数理解析研究所講究録
1179 巻 2000 年 35-44

大自由度ハミルトン系の遍歴的運動

名古屋大学理学部物理R研 小西哲郎
Tetsuro KONISHI
Department of Physics, School of Science, Nagoya University
tkonishi@allegro.phys.nagoya-u.ac.jp
http://jegog.phys.nagoya-u.ac.jp/~tkonishi/research/

Abstract

自由度の多いハミルトン力学系および symplectic map において、単調に熱平衡には緩和せずに空間的構造が形成される例をいくつか紹介し、観察と考察を述べる。

1 はじめに

大自由度力学系の研究には様々なアプローチがある。古典統計力学の基礎付けという動機からは、「自由度の大きな孤立系 (ハミルトン系) を長時間放置すると通常は熱平衡状態に至る」という予想を確認あるいは証明するという研究が考えられる。例えば、自由度の大きさと KAM トーラスの占める体積の関係を評価する、などである。

ここではそれとは違う方向、具体的には、多体系がすぐには熱化せずに空間的構造を作る様子を理解するための試みをいくつか紹介したい。

多体系 (多粒子系) が作る空間的構造の成因としては、一番考えやすいのは、結晶構造の様に、「それがエネルギー (自由エネルギー) がもっとも低い状態なので実現する」というものである。この場合、構造は規則的 (周期的) であり、また定常的 (時間的に変化しない、あるいは一定) で、構造は統計力学で記述できる。

一方、空間的構造には、流体の渦や分子クラスター [Shi96]、水 (液体) の水素結合が作るネットワーク [OT90, Sas96] など、形態が時間的に変化するものもある。こういった系の挙動を理解するためには系の力学系としての特性をつかむことが重要であると考えられる。なぜならば、巨視的な構造はいずれにせよ微視的なダイナミクスから作られるのであるが、もしも微視的なダイナミクスが「熱揺らぎ」とまとめられてしまうのであれば、ダイナミクスの詳細はもはや不要であり、系は確率的・統計的に十分良く記述されるはずである。一方、系の巨視的な構造が時間的に変化している場合には、系の揺らぎは「熱揺らぎ」という小さなものではありえず、巨視的な状態のダイナミクスに微視的なダイナミクスが本質的にかかわって来ると考えられるからである。

このような振舞いを刷る系は散逸系にも数多く見られるが、あえて保存系 (ハミルトン系) で考える理由は、一つには、散逸系の相空間構造は多種多

様であるのに比べて、保存系の場合の方が理解する手がかりがありそうに思えることにもよる。

表題に挙げた「遍歴的」とは、いくつかの状態を渡り歩く過程であり、とある定まった定常状態 (たとえば熱平衡) に落ち着くのではない様子を表す。特に、多自由度系でカオスが発生している場合に、いくつかのカオス的状態 (それぞれはある程度の時間続く) をうつり合うダイナミクスはカオス的遍歴と呼ばれている [IMO89, Tsu90, Kan90, AGRR90, TK96, suu96]。

1.1 この報告について

この報告では、いくつかの話題についての概略を紹介する。具体的な詳細はそれぞれ挙げた文献を参照して頂ければ幸いである。また、最後の 4.2 節を除く部分については、[Kon99] の後半がこの報告と同じ主旨で書かれた解説である。

この報告の構成と各節の要約は以下の通りである：

- 大域結合した sympletic map[KK92a, KK94] [1]
  実空間構造の寿命と相空間構造について考える。
- 短距離相互作用型 symplectic map [Kon99] 実空間構造と相空間構造の対応について考える。
- １次元自己重力多体系 (“シートモデル”) ・（１）準定常状態間の遍歴 [TKG94, TGK94, TGK97a, TGK97b] [2]
  遍歴的運動の要因を明らかにする。
- １次元自己重力多体系 (“シートモデル”) ・（２）べき相関の自発的形成
  新しい種類の構造形成を発見した。[KK00a, KK00b, KK00c][3]

2 大域結合したsympletic map

この節では次のような symplectic 写像について考える [KK92a, KK94]。

[1]金子邦彦氏 (東大) との共同研究
[2]土屋俊夫氏 (Astronomisches Rechen-Institut, Heidelberg), 郷田直輝氏 (国立天文台) との共同研究
[3]小山博子氏 (名古屋大) との共同研究

$$
\begin{aligned}
(q_i, p_i) &\mapsto (q_i', p_i') \ , \\
p_i' &= p_i + k \sum_{j=1}^{N} \sin 2\pi(q_j - q_i) \bmod 1, \\
q_i' &= q_i + p_i' \bmod 1 \ (i = 1, 2, \cdots, N)
\end{aligned} \tag{1}
$$

これは、1次元の円周上に置かれた N 個の粒子が角度の差の sin で引き合う ($k > 0$ の場合) モデルである。

系の持つパラメタは自由度 N と定数 k のみである。N,k を固定しても初期条件の差により系は二つの顕著に異なる運動形態をとる。一つはほとんどの粒子が集合して1つのクラスターを作る「クラスター状態」であり、もう一つは粒子がバラバラに運動してしまう「一様乱雑状態」である。

どちらの状態でも最大リヤプノフ数は正であり、カオスである。系が高次元であることを考えると、相空間のなかに性質の異なる2種類のカオス領域が共存している事になる。

このことから、系は「クラスター状態」と「一様乱雑状態」の間を動的に遷移する事が予想される。実際それぞれの状態の寿命は有限であり、さらに、それぞれの状態の寿命 τ の分布は一様乱雑状態が $\exp(-\gamma\tau)$ であるのに対してクラスター状態が $\tau^{-\alpha}$ とべき型である。また、有限時間で計った最大リヤプノフ数を多数サンプル集めた場合の分散の収束の様子

$$
\lambda_1(T) \equiv \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} \log \left| \frac{\delta(p(t+1), x(t+1))}{\delta(p(t), x(t))} \right|
$$

$$
(\Delta\lambda_1(T))^2 \equiv \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} \left\{ \log \left| \frac{\delta(p(t+1), x(t+1))}{\delta(p(t), x(t))} \right| - \lambda_1(T) \right\}
$$

は、一様乱雑状態では $(\Delta\lambda_1(T))^2 \propto T^{-1.1}$ とほぼ熱揺らぎの形 ($\propto 1/T$) であるが、クラスター状態では $(\Delta\lambda_1(T))^2 \propto T^{-0.74}$ とベキ的な長時間相関を持つことが分かった。

また、相空間上でクラスター状態を与える初期条件は、リヤプノフ数で見たトーラスおよびアイランドあるいはその残骸と同じ場所に分布することもわかった。

以上から、クラスター状態はハミルトン系カオスに特徴的な階層的共鳴構造に保持されることで保たれている (標語的に言うならば「カオスが構造を守っている)) 事がわかった。

また、最大だけではなく全自由度で計ったリヤプノフスペクトルは、クラスター状態と一様乱雑状態とでほとんど変わらず、最小の正のリヤプノフ数 λ_{N-1}(N は系の自由度) だけが違っていた。この自由度がクラスター状態

と一様乱雑状態との差を表していると考え、その差を理解するためにリヤプノフベクトルを計ってみた。(ここで、リヤプノフベクトルは、初期時刻に用意した無限小球が時間を逆行していったときにもっとも縮んだ方向として定義した。) このベクトルは、一様乱雑状態ではどれか1つの粒子を大きくずらす揺らぎを表しているのに対して、クラスター状態では、多数の粒子をほぼ同じだけ動かす、すなわち、クラスターの重心の運動の揺らぎを表している事が分かった [KK92b]。すなわち、リヤプノフベクトルの「そろいぐあい」は, 局所的な (熱的な) 揺らぎと協同的な揺らぎを区別することが出来る。

3 短距離相互作用型 symplectic map

前節で考えた写像 (1) では大きなクラスターが1つ出来るだけであった。(クラスターが1つしか出来ない事は Boltzmann eq. で近似すれば理解できる [IK93, Ina93]) これは相互作用の届く範囲が円周全体に渡っていたためと考えて、前のモデルの「力」の項をちょっと変形し、相互作用の範囲を狭くしたモデルを作ってみる [Kon99]。

$$\begin{aligned} p_i' &= p_i + k\sum_{j=1}^{N} c_i c_j f(q_j - q_i) \bmod 1 \,, \\ q_i' &= q_i + p_i' \bmod 1 \,, (i = 1, 2, \cdots, N) \\ f(q) &= \left[\frac{1}{2}(1+\cos 2\pi q)\right]^n \sin 2\pi q \qquad (2) \end{aligned}$$

$c_i = 1\,(i:\text{奇数})$, $c_i = -1\,(i:\text{偶数})$

ここでエンベロープ $f(q)$ は空間 (単位円) の周期性を素直に反映するようにとった。べき n は $n = 5$ としている。

相互作用の短距離化により、系には一度に複数個のクラスターが共存することが出来、さらに、複数のクラスターが衝突したり組み換えたりする「反応」が起きる。このような場合、通常は、各状態間の遷移確率を考えてマスター方程式に持ち込むのであるが、この系の場合、状態のなかには 2-binary 状態のように寿命分布がべき分布しているものがあり、確率的記述を許さない。各状態を与える初期条件の相空間での分布は相空間内で複雑に入り組んだ形をしており、状態の境界では短時間リヤプノフ数が大きな値を取っている [Kon99]。

4 1次元自己重力多体系 (“シートモデル”)

1次元の空間上に Newton 重力で相互作用する質点が N 個あった場合、そのハミルトニアンは次のように書かれる：

$$H=\sum_{i=1}^{N}\frac{p_i^2}{2m}+2\pi Gm^2\sum_{i>j}|x_i-x_j| \quad , \ x_i\in R \ . \tag{3}$$

この系は、1次元での質点の代わりに、無限に広い一様なシートが3次元空間中に平行に並んでおり、これらが重力で相互作用する場合のハミルトニアンと考えることも出来る。このため、この系を「シートモデル」と呼ぶことがある。

3次元ではポテンシャルは質点間の距離rについて$1/r$という依存性を持つが、1次元の場合には$|r|$と正ベキになる。何故この形になるかというと、計算すればそうなるから、なのだが、重力場と静電場は同じ形をしているので、1次元の重力場とコンデンサーの作る電場とが同じと思ってもらっても良い。

4.1 準定常状態間の遍歴

前節では、系のマクロな状態変化はクラスターの衝突という、いわば自明な理由によって起きていた。ここでは別の系を考えることで、状態変化のメカニズムをより深く探ろうと思う。

この系(3)では一般のN粒子系に対してカノニカルおよびミクロカノニカル分布が厳密に求められおり、$N\to\infty$の場合、1体分布関数$f(x,p)$は下記の形になる [Ryb71]：

$$f(x,p)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-\eta^2}\frac{1}{2}\mathrm{sech}^2\xi \quad , \tag{4}$$

$$\eta\equiv\sqrt{\frac{3M}{E}}\cdot\frac{p}{2m},\ \xi\equiv\frac{3\pi GM^2}{2E}\cdot x$$

ここで、Eは系の全エネルギー、$M\equiv Nm$は全質量である。

座標についてはsech型、運動量についてはMaxwell分布のこの分布は“isothermal分布”と呼ばれている。

素朴な予想としては、十分時間が経てば系の1体分布関数はこのisothermal分布に収束すると考えられる。ところが、実際に計算してみると、一旦isothermal分布に収束したかに見えた分布がまた別の分布に収束してしまい、そこにしばらく滞在した後に、そこからさらに別の分布に移って行くという遍歴的過程をずっと繰り返していることがわかった。

ポテンシャル$|x_i-x_j|$は2粒子の衝突の際に力が消えることを表している(すり抜ける)ので、分布関数は無衝突ボルツマン方程式で良く近似される。この系の無衝突ボルツマン方程式の時間的に不変な解(定常解)には上記のisothermal分布以外にも多数あることが知られている。実際には系のサイ

ズは有限 ($N < \infty$) でありまた無衝突ボルツマン方程式も近似的にしか成り立たないので、定常解も実際は準定常である。この系の遍歴的過程は、この準定常解をへめぐって行く過程であった。

そこで問題になるのは、どのような機構で系がこの準定常状態の間を遷移しているか、である。計算によれば、遷移に際しては異常に大きなエネルギーを持った粒子が出現していた。この粒子はそれ以外の粒子が作るポテンシャル (平均場) の振動と共鳴することによってエネルギーを得ている。一旦エネルギーの高い粒子が出現するとそれの粒子はしばらく他の粒子とはほぼ独立に運動するが、やがて再突入する。このときに 1 体分布関数は前とは別のところに行くのである。この遍歴過程を長時間平均したものがこの系の熱平衡状態であると考えられる。[TKG94, TGK94, TGK97a, TGK97b]

4.2 べき相関の自発的形成

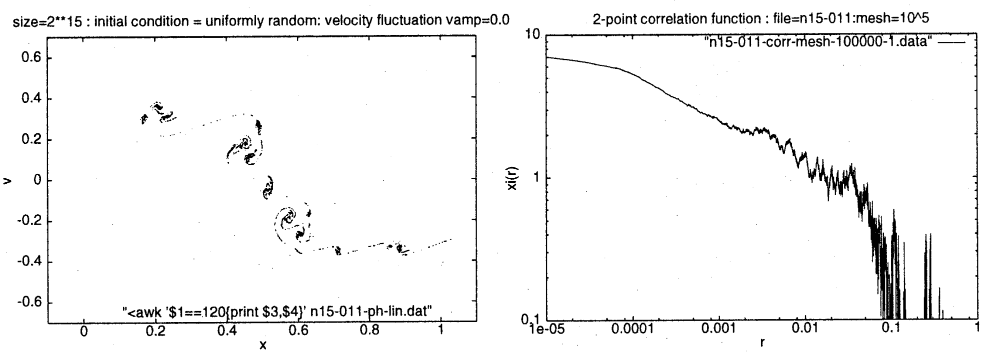

Figure 1: (左図)：初期条件が $v_i(0) = 0$, $x_i(0) =$ 区間 $[0, 1)$ の一様乱数 の場合の (x_i, v_i) の分布。$N = 2^{15}$, $t = 9.375$. (右図)：このときの 2 点相関関数 $\xi(r)$. べき的相関 $\xi(r) \propto r^{-\alpha}$ が見られる。

ここまでは、系全体の分布はいろいろな準定常状態を変わるものの、それぞれの準定常状態の中での揺らぎや相関の様子は熱平衡状態でのそれと同じ種類のものであった。星団中の星や銀河、銀河団などの実際の重力多体系では 2 体相関関数がべき型を示す観測が多数知られているが、この系ではべき型の相関は得られていなかった。この系に宇宙膨張の効果を加えた系ではフラクタル構造が見られていた [RJF91, TM00]. ここで、2 体相関関数 $\xi(r)$ は, 平均密度 n で粒子が分布している系において、ある粒子から距離 r にある微小体積 dV に別の粒子が存在する確率 dP に対して

$$dP = ndV\,(1 + \xi(r))$$

として定義され、そのべき的な振舞いとは

$$\xi(r) \propto r^{-\alpha}$$

となることである。

したがって、「この系の時間発展は主に (べき相関を持たない) 準定常状態間の遷移であり、べき的な空間相関は宇宙膨張効果により発生する」、という予想がなされる。

ところが、我々は、この系でも初期条件を正しく設定すればべき型の空間相関が自発的に形成されることを発見した [KK00a, KK00b, KK00c]. 具体的には、初期条件 $(x_i(0), v_i(0))$ を

$$v_i(0) = 0\ ,\ x_i(0) = \text{一様乱数} \tag{5}$$

と選ぶと、べき的な空間相関が発生する。図1はその例の一つである。

すなわち、この系のダイナミクスはこれまで考えられていた「(準定常状態) + (それらの間の遷移の道) + (準定常への transients)」よりもさらに複雑であり、少なくとも「(準定常状態) + (それらの間の遷移の道) + (準定常への transients) + (べき相関状態)」となっているのであった。

2体相関関数 $\xi(r)$ の時間発展を見ることで、べき相関の形成の様子がわかる。図2は $\xi(r)$ を時間的に重ね描きしたものである。小さなスケールからべき相関が発生し、それが大きなスケールに成長していることがわかる。

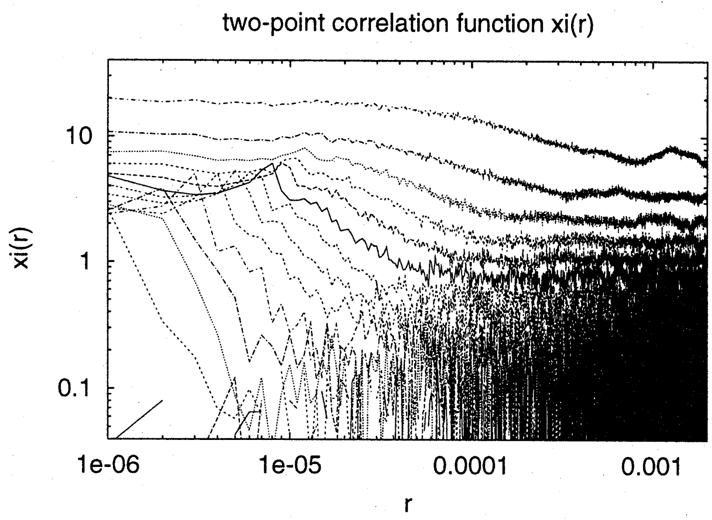

Figure 2: Evolution of correlation function $\xi(r)$ at $t = \frac{5}{64}\ell$, $\ell = 3, 4, \cdots, 17$ (from bottom to top). System size $N = 2^{14}$, Initial condition: x_i =random, $v_i = 0$.

(x, v) 空間での分布を見ると、べき相関形成過程が、

- まず小さなスケールでクラスターが作られ、

- それから,より大きな空間スケールで、クラスターを要素とする超クラスターが作られる
- (繰り返し)

という、「階層的クラスター化 (hierarchical clustering)」と呼ばれているプロセスを簡単なモデルにて具体的に示したものである事が分かる [KK00b]。

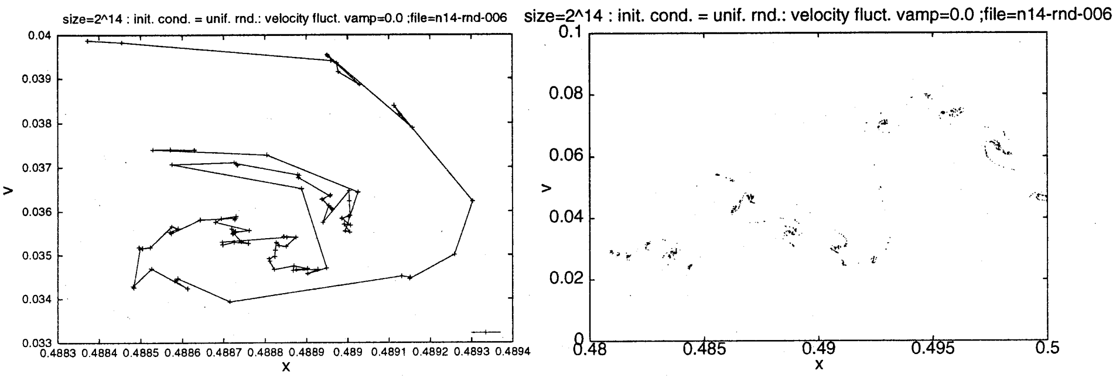

Figure 3: 初期条件 (5) からべき相関発生途中での (x, v) 空間での分布の拡大図。左図は右図の一部の拡大。クラスターの出来かたを強調するために、各粒子を初期条件での x 軸上の並びの順番にしたがって折れ線でつないである。$N = 2^14$.

謝辞

研究会で話す機会をいただきありがとうございました。

References

[AGRR90] F. T. Arecchi, G. Giacomelli, P. L. Ramazza, and S. Residori. Experimental evidence of chaotic itinerancy and spatiotemporal chaos in optics. *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 65, pp. 2531–2534, 1990.

[IK93] S. Inagaki and T. Konishi. Dynamical stability of a simple model similar to self-gravitating systems. *Publ. Astron. Soc. Japan*, Vol. 45, pp. 733 – 735, 1993.

[IMO89] K. Ikeda, K. Matsumoto, and K. Ohtsuka. Maxwell Bloch turbulence. *Prog. Theor. Phys. Suppl.*, Vol. 99, p. 295, 1989.

[Ina93] S. Inagaki. Thermodynamical stability of modified Konishi-Kaneko model. *Prog. Theor. Phys.*, Vol. 90, pp. 577–584, 1993.

[Kan90] K. Kaneko. Clustering, coding, switching, hierarchical ordering and control in a network of chaotic elements. *Physica*, Vol. D 41, p. 38, 1990.

[KK92a] T. Konishi and K. Kaneko. Clustered motion in symplectic coupled map systems. *J. Phys.*, Vol. A 25, pp. 6283 – 6296, 1992.

[KK92b] T. Konishi and K. Kaneko. Clustered motion in symplectic coupled map systems. *J. Phys.*, Vol. A 25, pp. 6283 – 6296, 1992.

[KK94] K. Kaneko and T. Konishi. Peeling the onion of order and chaos in a high-dimensional Hamiltonian dynamical systems. *Physica*, Vol. D 71, pp. 146–167, 1994.

[KK00a] Hiroko Koyama and Tetsuro Konishi. Emergence of power-law correlation in 1-dimensional self-gravitating system. astro-ph/0008208 (http://jp.arXiv.org/abs/astro-ph/0008208/), 2000.

[KK00b] Hiroko Koyama and Tetsuro Konishi. Hierarchical clustering and formation of power-law correlation in 1-dimensional self-gravitating system. astro-ph/0008507 (http://jp.arXiv.org/abs/astro-ph/0008507/), 2000.

[KK00c] Hiroko Koyama and Tetsuro Konishi. Long-time behavior and relaxation of power-law correlation in one-dimensional self-gravitating system. astro-ph/0010030 (http://jp.arXiv.org/abs/astro-ph/0010030), 2000.

[Kon99] 小西哲郎. 大自由度ハミルトン系. 数理科学, pp. 50–56, 8月号 1999.

[OT90] I. Ohmine and H. Tanaka. Potential energy surfaces for water dynamics. ii: Vibrational mode excitations, mixing, and relaxations. *J. Chem. Phys.*, Vol. 93, p. 8138, 1990.

[RJF91] J. L. Rouet, E. Jamin, and M. R. Feix. Fractal properties in the simulations of a one-dimensional spherically expanding universe. In A. Heck and J. M. Perdang, editors, *Applying fractals in astronomy*, Berlin, 1991. Springer-Verlag.

[Ryb71] George B. Rybicki. Exact statistical mechanics of a one-dimensional self-gravitating system. *Astrophysics and Space Science*, Vol. 14, pp. 56–72, 1971.

[Sas96] 笹井理生. 大自由度分子系のゆらぎ、構造、進化. 数理科学：特集/複雑系, No. 396, pp. 32–37, 6 月号 1996.

[Shi96] 志田典弘. 分子クラスターにおける生成と崩壊のダイナミクス. 数理科学：特集/複雑系, No. 396, pp. 50–56, 6 月号 1996.

[suu96] 数理科学 特集/複雑系－生成と崩壊のダイナミクス, 6 月号 1996.

[TGK94] T. Tsuchiya, N. Gouda, and T. Konishi. Relaxation processes in one-dimensional self-gravitating many-body systems. *Phys. Rev*, Vol. E 53, pp. 2210–2222, 1994.

[TGK97a] T. Tsuchiya, N. Gouda, and T. Konishi. Chaotic itinerancy and thermalization in one-dimensional self-gravitating systems. *Astrophysics and Space Science*, Vol. 257, pp. 319–341, 1997.

[TGK97b] 土屋俊夫, 郷田直輝, 小西哲郎. 重力シート多体系の緩和過程とカオス的遍歴. 日本物理学会誌, No. 10, pp. 783–786, 1997.

[TK96] 津田一郎, 金子邦彦. 複雑系のカオス的シナリオ. 朝倉書店, 1996.

[TKG94] T. Tsuchiya, T. Konishi, and N. Gouda. Quasiequilibria in one-dimensional self-gravitating many body systems. *Phys. Rev*, Vol. E 50, pp. 2607–2615, 1994.

[TM00] Takayuki Tatekawa and Keiichi Maeda. Primodal fractal density perturbation and structure formation of the universe: 1-dimensional collisionless sheet model. astro-ph/0003124, 2000.

[Tsu90] I. Tsuda. In A. V. Holden and V. I. Kryukov, editors, *Neurocomputers and attention*. Manchester Univ. Press, 1990.