbb{R}^{2n})$ で、$t \neq 0$ に対して、$\mathfrak{A}_t = \mathbb{K}$.

一方、定理 2 と [Pm] を用いて、

定理 6. C^*-群環 $C^*(H^{\mathbb{Z}}_{2n+1}), C^*(H^{\mathbb{R}}_{2n+1})$ は、有限次元 C^*-環の適当な帰納極限に埋め込み可能である。

さらに、次がなりたつ：

定理 7. 各 $\mathfrak{A}_t$が同次的 C^*-環の帰納極限ならば、連続場の C^*-環 $\Gamma_0(X, \{\mathfrak{A}_t\}_{t\in X}, \mathfrak{F})$ は、同次的 C^*-環の適当な帰納極限に埋め込み可能である。

別の応用として、次が成り立つ。

定理 8. $\mathfrak{A}$ を C^*-環とし、その既約ユニタリ表現の同値類の空間、スペクトル $\hat{\mathfrak{A}}$がハウスドルフ空間とする。このとき、

$$\begin{cases} \mathrm{sr}(\mathfrak{A}) \le \dim_{\mathbb{C}} \hat{\mathfrak{A}}^+, \quad \mathrm{csr}(\mathfrak{A}) \le [(\dim \hat{\mathfrak{A}}^+ + 1)/2] + 1, \\ \mathrm{RR}(\mathfrak{A}) \le \dim \hat{\mathfrak{A}}^+. \end{cases}$$

ただし、$\hat{\mathfrak{A}}^+$は、$\hat{\mathfrak{A}}$ の一点コンパクト化である。

証明. 仮定より、$\mathfrak{A} \cong \Gamma_0(\hat{\mathfrak{A}}, \{\pi(\mathfrak{A})\}_{\pi\in\hat{\mathfrak{A}}})$. ただし、$\pi(\mathfrak{A}) \cong \mathbb{K}$ or $M_n(\mathbb{C})$ $(n \ge 1)$. さらに定理 1 を直に適用する。 □

注意. $\mathfrak{A} = \Gamma_0(X, \{\mathfrak{A}_t\}_{t\in X})$ とし、 $\mathfrak{A}_t$は AF 環 (有限次元 C*環の帰納極限)、$\dim X \leq 1$ とすると、$\hat{\mathfrak{A}}$ は一般にハウスドルフ空間ではないが、定理 1 を用いると、

$$\begin{cases} \mathrm{sr}(\mathfrak{A}) = 1, \quad \mathrm{csr}(\mathfrak{A}) = 1 \text{ or } 2, \\ \mathrm{RR}(\mathfrak{A}) = 0 \text{ or } 1. \end{cases}$$

また、X が可縮ならば、X の次元に関係なく、$\mathrm{csr}(\mathfrak{A}) = 1$. また、$\dim X = 0$ ならば、$\mathrm{RR}(\mathfrak{A}) = 0$ が成り立つ。

References

[APT] C.A. Akemann, G.K. Pedersen and J. Tomiyama, *Multipliers of C^*-algebras*, J. Funct. Anal. **13** (1973), 277–301.

[AP] J. Anderson and W. Paschke, *The rotation algebra*, Houston J. Math. **15** (1989), 1–26.

[BE] E.J. Beggs and D.E. Evans, *The real rank of algebras of matrix valued functions*, Internat. J. Math. **2** (1991), 131–138.

[Bl] B. Blackadar, *K-theory for Operator Algebras*, Second Edition, Cambridge, 1998.

[BDR] B. Blackadar, M. Dădărlat and M. Rørdam, *The real rank of inductive limit C^*-algebras*, Math. Scand. **69** (1991), 211–216.

[BP] L.G. Brown and G.K. Pedersen, *C^*-algebras of real rank zero*, J. Funct. Anal. **99** (1991), 131–149.

[DNNP] M. Dădărlat, G. Nagy, A. Némethi and C. Pasnicu, *Reduction of toplogical stable rank in inductive limits of C^*-algebras*, Pacific J. Math. **153** (1992), 267–276.

[Dv] K.R. Davidson, *C^*-algebras by Example*, Fields Institute Monographs, AMS, 1996.

[Dx] J. Dixmier, *C^*-algebras*, North-Holland, 1962.

[DHR] K.J. Dykema, U. Haagerup and M. Rørdam, *The stable rank of some free product C^*-algebras*, Duke. Math. J. **90** (1997), 95–121, errata 94 (1998).

[DH] K.J. Dykema and P. de la Harpe, *Some groups whose reduced C^*-algebras have stable rank one*, J. Math. Pures Appl. **78** (1999), 591–608.

[Eh1] N. Elhage Hassan, *Rangs stables de certaines extensions*, J. London Math. Soc. **52** (1995), 605–624.

[Eh2] ———, *Rang réel de certaines extensions*, Proc. Amer. Math. Soc. **123** (1995), 3067–3073.

[EE] G.A. Elliott and D.E. Evans, *The structure of the irrational rotation C^*-algebra*, Ann. Math. **138** (1993), 477–501.

[F] J.M.G. Fell, *The structure of algebras of operator fields*, Acta Math. **106** (1961), 233–280.

[Le1] R. Lee, *On the C^*-algebras of operator fields*, Indiana Univ. Math. J. **25** (1976), 303–314.

[Le2] ———, *Full algebras of operator fields trivial except at one point*, Indiana Univ. Math. J. **26** (1977), 351–372.

[Mt] K. Matsumoto, *Non-commutative three dimensional spheres*, Japan. J. Math. **17** (1991), 333–356.

[MT] K. Matsumoto and J. Tomiyama, *Non-commutative lens spaces*, J. Math. Soc. Japan **44** (1992), 13–41.

[Mp] G.J. Murphy, *C^*-algebras and operator theory*, Academic Press, 1990.

[Ng] K. Nagami, *Dimension Theory*, Academic Press, New York-London, 1970.

[NOP] M. Nagisa, H. Osaka and N.C. Phillips, *Ranks of algebras of continuous C^*-algebra valued functions*, Preprint.

[Ns1] V. Nistor, *Stable range for tensor products of extensions of $\mathcal{K}$ by $C(X)$*, J. Operator Theory **16** (1986), 387–396.

[Ns2] ———, *Stable rank for a certain class of type I C^*-algebras*, J. Operator Theory **17** (1987), 365–373.

[Os1] H. Osaka, *Counterexamples for Brown-Pedersen's conjecture in "C^*-algebras of real rank zero"*, Proc. Amer. Math. Soc. **118** (1993), 495–497.

[Os2] ———, *Real rank of crossed products by connected compact groups*, Bull. London Math. Soc. **27** (1995), 257–264.

[Pd] G.K. Pedersen, *C^*-Algebras and their Automorphism Groups*, Academic Press, London-New York-San Francisco, 1979.

[Pm] M. Pimsner, *Embedding some transformation group C^*-algebras into AF-algebras*, Ergod. Th. & Dynam. Sys. **3** (1983), 613–626.

[Rf1] M.A. Rieffel, *Dimension and stable rank in the K-theory of C^*-algebras*, Proc. London Math. Soc. **46** (1983), 301–333.

[Rf2] ———, *The homotopy groups of the unitary groups of non-commutative tori*, J. Operator Theory **17** (1987), 237–254.

[Sh] A.J-L. Sheu, *A cancellation theorem for projective modules over the group C^*-algebras of certain nilpotent Lie groups*, Canad. J. Math. **39** (1987), 365–427.

[Sd1] T. Sudo, *Stable rank of the reduced C^*-algebras of non-amenable Lie groups of type I*, Proc. Amer. Math. Soc. **125** (1997), 3647–3654.

[Sd2] ———, *Stable rank of the C^*-algebras of amenable Lie groups of type I*, Math. Scand. **84** (1999), 231–242.

[Sd3] ———, *Dimension theory of group C^*-algebras of connected Lie groups of type I*, J. Math. Soc. Japan **52** (2000), 583–590.

[Sd4] ———, *Structure of group C^*-algebras of Lie semi-direct products $\mathbb{C}^n \rtimes \mathbb{R}$*, Preprint.

[Sd5] ———, *Structure of group C^*-algebras of the generalized Dixmier groups*, Preprint.

[Sd6] ———, *Stable rank of crossed products by $\mathbb{R}$ or $\mathbb{T}$*, Preprint.

[Sd7] ———, *Ranks and embeddings of C^*-algebras of continuous fields*, Preprint.

[ST1] T. Sudo and H. Takai, *Stable rank of the C^*-algebras of nilpotent Lie groups*, Internat. J. Math. **6** (1995), 439–446.

[ST2] ———, *Stable rank of the C^*-algebras of solvable Lie groups of type I*, J. Operator Theory **38** (1997), 67–86.

[Tm1] J. Tomiyama, *Invitation to C^*-algebras and topological dynamics*, World Scientific, 1987.

[Tm2] ———, *The interplay between topological dynamics and theory of C^*-algebras*, Lecture notes series, vol. 2, Seoul National Univ., 1994.

[TT] J. Tomiyama and M. Takesaki, *Applications of fibre bundles of the certain class of C^*-algebras*, Tôhoku Math. J. **13** (1963), 498–523.

[Wo] N.E. Wegge-Olsen, *K-theory and C^*-algebras*, Oxford Univ. Press, 1993.

903-0213 沖縄県中頭郡西原町千原一番地 琉球大学 理学部 数理科学科

Department of Mathematical Sciences, Faculty of Science, University of the Ryukyus, Nishihara-cho, Okinawa 903-0213, Japan.

E-mail address: sudo@math.u-ryukyu.ac.jp