数理解析研究所講究録
1179巻 2000年 13-24

サドル・センターを有する多自由度ハミルトン系の非可積分性とアーノルド拡散

岐阜大工学部　　矢ヶ崎一幸 (Kazuyuki Yagasaki)

1. はじめに

2自由度ハミルトン系において，ホモクリニック軌道をもつサドル・センターが存在する場合，カオス挙動が生じて系が非可積分となり，また，無限個のホモクリニック分岐が起こることが，Shil'inikov型 [1, 2] あるいはMelnikov型 [2, 3] の解析により示されている [4]-[9]. 本報告では，このようなサドル・センターを有する，あるクラスの3自由度以上の多自由度ハミルトン系を取りあげ，2自由度系に対する既報 [9] の結果を発展させ，Melnikovの方法 [2, 3] をさらに拡張し，サドル・センター近傍の準周期軌道からなる不変トーラスに対するホモクリニック軌道とヘテロクリニック軌道が存在する条件を解析的に求めるための手法を提案する．さらに，このような軌道が存在するとき，系は非可積分となり，Arnold拡散 [10, 11] と類似の現象が起こることを示す．また，具体的な適用例を示し，本手法の有用性を明らかにする．なお，証明などの詳細については文献 [12] を参照されたい．

2. 仮定

次の形の $n+1$ 自由度ハミルトン系（$n\geq 2$）を考える．

$$\dot{x}=J_1\mathrm{D}_xH(x,y),\quad \dot{y}=J_n\mathrm{D}_yH(x,y),\quad (x,y)\in\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^{2n} \tag{1}$$

ここで，$H:\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^{2n}\to\mathbb{R}$ は C^{r+1} 級（$r\geq 2n+4$）であり，J_m は $2m$ 次シンプレクティック行列

$$J_m=\begin{pmatrix}0 & \mathrm{id}^m\\ -\mathrm{id}^m & 0\end{pmatrix},$$

id^m は m 次単位行列を表す．以下のことを仮定する．

(A1) 任意の $x\in\mathbb{R}^2$ に対して

$$\mathrm{D}_xH(0,0)=\mathrm{D}_yH(x,0)=0$$

が成立する．

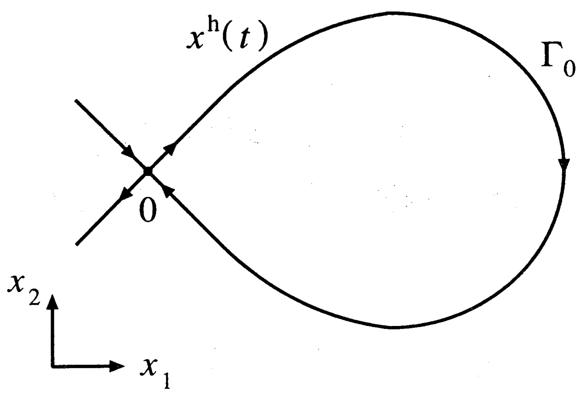

図 1. x 平面上の軌道

これは原点 $(x, y) = (0, 0)$ $(= O) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^{2n}$ が式 (1) の平衡点であり，x-平面，$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^{2n} | y = 0\}$，が式 (1) の流れのもとで不変であることを意味する．さらに，x-平面に制限された系

$$\dot{x} = J_1 \mathrm{D}_x H(x, 0) \tag{2}$$

は平衡点 $x = 0$ を有する．また，任意の $x \in \mathbb{R}^2$ に対して

$$\mathrm{D}_x^j \mathrm{D}_y H(x, 0) = 0, \quad j = 1, 2, \ldots,$$

が成立する．

(A2) 式 (2) の平衡点 $x = 0$ は双曲型サドルであり，ホモクリニック軌道 $x^{\mathrm{h}}(t)$ を有する．$\Gamma_0 = \{x^{\mathrm{h}}(t) | t \in \mathbb{R}\} \cup \{0\}$ とおく．図 1 を参照せよ．

(A3) 行列 $J_n \mathrm{D}_y^2 H(0, 0)$ は n 組の純虚固有値 $\pm \mathrm{i}\omega_j$, $j = 1, \ldots, n$, を有し，$1 \leq |k| = \sum_{j=1}^{n} |k_j| \leq 4$ を満足する $k = (k_1, \ldots, k_n)$，$k_j \in \mathbb{Z}$，$j = 1, \ldots, n$，に対して

$$k \cdot \omega = k_1 \omega_1 + \cdots + k_n \omega_n \neq 0 \tag{3}$$

が成立する．ここで，$\cdot$ はベクトルの内積を表し，$\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n)$ である．

仮定 (A2) と (A3) は，系 (1) の平衡点 O がサドル・センターであり，ホモクリニック軌道 $(x, y) = (x^{\mathrm{h}}(t), 0)$ を有することを意味する．サドル・センター O は，ホモクリニック軌道 $(x^{\mathrm{h}}(t), 0)$ に沿って一致する 1 次元安定多様体 $W^{\mathrm{s}}(O)$ と不安定多様体 $W^{\mathrm{u}}(O)$，および $2n$ 次元中心多様体 $W^{\mathrm{c}}(O)$ を有する．また，仮定 (A2) により，2 次正方行列 $J_1 \mathrm{D}_x^2 H(0, 0)$ の固有値は，λ をある正数として $\pm\lambda$ と表される．

仮定(A3)から，サドル・センター O の近傍において適当な正準変換 $(x,y)\in\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^{2n}\mapsto(s,u,I,\psi)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{T}^n$ が存在し，ハミルトン関数は次の Graff [13] の標準形に変換される．

$$H(s,u,I,\psi)=\lambda\,su+\omega\cdot I+\frac{1}{2}(AI\cdot I)+g(s,u,I,\psi) \tag{4}$$

ここで， A はある n 次正方行列，g は s，u および I に対して2次よりも高次の微小項のみを含む,（x 平面に対応する）$I\neq 0$ において C^{r+1} 級となる関数である．次のことを仮定する．

(A4) 行列 A は正則である．

このとき，Fenichel [14, 15] の不変多様体の理論（また [16] を参照せよ）および Pöschel [17] による KAM 理論によって，中心多様体 $W^{\mathrm{c}}(O)$ 上サドルセンター O の近傍で，Diophantine 条件

$$k\cdot\nu>c\,|k|^{-\tau},\quad k\in\mathbb{Z}^n,\quad k\neq 0 \tag{5}$$

を満足する，ω に近い振動数 ν の準周期軌道からなる不変トーラス $\mathscr{T}_\nu$ の Cantor 集合が存在する．ここで，$c>0$ および $\tau>n-1$ は定数，$\nu=(\nu_1,\ldots,\nu_n)$ である．さらに，$\mathscr{T}_\nu$ は C^3，$(n+1)$ 次元安定および不安定多様体，$W^{\mathrm{s}}(\mathscr{T}_\nu)$ および $W^{\mathrm{u}}(\mathscr{T}_\nu)$，を有する．

$f(x,y)=J_1\mathrm{D}_xH(x,y)$ として，

$$p_j(x,\eta)=\frac{1}{(j+1)!}\mathrm{D}_y^{j+1}f(x,0)(\underbrace{\eta,\ldots,\eta}_{j+1})$$

とおく．$\mathrm{D}_x\mathrm{D}_yH(x,0)\equiv 0$ より $p_0(x,\eta)\equiv 0$ となる．次のことを仮定する．

(A5) $p_1(x,\eta)\not\equiv 0$

文献 [9] のように，仮定(A5)よりも弱い仮定の下でも，以下で得られるものと類似の結果を得ることができる．

3. ホモクリニックおよびヘテロクリニック軌道

サドルセンター O およびホモクリニック軌道 $(x^h(t),0)$ まわりの直交変分方程式，

$$\dot\eta=J_n\mathrm{D}_y^2H(0,0)\eta \tag{6}$$

および

$$\dot\eta=J_n\mathrm{D}_y^2H(x^{\mathrm{h}}(t),0)\eta, \tag{7}$$

を考える．式(6)の基本行列は，Φ を各引数に対して周期 2π で周期的で，$\Phi(0,\ldots,0)=\mathrm{id}^{2n}$ を満たすある関数として，$\Phi(\omega_1 t,\ldots,\omega_n t)$ と表すことができる．また，$\Psi(t)$ を式(7)の基本行列とする．このとき，線形微分方程式に対する基本的な性質 [21] から，極限

$$B_{\pm}=\lim_{t\to\pm\infty}\Phi(-\omega t)\Psi(t) \tag{8}$$

が存在し，これらの行列が正則であることが導かれる．ここで，$\Phi(\theta)=\Phi(\theta_1,\ldots,\theta_n)$, $\theta=(\theta_1,\ldots,\theta_n)$，と表している．$B_0=B_+B_-^{-1}$ とおく．

e_j を，行列 $J_n\mathrm{D}_y^2H(0,0)$ の固有値 $\pm\mathrm{i}\omega_j$ に対する固有ベクトルが張る固有空間に属するある実 $2n$ 次元ベクトルとし，$r=(r_1,\ldots,r_n)\in\mathbb{R}_+^n\,(=\prod_{j=1}^n(0,\infty))$ に対して

$$\bar{\eta}_r=\sum_{j=1}^n r_je_j$$

とおく．さらに，$\eta\in\mathbb{R}^{2n}$ に対して

$$q_j(\eta)=\frac{1}{(j+2)!}\mathrm{D}_y^{j+2}H(0,0)(\underbrace{\eta,\ldots,\eta}_{j+2})$$

と表す．次式によって，Melnikov 関数 $M(\theta;r)$ を定義する．

$$M(\theta;r)=q_0(\bar{\eta}_r)-q_0(B_0\Phi(\theta)\bar{\eta}_r) \tag{9}$$

このとき次の定理が成立する（証明は文献 [12] を参照せよ）．

定理 1. (i) ある点 $(\theta,r)=(\theta_0,r_0)\in\mathbb{T}^n\times\mathbb{R}_+^n$ が存在して，

$$M(\theta_0;r_0)=0,\quad \frac{\partial}{\partial\theta_j}M(\theta_0;r_0)\neq 0,\quad j=1,\ldots,n \tag{10}$$

となるものと仮定する．このとき，サドル・センター O の近傍に，それぞれ，ω に近く Diophantine 条件 (5) を満足する，振動数 ν^1 および ν^2 の準周期軌道からなる不変トーラス $\mathscr{T}_{\nu^1}$ および $\mathscr{T}_{\nu^2}$ が存在し，$\mathscr{T}_{\nu^1}$ の 不安定多様体 $W^{\mathrm{u}}(\mathscr{T}_{\nu^1})$ と $\mathscr{T}_{\nu^2}$ の 安定多様体 $W^{\mathrm{s}}(\mathscr{T}_{\nu^2})$ はレベル集合上で横断的に交差する．さらに，ある $\tilde{\theta}_0\in\mathbb{T}^n$ に対して $\Phi(\tilde{\theta}_0)\bar{\eta}_r=B_0\Phi(\theta_0)\bar{\eta}_r$ となるならば，$\nu^1=\nu^2(=\nu)$ とすることができる，すなわち，不変トーラス $\mathscr{T}_\nu$ に対する横断的なホモクリニック軌道が存在する．

(ii) $N-1$ 個の点 $\theta^j\in\mathbb{T}^n$，$j=1,\ldots,N-1$，と N 個の点 $r^j\in\mathbb{R}_+^n$，$j=1,\ldots,N$，が存在し，条件 (10) が $(\theta_0,r_0)=(\theta^j,r^j)$，$j=1,\ldots,N-1$，において成立し，さらに，ある $\tilde{\theta}^j\in\mathbb{T}^n$ に対して $\Phi(\tilde{\theta}^j)\bar{\eta}_{r^{j+1}}=B_0\Phi(\theta^j)\bar{\eta}_{r^j}$，$j=1,\ldots,N-1$，となるものとする．このとき，サドル・センター O の近傍に，それぞれ，ω に近く Diophantine 条件 (5) を満

足する，振動数 ν^j の準周期軌道からなる N 個の不変トーラス $\mathscr{T}_{\nu^j}$，$j=1,\dots,N$，が存在し，$W^{\mathrm{u}}(\mathscr{T}_{\nu^j})$ と $W^{\mathrm{s}}(\mathscr{T}_{\nu^{j+1}})$，$N=1,\dots,N-1$，はレベル集合上で横断的に交差する．このような性質をもつ不変トーラスの列は**遷移チェーン**と呼ばれる．

注意 1. 仮定 (A4) によって，サドル・センター O の十分近傍では $\mathscr{T}_{\nu^1}\neq\mathscr{T}_{\nu^2}$ のとき $\nu^1\neq\nu^2$ となる．

4. 非可積分性と Arnold 拡散

本節では，定理 1 で示されるような，n 次元不変トーラスに対する横断的なホモクリニック軌道あるいはヘテロクリニック軌道が存在することから導かれるいくつかの性質についての結果を与える．系の可積分性の定義から始める．

定義 1. U を $\mathbb{R}^{2(n+1)}$ のある開部分集合とする．U の稠密な開部分集合において，$\{F_0=H,F_1,\dots,F_n\}$ が包合的（すなわち，任意の $i,j=0,\dots,n$ に対して

$$\{F_i,F_j\}=J_{n+1}\mathrm{D}_zF_i(z)\cdot\mathrm{D}_zF_j(z)=0$$

）で，それらの導関数 $\mathrm{D}_zF_0,\dots,\mathrm{D}_zF_n$ が独立となる，n 個の**第 1 積分**と呼ばれる関数 $F_j:U\to\mathbb{R}$，$j=1,\dots,n$，が存在するとき，ハミルトン系 (1) は U において**(Liouville の意味で) 可積分**であるという．また，もし U の任意の点の近傍において H と独立なこのような n 個の第 1 積分が存在しないならば，ハミルトン系 (1) は U において**非可積分**であるという．

Koltsova and Lerman [18] が周期軌道のホモクリニック軌道に対して用いた議論を拡張することにより，次のことが証明される．

定理 2. 非共鳴な振動数（式 (3) を参照）をもつ準周期軌道からなる n 次元不変トーラス $\mathscr{T}$ が存在し，その $n+1$ 次元安定および不安定多様体，$W^{\mathrm{s}}(\mathscr{T})$ および $W^{\mathrm{u}}(\mathscr{T})$，が横断的に交差するものと仮定する．このとき，ハミルトン系 (1) は $W^{\mathrm{s}}(\mathscr{T})\cup W^{\mathrm{u}}(\mathscr{T})$ において非可積分である．

この定理の証明のために以下の結果が本質的である．

補題 1. Δ を レベル集合上で $W^{\mathrm{s}}(\mathscr{T})$ に横断的な $(n+1)$ 次元ディスクとする．このとき $W^{\mathrm{u}}(\mathscr{T})\subset\overline{\cup_{t>0}\phi_t(\Delta)}$ となる．ここで，ϕ_t は式 (1) によって定義される流れを表す．

この結果は文献 [19, 20] で与えられた議論を修正することにより証明される．

注意 2. 1組の n 次元不変トーラス $\mathscr{T}_j$，$j=1,2$，が存在し，$W^{\mathrm{u}}(\mathscr{T}_1)$ および $W^{\mathrm{u}}(\mathscr{T}_2)$ が，それぞれ，$W^{\mathrm{s}}(\mathscr{T}_2)$ および $W^{\mathrm{s}}(\mathscr{T}_1)$ とレベル集合上で横断的に交差する，すなわち，$\mathscr{T}_1$ と $\mathscr{T}_2$ がヘテロクリニック・サイクルを構成するものと仮定する．このとき，補題1から，$W^{\mathrm{u}}(\mathscr{T}_1)$ および $W^{\mathrm{u}}(\mathscr{T}_2)$ が，それぞれ，$W^{\mathrm{s}}(\mathscr{T}_1)$ および $W^{\mathrm{s}}(\mathscr{T}_2)$ とそのレベル集合において横断的に交差することが導かれる．よって，ハミルトン系 (1) は，$\bigcup_{j=1}^{2}(W^{\mathrm{s}}(\mathscr{T}_j)\cup W^{\mathrm{u}}(\mathscr{T}_j))$ を含む任意の開集合において非可積分となる．

また，補題 1 を用いることにより次のことが証明される．

定理 3. 非共鳴な振動数をもつ準周期軌道からなる N 個の不変トーラス $\mathscr{T}_j$，$j=1,\ldots,N$，が遷移チェーンを構成するものと仮定する．このとき，そのレベル集合上に $\mathscr{T}_1$ の任意に近い点からなる開集合が存在し，それに含まれる点を出発し，$\mathscr{T}_j$，$j=2,\ldots,N-1$，の近傍を順々に通り，$\mathscr{T}_N$ の任意に近くの点に到達する軌道が存在する．

これは，よく知られた，3 以上の自由度もつ近可積分ハミルトン系で起こる Arnold 拡散 [10, 11] と類似の現象である．

注意 3. 非共鳴な振動数をもつ準周期軌道からなる N_1+1 および N_2+1 個の不変トーラスが構成する 1 組の異なる遷移チェーン，$\{\mathscr{T}_0,\mathscr{T}_1^1,\ldots,\mathscr{T}_{N_1}^1,\mathscr{T}_0\}$ と $\{\mathscr{T}_0,\mathscr{T}_1^2,\ldots,\mathscr{T}_{N_2}^2,\mathscr{T}_0\}$，が存在するものとする（このように最初と最後の不変トーラスが一致するとき遷移チェーンは**循環的**であるという）．このとき，定理 3 によって，$\mathscr{T}_0$ の近くを出発し，順々に $\mathscr{T}_1^1,\ldots,\mathscr{T}_{N_1}^1$ あるいは $\mathscr{T}_1^2,\ldots,\mathscr{T}_{N_2}^2$ の近傍を通り，再び $\mathscr{T}_0$ の近くに戻るということを繰り返す軌道が存在する．これらの軌道に対して，$\mathscr{T}_1^1,\ldots,\mathscr{T}_{N_1}$ あるいは $\mathscr{T}_1^2,\ldots,\mathscr{T}_{N_2}$ の近傍を通過するかによって記号 “1” あるいは “2” を与えることができる．よって，Bernoulli シフトの軌道に対応づけられるカオス的な軌道が存在することになる．

5. ポテンシャルを有する系への適用

得られた理論をポテンシャルを有する系

$$\dot{x}_1=x_2,\quad \dot{x}_2=-\frac{\partial V}{\partial x_1}(x_1,y_1),\quad \dot{y}_j=y_{j+n},\quad \dot{y}_{j+n}=-\frac{\partial V}{\partial y_j}(x_1,y_1,\ldots,y_n) \tag{11}$$

に適用する．ここで，$V:\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ は C^{r+1} 級であり，

$$\frac{\partial V}{\partial x_1}(0,0)=\frac{\partial V}{\partial y_i}(x_1,0)=0,\quad \frac{\partial^3 V}{\partial x_1\partial y_i^2}(x_1,0)\not\equiv 0, \tag{12}$$

かつ $i\neq j$ に対して

$$\frac{\partial^3 V}{\partial y_i^3}(0,0)=\frac{\partial^3 V}{\partial x_1\partial y_i^2}(0,0)=0,\quad \frac{\partial^2 V}{\partial y_i\partial y_j}(x_1,0)=\frac{\partial^3 V}{\partial y_i\partial y_j^2}(0,0)=0 \tag{13}$$

を満たすものとする．式 (11) のハミルトニアンは

$$H(x,y)=\frac{1}{2}\left(x_2^2+\sum_{j=1}^{n}y_{j+n}^2\right)+V(x_1,y_1,\dots,y_n)$$

で与えられ，仮定 (A1) と (A5) が成立する．さらに，仮定 (A2)-(A4) が成立するものとする．特に，

$$\omega_j^2=\frac{\partial^2 V}{\partial y_j^2}(0,0)$$

となる．

中心多様体の標準的な計算方法 [3] を用いることにより，式 (12) と (13) から $W^{\mathrm{c}}(O)=\{(x,y)\,|\,x=\mathscr{O}(\|y\|^3)\}$ と求められる．$W^{\mathrm{c}}(O)$ 上において，式 (11) はハミルトン関数

$$\tilde{H}(y)=\frac{1}{2}(\omega_j^2y_j^2+y_{j+n}^2)+\frac{1}{24}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^4 V}{\partial y_j^4}(0,0)y_j^4+\frac{1}{4}\sum_{i\neq j}\frac{\partial^4 V}{\partial y_i^2\partial y_i^2}(0,0)y_i^2y_j^2+\mathscr{O}(\|y\|^5)$$

を有するハミルトン系となる．正準変換

$$I_j=\frac{1}{2\omega_j}(\omega_j^2y_j^2+y_{j+n}^2),\quad \psi_j=\arctan\left(\frac{y_{j+n}}{\omega_jy_j}\right),\quad j=1,\dots,n,$$

を施し，さらに平均化 [22] を行うと，

$$\begin{aligned}\tilde{H}(I,\psi)=&\sum_{j=1}^{n}\omega_jI_j+\frac{1}{16}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{\omega_j^2}\frac{\partial^4 V}{\partial y_j^4}(0,0)I_j^2\\&+\frac{1}{4}\sum_{i\neq j}\frac{1}{\omega_i\omega_j}\frac{\partial^4 V}{\partial y_i^2\partial y_i^2}(0,0)I_iI_j+\mathscr{O}(\|I\|^{5/2})\end{aligned}$$

となる．よって，Graff の標準形 (4) における行列 A の (i,j) 要素は次式で与えられる．

$$A_{ij}=\begin{cases}\dfrac{1}{8\omega_j^2}\dfrac{\partial^4 V}{\partial y_j^4}(0,0) & (i=j);\\[2ex] \dfrac{1}{2\omega_i\omega_j}\dfrac{\partial^4 V}{\partial y_i^2\partial y_j^2}(0,0) & (i\neq j)\end{cases} \tag{14}$$

サドル・センターおよびホモクリニック軌道まわりの直交変分方程式，(6) および (7)，は，それぞれ，

$$\dot{\eta}_j = \eta_{j+n}, \quad \dot{\eta}_{j+n} = -\omega_j^2 \eta_j \tag{15}$$

および

$$\dot{\eta}_j = \eta_{j+n}, \quad \dot{\eta}_{j+n} = -\frac{\partial^2 V}{\partial y_j}(x_1^{\mathrm{h}}(t), 0)\eta_j \tag{16}$$

で与えられる．$\eta_j = \hat{\eta}_j(t)$ を，$t \to +\infty$ のとき

$$\hat{\eta}_j(t) \to \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}, \tag{17}$$

$t \to -\infty$ のとき

$$\hat{\eta}_j(t) \to a_j \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} + b_j \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} \tag{18}$$

となる線形微分方程式

$$\ddot{\eta}_j + \frac{\partial^2 V}{\partial y_j^2}(x_1^{\mathrm{h}}(t), 0)\, \eta_j = 0$$

の解とする．ここで，a_j，$b_j \in \mathbb{C}$，$|a_j|^2 - |b_j|^2 = 1$ である．このような解は，$\lim_{t\to\pm\infty} x^{\mathrm{h}}(t) = 0$ かつ $\eta_j = \mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\omega_j t}$ が線形微分方程式

$$\ddot{\eta}_j + \omega_j^2 \eta_j = 0$$

の解であることから，線形微分方程式の基本的な性質 [21] により必ず存在する．文献 [9] の 5 節で与えられた計算から，式 (15) と (16) に対する基本行列は，

$$\Phi(\theta) = \tilde{Q} \begin{pmatrix} \Phi_1(\theta_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \Phi_n(\theta_n) \end{pmatrix} \tilde{Q}^{-1}, \quad \Psi(t) = \tilde{Q} \begin{pmatrix} \Psi_1(t) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \Psi_n(t) \end{pmatrix} \tilde{Q}^{-1}$$

となることがわかる．ここで，n 次正方行列 $\tilde{Q}$ の (i,j) 要素は

$$\tilde{Q}_{ij} = \begin{cases} 1 & (i \text{ が奇数かつ } j = (i+1)/2,\ \text{または } i \text{ が偶数かつ } j = n + i/2)\ ; \\ 0 & (\text{上記以外}) \end{cases}$$

で与えられ，

$$\Phi_j(\theta_j) = \begin{pmatrix} \cos\theta_j & \dfrac{1}{\omega_j}\sin\theta_j \\ -\omega_j \sin\theta_j & \cos\theta_j \end{pmatrix}, \quad \Psi_j(t) = \begin{pmatrix} \mathrm{Re}\,\hat{\eta}_j(t) & \dfrac{1}{\omega}\mathrm{Im}\,\hat{\eta}_j(t) \\ \mathrm{Re}\,\dot{\hat{\eta}}_j(t) & \dfrac{1}{\omega}\mathrm{Im}\,\dot{\hat{\eta}}_j(t) \end{pmatrix}$$

である．極限 (8) を求め，行列 B_0 を計算すると，次のようになる．

$$B_0 = \tilde{Q} \begin{pmatrix} B_{10} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & B_{n0} \end{pmatrix} \tilde{Q}^{-1}$$

ここで，

$$B_{j0} = \begin{pmatrix} \operatorname{Re} a_j - \operatorname{Re} b_j & \dfrac{1}{\omega_j}(\operatorname{Im} a_j - \operatorname{Im} b_j) \\ -\omega_j(\operatorname{Im} a_j + \operatorname{Im} b_j) & \operatorname{Re} a_j + \operatorname{Re} b_j \end{pmatrix}$$

である．

e_j として j 番目の要素が 1 でそれ以外が 0 の $2n$ 次元実ベクトルを選ぶ．

$$q_0(\eta) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}(\omega_j^2 \eta_j^2 + \eta_{j+n}^2)$$

となることを用いて式 (9) を計算すると，次式が得られる．

$$M(\theta; r) = \sum_{j=1}^{n} \omega_j^2 r_j^2 \, |b_j| \left(|a_j| \cos(2\theta_j + \phi_j) - |b_j|\right)$$

ここで，

$$\phi_j = \arctan\left(\frac{\operatorname{Re} a_j \operatorname{Im} b_j + \operatorname{Im} a_j \operatorname{Re} b_j}{\operatorname{Re} a_j \operatorname{Re} b_j - \operatorname{Im} a_j \operatorname{Im} b_j}\right)$$

である．さらに，

$$\frac{\partial}{\partial \theta_j} M(\theta; r) = -2\omega_j^2 r_j^2 \, |a_j| \, |b_j| \, \sin(2\theta_j + \phi_j)$$

となる．$|a_j| > |b_j|$ であることに注意すると，定理 1-3 から次の結果が得られる．

定理 4. もし $b_j \neq 0$，$j = 1, \ldots, n$，ならば，以下のことが成立する．

(i) サドル・センター O 近傍に，振動数 ν の準周期軌道からなる不変トーラス $\mathscr{T}_\nu$ が存在し，その安定および不安定多様体，$W^{\mathrm{s}}(\mathscr{T}_\nu)$ および $W^{\mathrm{u}}(\mathscr{T}_\nu)$ はそれらのレベル集合上で横断的に交差する．ここで，ν は ω に近く Diophantine 条件 (5) を満足する．これは系 (11) が $W^{\mathrm{s}}(\mathscr{T}_\nu) \cup W^{\mathrm{u}}(\mathscr{T}_\nu)$ 上で非可積分であることを意味する．

(ii) 任意の 2 以上の整数 N に対して，サドル・センター O 近傍に，遷移チェーンを構成する，ω に近く Diophantine 条件 (5) を満足する N 個の振動数 ν^j の準周期軌道からなる不変トーラス $\mathscr{T}_{\nu^j}$，$j = 1, \ldots, N$，が存在し，Arnold 拡散型の現象が起こる．特に，注意 3 で述べられたような，1 組の異なる，ある不変トーラス $\mathscr{T}_{\nu^0}$ に対する循環的な遷移チェーンが存在し，Bernoulli シフトによって特徴づけられるカオス的な軌道が存在する．

6. 具体的な例

例として，次のポテンシャル関数の場合を考える．

$$V(x_1,y_1,\ldots,y_n)=\frac{1}{2}\left(-x_1^2+\sum_{j=1}^{n}\omega_j^2y_j^2\right)+\frac{\beta_0}{l+1}x_1^{l+1}+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\beta_jx_1^{l-1}y_j^2+\mathscr{O}(y_j^3) \tag{19}$$

ここで，l は3以上の整数とし，式(19)の高次項 $\mathscr{O}(y_j^3)$ は式(12)と(13)を満足するものとする．式(2)のサドル $x=0$ はホモクリニック軌道

$$\begin{aligned}x^{\mathrm{h}}(t)=&\Bigg(\left(\frac{l+1}{2\beta_0}\right)^{1/(l-1)}\operatorname{sech}^{2/(l-1)}\left(\frac{l-1}{2}t\right),\\&-\left(\frac{l+1}{2\beta_0}\right)^{1/(l-1)}\operatorname{sech}^{2/(l-1)}\left(\frac{l-1}{2}t\right)\tanh\left(\frac{l-1}{2}t\right)\Bigg)\end{aligned}$$

を有する．もし l が奇数ならば，$x=-x^{\mathrm{h}}(t)$ もまたホモクリニック軌道となることに注意する．さらに，仮定(A1)-(A5)が成立し，特に，式(14)で与えられる n 次正方行列 A が正則であるものとする．

式(16)は次のようになる．

$$\ddot{\eta}_j+\left(\omega_j^2+\frac{(l+1)\beta_j}{2\beta_0}\operatorname{sech}^2\left(\frac{l-1}{2}t\right)\right)\eta_j=0 \tag{20}$$

条件(17)と(18)を満足する式(20)の解は次式で与えられる．

$$\begin{aligned}\eta_j(t)=&\left[\cosh\left(\frac{l-1}{2}t\right)-\sinh\left(\frac{l-1}{2}t\right)\right]^{-2\mathrm{i}\omega_j/(l-1)}\\&\times F\left(-\rho_j,1+\rho_j,1-\frac{2\mathrm{i}\omega_j}{l-1};\frac{1}{2}\left[1-\tanh\left(\frac{l-1}{2}t\right)\right]\right)\end{aligned} \tag{21}$$

ここで，$F(c_1,c_2,c_3;z)$ は Gauss の超幾何関数 [23]

$$\begin{aligned}F(c_1,c_2,c_3;z)=&\sum_{k=0}^{\infty}\frac{c_1(c_1+1)\cdots(c_1+k-1)c_2(c_2+1)\cdots(c_2+k-1)}{k!c_3(c_3+1)\cdots(c_3+k-1)}z^k\\=&1+\frac{c_1c_2}{c_3}\frac{z}{1!}+\frac{c_1(c_1+1)c_2(c_2+1)}{c_3(c_3+1)}\frac{z^2}{2!}+\cdots\end{aligned}$$

であり，

$$\rho_j=\frac{1}{2}(\sqrt{\sigma_j}-1),\quad \sigma_j=\frac{8\beta_j(l+1)}{\beta_0(l-1)^2}+1$$

である．式(21)の導出に対しては，文献[9]の5.1節または文献[24]の25節の問題4を参照せよ．式(21)より次式が得られる．

$$|b_j|=\begin{cases}\dfrac{\cos^2(\pi\sqrt{\sigma_j}/2)}{\sinh^2(2\pi\omega_j/(l-1))} & (\sigma_j>0);\\[2ex]\dfrac{\cosh^2(\pi\sqrt{-\sigma_j}/2)}{\sinh^2(2\pi\omega_j/(l-1))} & (\sigma_j<0)\end{cases}$$

したがって，もし任意の自然数 m に対して

$$\frac{\beta_j}{\beta_0} \neq \frac{(l-1)^2}{2(l+1)} m(m+1)$$

となるならば，$b_j \neq 0$ となり，定理4によって，サドルセンター O 近傍の不変トーラスに対する横断的なホモクリニックおよびヘテロクリニック軌道が存在することになる．さらに，それらの不変トーラスの安定および不安定多様体上で系は非可積分であり，Arnold拡散型の挙動が起こることになる．また，l が奇数の場合，ホモクリニック軌道 $x = -x^{\mathrm{h}}(t)$ に対しても同じ結果が得られる．なお，文献[25]では，ここで得られた結果がある無限自由度ハミルトン系に対して適用され，そこで起こる複雑な現象が解析されている．

参考文献

[1] L. P. Shil'nikov, A contribution to the problem of the structure of an extended neighborhood of a rough equilibrium state of saddle-focus type, *Math. USSR Sbornik* **10** (1970), 91–102.

[2] S. Wiggins, *Global Bifurcations and Chaos: Analytical Methods*, Appl. Math. Sci. 73, Springer, New York, 1988.

[3] J. Guckenheimer and P. Holmes, *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*, Appl. Math. Sci. 42, Springer, New York, 1983.

[4] L. M. Lerman, Hamiltonian systems with loops of a separatrix of a saddle-center, *Selecta Math. Sov.*, **10** (1991), 297–306.

[5] A. Mielke, P. Holmes and O. O'Reilly, Cascades of homoclinic orbits to, and chaos near, a Hamiltonian saddle-center, *J. Dyn. Diff. Eqn.*, **4** (1992), 95–126.

[6] C. Grotta Ragazzo, Nonintegrability of some Hamiltonian systems, scattering and anlytic continuation, *Commun. Math. Phys.*, **166** (1994), 255–277.

[7] O. Y. Koltsova and L. M. Lerman, Periodic and homoclinic orbits in a two-parameter unfolding of a Hamiltonian system with a homoclinic orbit to a saddle-center, *Int. J. Bifur. Chaos*, **5** (1995), 397–408.

[8] C. Grotta Ragazzo, Irregular dynamics and homoclinic orbits to Hamiltonian saddle centers, *Commun. Pure Appl. Math.*, **50** (1997), 105–147.

[9] K. Yagasaki, Horseshoes in two-degree-of-freedom Hamiltonian systems with saddle-centers, *Arch. Rational Mech. Anal.*, **154** (2000), 275–296.

[10] V. I. Arnold, Instability of dynamical systems with many degrees of freedom, *Sov. Math. Dokl.*, **5** (1964), 581–585.

[11] P. Lochak, Arnold diffusion: A compendium of remarks and questions, in *Hamiltonian Systems with Three or More Degrees of Freedom* (C. Simo, ed.), Kluwer, Dordrecht, 1999, pp. 168–183.

[12] K. Yagasaki, Homoclinic and heteroclinic orbits to invariant tori in multi-degree-of-freedom Hamiltonian systems with saddle-centers, in preparation.

[13] S. M. Graff, On the conservation of hyperbolic invariant tori for Hamiltonian systems, *J. Diff. Eqns.*, **15** (1974), 1–69.

[14] N. Fenichel, Persistence and smoothness of invariant manifolds for flows, *Ind. Univ. Math. J.* **21** (1971), 193–225.

[15] N. Fenichel, Asymptotic stability with rate conditions. *Ind. Univ. Math. J.* **23** (1974), 1109–1137.

[16] S. Wiggins, *Normally Hyperbolic Invariant Manifolds in Dynamical Systems*, Appl. Math. Sci. 105, Springer, New York, 1994

[17] J. Pöschel, *Über invariant Tori in Differenzierbaren Hamiltonschen Systemen.* Bonn Math. Schr. 120, Universität Bonn, 1980.

[18] O. Y. Koltsova and L. M. Lerman, Families of transverse Poincaré homoclinic orbits in $2n$-dimensional Hamiltonian systems close to the system with a loop to a saddle-center, *Int. J. Bifur. Chaos*, **6** (1996), 991–1006.

[19] J.-P. Marco, Transition le long des chaines de tores invariants pour les systèmes hamiltoniens analytiques, *Ann. Inst. henri Poincaré*, **64** (1996), 205–252.

[20] E. Fontich and P. Martín, Arnold diffusion in perturbations of analytic integrable Hamiltonian systems, preprint, Universitat de Barcelona, Barcelona, Spain.

[21] E. A. Coddington and N. Levinson, *Theory of Ordinary Differential Equations*, McGraw-Hill, New York, 1955.

[22] K. R. Meyer and G. R. Hall, *Introduction to Hamiltonian Dynamical Systems and the N-Body Problem*, Appl. Math. Sci. 90, Springer, New York, 1992

[23] J. B. Seaborn, *Hypergeometric Functions and Their Applications*, Texts in Appl. Math. 8, Springer, New York, 1991.

[24] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Quantum Mechanics, Non-Relativistic Theory*, 2nd ed., Course of Theoretical Physics 3, Pergamon Press, Oxford, New York, 1965.

[25] K. Yagasaki, Homoclinic and heteroclinic behavior in an infinite-degree-of-freedom Hamiltonian system: Chaotic free vibrations of an undamped, buckled beam, submitted for publication.