数理解析研究所講究録
1180 巻 2000 年 1-14

幾何学的量子コンピューターについて

横浜市立大学　藤井 一幸 (Kazuyuki Fujii)
Department of Mathematical Sciences
Faculty of Sciences
Yokohama City University

それは突然にやって来た。1994年のある晴天の日にへきれきが鳴り響いた。P.Shor が整数の因数分解を多項式時間で実行する量子アルゴリズムをひっ提げてやって来たのである。このことはインターネット社会の基幹であるRSA 暗号 (公開鍵暗号) が破られることを意味する。これが driving force となり多くの研究者 (まじめな人や野心家、山師等) がこの分野に参入してきた。

では量子コンピューターとは何か? 量子力学の基本原理は

1. **重ね合わせ**の原理
2. **テンソル積**の原理

に要約出来る。2. は通常 1. 程重要視されていないが、量子コンピューターの立場からは重要である。

量子コンピューターの定義(David Deutsch)
量子コンピューターとは、上述の 1. と 2. を (量子) 並列性として用いる量子チューリングマシーンのことである。

ところで我々は最近のゲージ理論の猛烈な発展も知っている (量子重力、M 理論、F 理論等)。 ではこのゲージ理論を量子コンピューターに組み込めないか? 我々の意図は次の通り。

新しい考え方(幾何学的アプローチ)

Quantum Computer

+

Gauge Theory

(Geometry)

||

Gauge Theoretical Quantum Computer

or

Geometric Quantum Computer

この講演で幾何学的量子コンピューターの中でも、我々(Zanardi, Rasetti, Fujii, Pachos and Chountasis)が全力で取り組んでいる

Holonomic Quantum Computer

を概説する、[1] ~ [6]。

量子コンピューター (量子計算) の入門として以下の三点を推薦する。

A.Steane :
Quantum Computing,
quant-ph 9708022.

E.Rieffel and W.Polak :
An Introduction to Quantum Computing for Non-Physicists,
quant-ph 9809016.
細谷 暁夫 :
量子コンピュータの基礎,

サイエンス社, 1999 年.

数学的準備

$\mathcal{H}$: a separable Hilbert space over $\mathbf{C}$.

$M(\mathcal{H})$ denotes a space of all bounded linear operators on $\mathcal{H}$.

$U(\mathcal{H})$ denotes a space of all unitary operators on $\mathcal{H}$.

Stiefel Manifold :

$$St_m(\mathcal{H}) \equiv \{V = (v_1, \cdots, v_m) \in \mathcal{H} \times \cdots \times \mathcal{H} | V^\dagger V = 1_m\}$$

where 1_m is a unit matrix in $M(m, \mathbf{C})$.

Grassmann Manifold :

$$Gr_m(\mathcal{H}) \equiv \{X \in M(\mathcal{H}) | X^2 = X, X^\dagger = X \text{and } \mathrm{tr} X = m\}$$

Projection

$$\pi : St_m(\mathcal{H}) \to Gr_m(\mathcal{H}), \quad \pi(V) \equiv VV^\dagger$$

$U(m)$ が $St_m(\mathcal{H})$ に右から作用 :

$$St_m(\mathcal{H}) \times U(m) \to St_m(\mathcal{H}) : (V, a) \mapsto Va$$

$\pi(V) = VV^\dagger = X$ のとき

$$\pi^{-1}(X) = \{VA | A \in U(m)\} \cong U(m)$$

となる。 したがって

$$\{U(m), St_m(\mathcal{H}), \pi, Gr_m(\mathcal{H})\}$$

は $Gr_m(\mathcal{H})$ 上の principal $U(m)$-bundle である。

M : manifold, $\quad P : M \to Gr_m(\mathcal{H})$ (a projector) given

Pull-back bundle :

$$(U(m), E, \pi_E, M) = P^*(U(m), St_m(\mathcal{H}), \pi, Gr_m(\mathcal{H}))$$

$$\begin{tikzcd}
U(m) \arrow[d] & U(m) \arrow[d] \\
E \arrow[r] \arrow[d] & St_m(\mathcal{H}) \arrow[d] \\
M \arrow[r, "P"] & Gr_m(\mathcal{H})
\end{tikzcd}$$

Non Abelian Berry Connection and Curvature

$\mathcal{M}$: ある parameter space

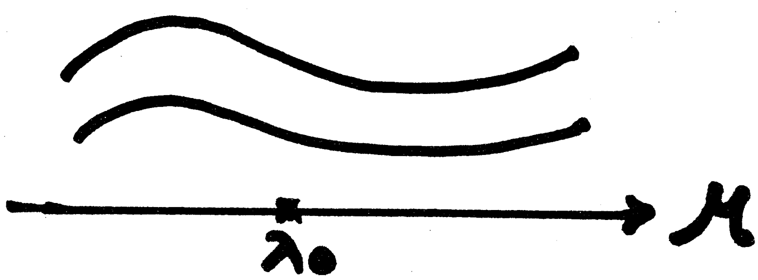
$$\mathcal{M} \ni \lambda, \quad \lambda_0 : \text{a reference point}$$

$\{H_\lambda\}_{\lambda \in \mathcal{M}}$: a family of Hamiltonians

H_{λ_0} : a reference Hamiltonian

$\mathcal{H}$: この Hamiltonian H_{λ_0} に対応する Hilbert space (over **C**)

仮定 $\quad H_\lambda(\lambda \in \mathcal{M})$ の固有値は no-level crossing



ここでは 更に強く

$$\mathcal{U}:\mathcal{M}\longrightarrow U(\mathcal{H}) \quad \text{and} \quad \mathcal{U}(\lambda_0)=\text{identity}$$

に対して H_λ 達は isospectral .,

$$H_\lambda=\mathcal{U}(\lambda)H_{\lambda_0}\mathcal{U}(\lambda)^\dagger \quad for\ \lambda\in\mathcal{M}$$

$\epsilon(\lambda_0)$: H_{λ_0} の (基本となる) 固有値

仮定 固有値 が縮退している (その次数を n とおく)

$\{\tilde{v}_1,\cdots,\tilde{v}_j,\cdots,\tilde{v}_n\}$: $\epsilon(\lambda_0)$ を固有値にもつ固有値ベクトル達 .,

$$H_{\lambda_0}\tilde{v}_j=\epsilon(\lambda_0)\tilde{v}_j \quad 1\le j\le n$$

$\tilde{v}_1,\cdots,\tilde{v}_j,\cdots,\tilde{v}_n$ によって張られる vector space を

$$E(\lambda_0)\equiv Vect\{\tilde{v}_1,\cdots,\tilde{v}_j,\cdots,\tilde{v}_n\}$$

とおく。

	固有値	固有ベクトル空間
H_{λ_0}	$\epsilon(\lambda_0)$	$E_0=E(\lambda_0)$
H_λ	$\epsilon(\lambda_0)$	$E_\lambda=\mathcal{U}(\lambda)E(\lambda_0)$

$E_0=E(\lambda_0)$ のある o.n. base

$$V_0=(v_1,\cdots,v_n)$$

を 固定する。

$E_0=E(\lambda_0)$ の o.n. base 全体 (λ_0 上の Stiefel manifold の元達)

$$\widehat{E}(\lambda_0) = \{V_0 A | A \in U(n)\} \cong U(n)$$

$$V_0 = (v_1, \cdots, v_n) \in St_m(\mathcal{H})$$
$$\downarrow$$
$$\pi(V_0) = \sum_{j=1}^{n} v_j {v_j}^\dagger \in Gr_m(\mathcal{H})$$

具体例

$$\text{Projector} \quad P \quad : \quad \mathcal{M} \longrightarrow Gr_n(\mathcal{H})$$

$$P(\lambda) \;=\; U(\lambda)(\sum_{j=1}^{n} v_j {v_j}^\dagger)U(\lambda)^\dagger$$

Pull-back bundle :

$$(U(n), E, \pi_E, \mathcal{M}) = P^*(U(n), St_n(\mathcal{H}), \pi, Gr_n(\mathcal{H}))$$

Fiber at λ :

$$\begin{aligned} F|_\lambda &= \{U(\lambda)V | V \in \widehat{E}(\lambda_0)\} \\ &= \{U(\lambda)V_0 A | A \in U(n)\} \end{aligned}$$

s : cross section

$$s : \mathcal{M} \longrightarrow E, \quad \pi_E \circ s = \mathrm{id}_{\mathcal{M}}$$

$\Gamma(E)$: E の cross sections 全体の作る空間 (適当に完備化する)

a canonical cross section :

$$\begin{aligned} s(\lambda) &\equiv (\lambda, U(\lambda)V_0) \\ &= (\lambda, U(\lambda)(v_1, \cdots, v_n)) \end{aligned}$$

上述の A を $A = 1_n$ とおいた。

記号　$V(\lambda) \equiv U(\lambda)V_0$.

$$s(\lambda) = (\lambda, V(\lambda)) \quad \lambda \in \mathcal{M}$$

このとき pull-back bundle の標準的 connection form $\mathcal{A}$ は

$$\mathcal{A}(\lambda) \equiv V(\lambda)^\dagger dV(\lambda) = V_0^\dagger (U(\lambda)^\dagger dU(\lambda))V_0$$

ここに d は $\mathcal{M}$ 上の外微分、 で与えられる。従って curvature form $\mathcal{F}$ は

$$\begin{aligned}\mathcal{F} &= d\mathcal{A} + \mathcal{A} \wedge \mathcal{A} \\ &= dV(\lambda)^\dagger \wedge dV(\lambda) + V(\lambda)^\dagger dV(\lambda) \wedge V(\lambda)^\dagger dV(\lambda)\end{aligned}$$

となる。これは local form である。

コメント　projector

$$P(\lambda) = V(\lambda)V(\lambda)^\dagger$$

を用いると curvature form は

$$PdP \wedge dP$$

と global に表せる。上述の $\mathcal{F}$ とは

$$PdP \wedge dP = V\mathcal{F}V^\dagger$$

の関係がある。

$L(\mathcal{M})$: Loop Space of $\mathcal{M}$ at λ_0 .,

$$L(\mathcal{M}) = \{\gamma : [0,1] \longrightarrow \mathcal{M} | \gamma(0) = \gamma(1) = \lambda_0\}$$

この connection form $\mathcal{A}$ を用いると **holonomy operator** が定義される。

$$\widehat{O} \ : \ L(\mathcal{M}) \longrightarrow Aut(\Gamma(E))$$

$$\widehat{O}(\gamma)\Psi = \Psi \mathcal{P}\mathbf{e}^{\oint_\gamma \mathcal{A}}, \quad \mathcal{P}\mathbf{e}^{\oint_\gamma \mathcal{A}} \in \mathbf{U(n)} \text{ and } \Psi = (\psi_1, \cdots, \psi_\mathbf{n})$$

ここに

$$Hol(\mathcal{A}) = \{e^{\oint_\gamma \mathcal{A}} | \gamma \in L(\mathcal{M})\}$$

は、holonomy group とよばれる。一般に $Hol(\mathcal{A}) \subset U(n)$ である。とくに $Hol(\mathcal{A}) = U(n)$ のとき、$\mathcal{A}$ は irreducible と言う。

我々が構成した

$$(U(n), E, \pi_E, \mathcal{M})$$

は、Principal $U(n)$-bundle である。これに付随した Vector bundle

$$(\mathbf{C}^n, \tilde{E}, \pi_{\tilde{E}}, \mathcal{M})$$

を、**Quantum Computational Vector Bundle** と呼ぶ。我々はこれを量子コンピューターの作動原理として採用する。即ち、この bundle の λ_0 上の fiber に情報を乗せ、Holonomy operators A 達を次々に作用させて、情報処理を行なう。

♡　情報の encoding :

Fiber at λ_0 $(= E(\lambda_0))$

$$\mathbf{X} \equiv \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \dots \\ x_{n-1} \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \sum_{j=0}^{n-1} x_j v_j$$

♠　情報処理

Holonomy Operator at λ_0

$$A \equiv \mathcal{P}e^{\oint_\gamma \mathcal{A}} \in U(n)$$

Unitary 変換　$\mathbf{X} \to A\mathbf{X}$

以下これを非線形量子光学に応用する。

Simple Example 1

$\{a, a^\dagger\}$: a harmonic oscillator

$$[a, a] = 0 = [a^\dagger, a^\dagger], \quad [a, a^\dagger] = 1$$
$$N \equiv a^\dagger a : \text{number operator}$$

$\mathcal{H} = \mathrm{Fock}\{|\,\mathrm{n}\rangle \mid \mathrm{n} = 0, 1, 2, \cdots\}$

Action of $a, a^\dagger$ on $\mathcal{H}$:

$$a\,|\,n\rangle = \sqrt{n}\,|\,n-1\rangle\,,\ a^\dagger\,|\,n\rangle = \sqrt{n+1}\,|\,n+1\rangle$$

A reference Hamiltonian

$$H_0 = XN(N-1), \quad X \text{ is a constant}$$

Eigenspace to 0–eigenvalue (1–qubit)

$$\mathrm{Vect}\{|\,0\rangle\,, |\,1\rangle\} \cong \mathbf{C}^2$$

A family of Hamiltonians

$$H(\alpha, \beta) \equiv W(\alpha, \beta) H_0 W(\alpha, \beta)^{-1}$$
$$W(\alpha, \beta) = U(\alpha) V(\beta)$$

where unitary operators

$$\begin{aligned} U(\alpha) &= \exp(\alpha \mathrm{a}^\dagger - \bar{\alpha}\mathrm{a}), \\ V(\beta) &= \exp\{\frac{1}{2}(\beta(\mathrm{a}^\dagger)^2 - \bar{\beta}\mathrm{a}^2)\} \end{aligned}$$

$U(\alpha)$ is unitary coherent operators based on abelian Lie algebra $\mathbf{C}$

$V(\beta)$ is unitary coherent operators based on Lie algebra $su(1,1)$

In this case

$$\mathcal{M} = \{(\alpha, \beta) \in \mathbf{C} \times \mathbf{C}\} \ni (0,0) : \text{a reference point,}$$
$$|\,vac\rangle \equiv V_0 = (|\,0\rangle\,, |\,1\rangle).$$

As to calculations of connection forms $\{A_\mu\}$ and curvature ones $\{F_{\mu\nu}\}$ see [3] and [6].

Remark Let us explain $\mathbf{C}$ and $su(1,1)$:

(a) $\mathbf{C}$– algebra

$$[N, a^\dagger] = a^\dagger, \ [N, a] = -a, \ [a^\dagger, a] = -1$$

(b) $su(1,1)$– algebra

$$K_+ = \frac{1}{2}(a^\dagger)^2, \ K_- = \frac{1}{2}a^2, \ K_3 = \frac{1}{2}(a^\dagger a + \frac{1}{2})$$

then

$$[K_3, K_+] = K_+, \ [K_3, K_-] = -K_-, \ [K_+, K_-] = -2K_3$$

Simple Example 2

$\{a_1, {a_1}^\dagger, a_2, {a_2}^\dagger\}$: 2–harmonic oscillators

$$[a_i, a_j] = 0 = [{a_i}^\dagger, {a_j}^\dagger], \quad [a_i, {a_j}^\dagger] = \delta_{ij}$$
$$N_i \equiv {a_i}^\dagger a_i : \text{number operators}$$

A reference Hamiltonian

$$H_0 = X \sum_{i=1}^{2} N_i(N_i - 1), \quad X \text{ is a constant}$$

Eigenspace to 0–eigenvalue (2–qubits)

$$\mathrm{Vect}\{|\,0,0\rangle\,,|\,0,1\rangle\,,|\,1,0\rangle\,,|\,1,1\rangle\}\cong \mathbf{C}^2\otimes\mathbf{C}^2$$

A family of Hamiltonians

$$H(\lambda,\mu)\equiv W(\lambda,\mu)H_0W(\lambda,\mu)^{-1}$$
$$W(\lambda,\mu)=U(\lambda)V(\mu)$$

where unitary operators

$$\begin{aligned}U(\lambda) &= \exp(\lambda \mathrm{a}_1{}^\dagger \mathrm{a}_2-\bar{\lambda}\mathrm{a}_2{}^\dagger \mathrm{a}_1),\\ V(\mu) &= \exp(\mu \mathrm{a}_1{}^\dagger \mathrm{a}_2{}^\dagger-\bar{\mu}\mathrm{a}_2\mathrm{a}_1),\end{aligned}$$

$U(\lambda)$ is unitary coherent operators based on Lie algebra $su(2)$

$V(\mu)$ is unitary coherent operators based on Lie algebra $su(1,1)$

In this case

$$\mathcal{M}=\{(\lambda,\mu)\in\mathbf{C}\times\mathbf{C}\}\ni(0,0):\text{a reference point,}$$
$$|\,vac\rangle\equiv V_0=(|\,0,0\rangle\,,|\,0,1\rangle\,,|\,1,0\rangle\,,|\,1,1\rangle).$$

As to calculations of connection forms $\{A_\mu\}$ and curvature ones $\{F_{\mu\nu}\}$ see [4] and [6].

Remark Let us explain $su(2)$ and $su(1,1)$:

(a) $su(2)$– algebra

$$J_+=a_1{}^\dagger a_2,\ J_-=a_2{}^\dagger a_1,\ J_3=\frac{1}{2}(a_1{}^\dagger a_1-a_2{}^\dagger a_2)$$

then

$$[J_3,J_+]=J_+,\ [J_3,J_-]=-J_-,\ [J_+,J_-]=2J_3$$

(b) $su(1,1)$– algebra

$$K_+ = a_1{}^\dagger a_2{}^\dagger,\ K_- = a_2 a_1,\ K_3 = \frac{1}{2}(a_1{}^\dagger a_1 + a_2{}^\dagger a_2 + 1)$$

then

$$[K_3, K_+] = K_+,\ [K_3, K_-] = -K_-,\ [K_+, K_-] = -2K_3$$

Simple Example (General Case)

$\{a_1, a_1{}^\dagger, \cdots, a_n, a_n{}^\dagger\}$: n–harmonic oscillators

$$[a_i, a_j] = 0 = [a_i{}^\dagger, a_j{}^\dagger], \quad [a_i, a_j{}^\dagger] = \delta_{ij}$$
$$N_i \equiv a_i{}^\dagger a_i : \text{number operators}$$

A reference Hamiltonian

$$H_0 = X \sum_{i=1}^{n} N_i(N_i - 1), \quad X \text{ is a constant}$$

Eigenspace to 0–eigenvalue (n–qubits)

$$\mathrm{Vect}\{|\,0,\cdots,0,0\rangle\,,|\,0,\cdots,0,1\rangle\,,\cdots,|\,1,\cdots,1,0\rangle\,,|\,1,\cdots,1,1\rangle\}$$
$$\cong \mathbf{C}^2 \otimes \cdots \otimes \mathbf{C}^2 \text{ (n–times)}$$

A family of Hamiltonians

$$H(\overrightarrow{\lambda}, \overrightarrow{\mu}) \equiv W(\overrightarrow{\lambda}, \overrightarrow{\mu}) H_0 W(\overrightarrow{\lambda}, \overrightarrow{\mu})^{-1}$$
$$W(\overrightarrow{\lambda}, \overrightarrow{\mu}) = U(\overrightarrow{\lambda}) V(\overrightarrow{\mu})$$

where unitary operators

$$U(\overrightarrow{\lambda}) = \prod_{j=1}^{n-1} U(\lambda_j), \quad V(\overrightarrow{\mu}) = \prod_{j=1}^{n-1} V(\mu_j).$$

and for $1 \le j \le n-1$

$$\begin{aligned} U(\lambda_j) &= \exp(\lambda_j a_j{}^\dagger a_n - \bar{\lambda}_j a_n{}^\dagger a_j), \\ V(\mu_j) &= \exp(\mu_j a_j{}^\dagger a_n{}^\dagger - \bar{\mu}_j a_n a_j). \end{aligned}$$

Namely

$U(\overrightarrow{\lambda})$ is unitary coherent operators based on Lie algebra $su(n)$

$V(\overrightarrow{\mu})$ is unitary coherent operators based on Lie algebra $su(n-1,1)$

In this case

$$\begin{aligned}&\mathcal{M} = \{(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_{n-1}, \mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_{n-1}) \in \mathbf{C} \times \mathbf{C} \times \cdots \times \mathbf{C}\}\\&\quad \ni (0, 0, \cdots, 0) : \text{a reference point},\\&|vac\rangle \equiv V_0 = (|0, \cdots, 0, 0\rangle, |0, \cdots, 0, 1\rangle, \cdots, |1, \cdots, 1, 0\rangle, |1, \cdots, 1, 1\rangle)\end{aligned}$$

As to calculations of connection forms $\{A_\mu\}$ and curvature ones $\{F_{\mu\nu}\}$ see [5].

参考文献

[1] P.Zanardi and M.Rasetti :
Holonomic Quantum Computation,
Phys. Lett. A264 , 94–99, 1999, quant–ph 9904011.

[2] J.Pachos, P.Zanardi and M.Rasetti :
Non-Abelian Berry Connections for Quantum Computation,
to appear in Phys. Rev. A, quant–ph 9907103.

[3] K.Fujii :
Note on Coherent States and Adiabatic Connections, Curvatures,
Jour. Math. Phys. 41, 4406–4412, 2000, quant–ph 9910069.

[4] K.Fujii :
Mathematical Foundations of Holonomic Quantum Computer,
Talk given at the Int. Conf. “The 32^{nd} Symposium on Mathematical Physics”,
quant–ph 0004102.

[5] K.Fujii :
More on Optical Holonomic Quantum Computer,
quant–ph 0005129.

[6] J.Pachos and S.Chountasis :
Optical Holonomic Quantum Computer,
quant–ph 9912093.